УДК 519.21

А. В. Свіщук, Д. Г. Журавицький (Ін-т математики НАН України, Київ),
А. В. Калеманова (Нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ)

АНАЛОГ ФОРМУЛИ БЛЕКА – ШОУЛСА ДЛЯ ЦІНИ ОПЦІОНІВ (B, S, X)-НЕПОВНИХ РИНКІВ ЦІННИХ ПАПЕРІВ ІЗ СТРИБКАМИ

We describe (B, S, X)-incomplete securities market with jumps as a jump random evolution process which is a combination of the Ito process in random Markov medium and the geometric compound Poisson process. For a given model, we derive the Black–Scholes equation and formula which describe a price of the European option under conditions of (B, S, X)-incomplete market.

Описано (B, S, X)-неповний ринок цінних паперів із стрибками як процес стрибкоподібної випадкової еволюції, що є комбінацією процесу Іто у випадковому марковському середовищі та геометричного складного процесу Пуассона. Для даної моделі виведено рівняння та формулу Блека – Шоулса, що описують ціну Європейського опціону в умовах (B, S, X)-неповного ринку.

1. Процес випадкової еволюції, керований процесом Маркова. Нехай $Y_x = \{ y_x(t);\ t \geq 0 \}$ є дифузійним процесом на R для кожного $x \in X$, де X — фазовий простір строго неперервного процесу Маркова $x(t)$, що визначається стохастичним диференціальним рівнянням (СДР):

$$dy_x(t) = \mu(x, y_x(t))\,dt + \sigma(x, y_x(t))\,dw(t),\ y_x(0) = y, \tag{1}$$

де $\{ w(t);\ t \geq 0 \}$ — вінерівський процес, незалежний від $x(t)$, і для кожного $x \in X$ функції $\mu(x, \cdot)$ та $\sigma(x, \cdot)$ є дійснозначними неперервними функціями, що задовольняють умови Ліпшіца

$$|\mu(x, y) - \mu(x, y')| + |\sigma(x, y) - \sigma(x, y')| \leq K|y - y'|.$$

Тому процес $Y_x = \{ y_x(t);\ t \geq 0 \}$ в (1) є визначеним. Далі визначимо процес $Y = \{ y(t); t \geq 0 \}$ як розв'язок СДР:

$$dy(t) = \mu(x, y(t))\,dt + \sigma(x, y(t))\,dw(t),\ y(0) = y. \tag{2}$$

В той час як процес $\{ y(t); t \geq 0 \}$ сам по собі не є процесом Маркова, процес $z(t) = (x(t), y(t))$ є процесом Маркова на $X \times R$, про що свідчить наступний результат [1].

Теорема 1. *Нехай $\{ x(t); t \geq 0 \}$ — процес Маркова на X із інфінітезимальним оператором Q і $\{ y(t); t \geq 0 \}$ є процесом із рівняння* (2). *Тоді $Z \equiv \{ z(t) = (x(t), y(t));\ t \geq 0 \}$ — однозначно визначений процес Маркова на фазовому просторі $X \times R$ із інфінітезимальним оператором L*:

$$A f(x, y) = \mu(x, y)\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \frac{1}{2}\sigma^2(x, y)\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} + Q f(x, y). \tag{3}$$

Цей процес $z(t) = (x(t), y(t))$ називається *процесом випадкової еволюції, керованим процесом Маркова* [1].

2. Формула Фейнмана – Каца для процесу випадкової еволюції Z. Нехай $X = \{ x_s(t);\ t \geq s \}$ є процесом Маркова із фазовим простором X та інфінітезимальним оператором Q і $x_s(s) = x \in X$; нехай також $\{ y_s(t); t \geq s \}$ є аналогом процесу з (2), тобто

$$y_s(t) = y + \int_0^t \mu(\nu, x_s(\nu), y_s(\nu))\, d\nu + \int_0^t \sigma(\nu, x_s(\nu), y_s(\nu))\, dw(\nu), \quad y_s(s) = y. \quad (4)$$

Позначимо через L_t наступний диференціальний оператор:

$$L_t := \mu(t, x, y)\frac{d}{dy} + \frac{1}{2}\sigma^2(t, x, y)\frac{d^2}{dy^2}, \quad (5)$$

де функції μ та σ є дійснозначними неперервними і задовольняють умову Ліпшиця. Наступний результат є узагальненням формули Фейнмана – Каца для процесу випадкової еволюції [1].

Теорема 2. *Нехай $r(t, x, y)$ — обмежена неперервна функція та обернена задача Коші для функції $u(t, x, y)$ має вигляд*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L_t u + r(t, x, y)u + Qu = 0,$$
$$u(T, x, y) = \varphi(x, y), \quad (6)$$

де φ — неперервна обмежена функція на $X \times R$. Тоді задача Коші (6) *має розв'язок*

$$u(t, x, y) = E_{t,x,y}\left[\varphi(x_t(T), y_t(T)) \exp\left\{\int_0^T r(\nu, x_t(\nu), y_t(\nu))\, d\nu\right\}\right]. \quad (7)$$

Тут $E_{t,x,y}$ — інтеграл за мірою $P_{t,x,y}(\cdot) = P\{\cdot \mid (x_t(t), y_t(t)) = (x, y)\}$.

3. Рівняння Блека – Шоулса для (B, S, X)-неповного ринку цінних паперів. У відомій моделі Блека – Шоулса (B, S)-ринку цінних паперів [2] (що використовується для визначення цін опціонів через безризиковий $B(t)$ (облігації або банківський рахунок) та ризиковий $S(t)$ (акції) активи) вважається, що динаміки $B(t)$ та $S(t)$ визначаються наступною системою:

$$dB(t) = rB(t)\,dt, \quad B(0) > 0,$$
$$dS(t) = \mu S(t)\,dt + \sigma S(t)\,dw(t), \quad S(0) > 0, \quad (8)$$

з процентною ставкою $r \ge 0$, коефіцієнтами переносу $\mu \in R$ та мінливості $\sigma > 0$.

Вважаємо, що коефіцієнти r, μ та σ залежать від процесу Маркова $\{x(t);\ t \ge 0\}$, що не залежить від $\{w(t);\ t \ge 0\}$; таким чином, отримуємо наступну систему для $B(t)$ та $S(t)$ [3]:

$$dB(t) = r(x(t))B(t)\,dt, \quad B(0) > 0,$$
$$dS(t) = \mu(x(t))S(t)\,dt + \sigma(x(t))S(t)\,dw(t), \quad S(0) > 0. \quad (9)$$

При наявності додаткового джерела випадковості $X = \{x(t);\ t \ge 0\}$, окрім $w(t)$, визначаємо цей ринок цінних паперів у (9) як (B, S, X)-неповний ринок.

Наступний результат узагальнює відоме рівняння Блека – Шоулса на (B, S, X)-неповний ринок цінних паперів.

Нехай X — процес Маркова на X з інфінітезимальним оператором Q, активи $(B(t), S(t))$ визначаються системою (9) та $L(x)$ — наступний диференціальний оператор:

$$L(x) = r(x)s\frac{d}{ds} + \frac{1}{2}\sigma^2(x)s^2\frac{d^2}{ds^2}.$$

Теорема 3 [1, 3]. *Обернена задача Коші для* $C(t,x,y)$:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + L(x)C - r(x)C + QC = 0,$$
$$C(T,x,s) = \varphi(x,s), \tag{10}$$

де $\varphi(x,s)$ — *неперервно обмежена функція на* $x \in X \times R$, *має розв'язок*

$$C(t,x,s) = E_{t,x,s}\left[\varphi(x_t(T), S_t(T))\exp\left\{-\int_t^T r(x_t(\nu))\,d\nu\right\}\right]. \tag{11}$$

Доведення цієї теореми випливає безпосередньо із теореми 2 у випадку $r(t,x,y) \equiv -r(x)$ $\forall t \geq 0$ та $y \in R$.

Рівняння (10) називаємо рівнянням Блека – Шоулса для (B, S, X)-неповного ринку цінних паперів.

4. Європейський опціон купівлі у (B, S, X)-неповному ринку цінних паперів. Нехай $f_T = f_T(S_T(T))$ — функція вартості Європейського опціону купівлі у (B, S, X)-ринку. У цьому випадку обернена задача Коші

$$\frac{\partial C}{\partial t} + L(x)C - r(x)C + QC = 0,$$
$$C(T,x,S) = f_T(S) \tag{12}$$

має розв'язок

$$C(t,x,s) = E_{t,x,s}\left[f_T\left(S_t^r(T)\right)\exp\left\{-\int_t^T r(x_t(\nu))\,d\nu\right\}\right] =$$

$$= E_{t,x,s}^{\mu-r}\left[f_T\left(S_t^{\mu}(T)\right)\exp\left\{-\int_t^T r(x_t(\nu))\,d\nu\right\}\right], \tag{13}$$

де $S_t^r(T)$, $S_t^{\mu}(T)$ — динаміка вартості акцій у (9) з коефіцієнтом переносу $r(\mu)$, а $E_{t,x,s}^{\mu-r}$ — математичне сподівання, що відповідає мірі $P_t^{\mu-r}(d\omega) :=$ $:= \beta_t^{\mu-r}P_t(d\omega)$, $P_t(d\omega) := P/F_t$,

$$\beta_t^{\mu-r} := \exp\left\{-\int_0^t \frac{\mu(x(s)) - r(x(s))}{\sigma(x(s))}dw(s) - \frac{1}{2}\int_0^t\left(\frac{\mu(x(s)) - r(x(s))}{\sigma(x(s))}\right)^2 ds\right\}.$$

5. Формула Блека – Шоулса для (B, S, X)-неповного ринку. Нехай $f_T(S) = (S_T - K)^+ = \max\{S_T - K, 0\}$, де T — час реалізації опціону, K — договірна ціна акції.

Для стандартного Європейського опціону купівлі із функцією вартості $f_T(S) = (S_T - K)^+$ раціональна вартість $C_T^{x,S}$ опціону визначається таким чином (див. [3]):

$$C_T^{x,S} = E_{0,x,S}\left[\left(S_0^r(T) - K\right)^+ \exp\left\{-\int_0^t r(x(\nu))d\nu\right\}\right], \tag{14}$$

де

$$S_0^r(T) = S\exp\left\{\int_0^T r(x(s))ds\right\}\exp\left\{\int_0^T\left(\sigma(x(s))dw(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(x(s))ds\right)\right\},$$

$$x(S) = x_0(S), \quad S = S_0. \tag{15}$$

Ця формула для $C_T^{x,S}$ випливає з (13), якщо покласти $f_T(S) = (S_T - K)^+$. Значення $C_T^{x,S}$ в деяких випадках може бути обчислене простіше. Наприклад, покладемо $r(x) = 0$ для кожного $x \in X$, тоді з (14) маємо

$$C_T^{x,S} = E_{0,x,S}[\max(S_0(T) - K, 0)],$$

де

$$S_0(T) = \exp\left\{\int_0^T\left(\sigma(x(s))dw(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(x(s))ds\right)\right\}.$$

Відмітимо, що функція

$$C(t, x, s) := E_{x,s}[f(S_{T-t})] \tag{16}$$

є розв'язком задачі Коші:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(x)s^2\frac{\partial^2 C}{\partial s^2} + QC = 0,$$

$$C(T, x, S) = f(S), \tag{17}$$

де $dS_t = \sigma(x(t))S_t\,dw(t)$, $S_0 = S$.

Нехай F_T^x — розподіл випадкової величини $Z_T^x := \int_0^T \sigma^2(x(s))\,ds$. Тоді з (13) та (16) маємо

$$C_T^{x,S} = E_x[f(S_T)] = \int\left(\int f(y)y^{-1}\psi\left(z, \ln\frac{y}{s} + \frac{1}{2}z\right)dy\right)F_T^x(dz), \tag{18}$$

де

$$\psi(z, \nu) := (2\pi z)^{-1/2}\exp(-\nu^2/(2z)). \tag{19}$$

У частинному випадку, коли $f(S) := (S - K)^+$, з (18) для кожного $x \in X$ отримуємо

$$C_T^{x,s} = \int C_T^{BS}\left(\left(\frac{z}{T}\right)^{1/2}, T, S\right)F_T^x(dz), \tag{20}$$

де $C_T^{BS}(\sigma, T, S)$ — значення Блека – Шоулса для Європейського опціону купівлі із волатильністю σ, датою реалізації T та процентною ставкою $r = 0$.

6. Формула Блека – Шоулса для ринку цінних паперів, що є комбінацією (B, S, X)-неповного ринку та геометричного складного процесу Пуассона. ***Складний геометричний процес Пуассона.*** Нехай $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{N(t)}$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини із значеннями в $(-1, +\infty)$, $N(t)$ є процесом Пуассона з інтенсивністю $\lambda > 0$ та $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{N(t)}$ — випадкові моменти часу; $N(t)$, $(Y_i, i \geq 1)$ та $(\tau_i, i \geq 1)$ не залежать від $x(t)$ та $w(t)$.

Нехай $H(dy)$ — деякий розподіл імовірності на $(-1, +\infty)$, що відповідає $(Y_i, i \geq 0)$, та $\nu(dy, dt)$ — випадкова точкова міра, що дорівнює числу стрибків процесу $N(t)$ із значеннями в dy до моменту часу dt. Тобто $(\lambda, H(dy))$ є локальною характеристикою міри $\nu(dy, dt)$ та $\overline{\nu}(dy, dt) := \nu(dy, dt) - \lambda H(dy)$ є локальним мартингалом.

Складним геометричним процесом Пуассона називається процес $\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$. Відмітимо, що

$$\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k = \sum_{k=1} Y_k 1\{\tau_k \leq t\} = \int_0^t \int_{-1}^{\infty} y \nu(dy, dt).$$

Нехай розв'язком рівняння

$$\frac{dS_t^d}{S_{t-}^d} = \int_0^t \int_{-1}^{\infty} y \nu(dy, dt) \tag{21}$$

є процес S_t^d. Тоді $S_t^d = S_0 \prod_{k=1}^{N(t)} (1 + Y_k)$.

Нехай

$$L_t := L_0 \prod_{k=1}^{N(t)} h(Y_k), \tag{22}$$

де L_0 — F_0-вимірна величина, $EL_0 = 1$, та невід'ємна функція $h(y)$ задовольняє рівності

$$\int_{-1}^{+\infty} h(y) H(dy) = 1, \qquad \int_{-1}^{+\infty} y h(y) H(dy) = 0. \tag{23}$$

Розглянемо міру $\tilde{P} : d\tilde{P}/dP = L_T$, де $EL_T = 1$,

$$\tilde{P}(A) = \int_A L_T(w) dP(w). \tag{24}$$

Тоді розривний процес S_t^d є $(\tilde{P}, F_t)$-мартингалом, що випливає з властивостей (22), (23), в той час як L_t в (22) — (P, F_t)-мартингал.

Відмітимо, що $\nu(dy, dt)$ має на $[0, T)$ $(\tilde{P}, F_t)$-локальні характеристики $(\lambda, h(y)H(dy))$, де функція $h(y)$ визначається з (23). Позначимо

$$H^*(dy) := h(y) H(dy). \tag{25}$$

(B, S, X)- ринок та складний процес Пауссона. Такий ринок цінних паперів описується наступним стохастичним диференціальним рівнянням:

$$\frac{dS(t)}{S(t-)} = \mu(x(t))\,dt + \sigma(x(t))\,dw(t) + \int_{-1}^{+\infty} y\nu(dy, dt). \tag{26}$$

Розв'язок цього рівняння можна подати у вигляді [4]

$$S(t) = S(0)\exp\left\{\int_0^t \left[\left(\mu(x(s)) - \frac{1}{2}\sigma^2(x(s)) + \lambda\int_{-1}^{\infty}\ln(1+y)H(dy)\right)ds + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sigma(x(s))\,dw(s) + \int_{-1}^{\infty}\ln(1+y)\tilde{\nu}(dy;dt)\right]\right\},$$

де $\tilde{\nu}(dy, dt) := \nu(dy, dt) - \lambda H(dy)$.

Позначимо через $S^*(t)$ дисконтуючий процес ціни акції $S(t)$:

$$S^*(t) = S(t)\exp\left\{-\int_0^t r(x(s))ds\right\}, \quad 0 \le t \le T. \tag{27}$$

Тоді $S^*(t)$ можна записати у вигляді [4]

$$S^*(t) = S(0)\exp\left\{\int_0^t\left((\mu(x(s)) - r(x(s)) - \frac{1}{2}\sigma^2(x(s))\right)ds + \int_0^t \sigma(x(s))dw(s)\right\}\prod_{k=1}^{N(t)}(1+Y_k). \tag{28}$$

Відмітимо, що процес (див. [4])

$$W^*(t) := W(t) + \int_0^t \frac{\mu(x(s)) - r(x(s))}{\sigma(x(s))}ds \tag{29}$$

є (P^*, F_t)-стандартним вінерівським процесом, де P^* — міра така, що $dP^*/dP = \rho_T$,

$$\rho_t := \rho_0\exp\left\{-\int_0^t \frac{\mu(x(s)) - r(x(s))}{\sigma(x(s))}dw(s) - \frac{1}{2}\int_0^t\left(\frac{\mu(x(s)) - r(x(s))}{\sigma(x(s))}\right)^2 ds\right\}\prod_{k=1}^{N(t)}h(Y_k),$$
$$0 \le t \le T, \quad E\rho_0 = 1, \tag{30}$$

функція $h(y)$ визначена в (23).

Враховуючи зображення (29) для $W^*(t)$ та (27), процес $S^*(t)$ в (28) можна подати у вигляді

$$S^*(t) = S(0)\exp\left\{\int_0^t \sigma(x(s))dW^*(t) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(x(s))ds\right\}\prod_{k=1}^{N(t)}\left(1 + Y_k^*\right), \tag{31}$$

де $\left\{Y_k^*; k \ge 1\right\}$ мають розподіл $H^*(dy) = h(y)H(dy)$.

Формула для ціни випадкової вимоги $f_T(S_T)$.

Теорема 4. *Ціна $C^f_{T,x,S}$ випадкової вимоги $f_T(S_T)$ в нульовий момент часу з датою реалізації T має вигляд*

$$C^*_{T,x,S} = E^*_{T,x,S}\left[f_T(S(T))\exp\left\{ -\int_0^T r(x(s))ds \right\}\right] =$$

$$= E^*_{T,x,S}\left[f_T\left(S^*(T)\exp\left\{ -\int_0^T r(x(s))ds \right\}\right)\exp\left\{ -\int_0^T r(x(s))ds \right\}\right]. \qquad (32)$$

Доведення. Із формули Іто випливає, що $S^*(t)$ є розв'язком наступного рівняння:

$$dS^*(t) = r(x(s))S^*(t)dt + \sigma(x(t))S^*(t)dW^*(t) + S^*(t)\int_{-1}^{+\infty} y\nu(dy,dt). \qquad (33)$$

Далі відмітимо, що розв'язком задачі Коші

$$\frac{\partial C}{\partial t} + r(s)S\frac{\partial C}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2(x)S^2\frac{\partial^2 C}{\partial s^2} - r(x)C +$$

$$+ \lambda\int_{-1}^{\infty} (C(t, S(1+y)) - C(t,x))\lambda h(y)H(dy) + QC = 0,$$

$$C(T,S) = f_T(S),$$

є функція [4]

$$C^f_{t,x,S} = B_{t,x,S}\left[f_T(S(T))\exp\left\{ -\int_0^T r(x(s))ds \right\}\right],$$

що випливає з (17) та (33). Враховуючи (13) та (33), завершуємо доведення теореми.

Формула Блека – Шоулса для ціни випадкової вимоги. У даному випадку $f_T(S_T) = (S_T - K)^*$, де K — договірна ціна. Підставляючи функцію $f_T(S_T)$ у вираз (32), отримуємо результат.

Теорема 5. *Ціна $C_{T,x,S}$ випадкової вимоги $f_T(S_T) = (S_T - K)^*$ Європейського опціону купівлі має вигляд*

$$C_{T,x,S} = E^*_{T,x,S}\left[(S(T) - K)^+\exp\left\{ -\int_0^T r(x(s))ds \right\}\right] =$$

$$= E^*_{T,x,S}\left[\left(S^*(T)\exp\left\{ -\int_0^T r(x(s))ds \right\} - K\right)^+\exp\left\{ -\int_0^T r(x(s))ds \right\}\right],$$

де процес $S^*(t)$ визначений в (31).

Значення $C^f_{T,x,S}$ ($C_{T,x,S}$) у деяких випадках можна обчислити простіше. Нехай, наприклад, $r(x) \equiv 0$ $\forall x \in X$. Тоді

$$C^f_{T,x,S} = E^*_{T,x,S}[f_T(S(T))] = E^*_{T,x,S}[f_T(S^*(T))],$$

де $S^*(t)$ визначений в (31) при $r(x) \equiv 0$.

Відмітимо, що функція $C^f_{t,x,S} = E_{x,S}[f_T(S_{T-t})]$ є розв'язком задачі Коші

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(x)S^2\frac{\partial^2 C}{\partial s^2} + \lambda\int_{-1}^{\infty}(C(t,S(1+y)) - C(t,x))h(y)H(dy) + QC = 0,$$

$$C(T,S) = f_T(S).$$

Нехай F_T^x — розподіл випадкової величини $Z_T^x := \int_0^T \sigma^2(x(s))\,ds$.

Теорема 6. *Якщо* $r(x) \equiv 0 \ \ \forall x \in X$, *то ціна* $C_{T,x,S}^f$ *випадкової вимоги* $f_T(S_T)$ *обчислюється за формулою*

$$C_{T,x,S}^f = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^k}{k!}\int_{-1}^{\infty}\ldots\int_{-1}^{\infty}\left(\int\left(\int f(y)y^{-1} \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\ \psi\left(z, \ln\frac{y}{S\prod_{i=1}^k(1+y_i)} + \frac{1}{2}z\right)dy\right)F_T^x(dz)\right)H^*(dy_1)\ldots H^*(dy_k),$$

де $H^*(dy) = h(y)H(dy)$, $\psi(z,\nu)$ *визначена в* (19).

Доведення випливає із зображення (31) для $S^*(t)$, формули (32) та інтегрування функції $f_T(S(T)) = f_T(S^*(T))$, враховуючи розподіл Z_T^X.

Наслідок. *Нехай* $f_T(S_T) = (S-K)^+$, $r(x) \equiv 0$. *Тоді з теореми* 4, *формули* (34) *та формули* (20) *випливає, що ціна* $C_{T,x,S}$ *випадкової вимоги має вигляд*

$$C_{T,x,S} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^k}{k!}\int_{-1}^{\infty}\ldots\int_{-1}^{\infty}\int\left(C_T^{BS}\left(\left(\frac{z}{T}\right)^{1/2}, T, S\prod_{i=1}^{k}(1+y_i)\right)\right)F_T^x(dz)\ \times$$

$$\times\ H^*(dy_1)\ldots H^*(dy_k),$$

де функція C_T^{BS} *визначена формулою* (20).

Зауваження. Рівняння та формули Блека – Шоулса для цін опціонів (B,S)-повних ринків цінних паперів із стрибками досліджувались в роботі [5].

1. *Griego R., Swishchuk A. A.* Black – Scholes formula for a market in a random environment // Stochast. Proc. and their Appl. – 1998. – 12 p. (to appear).
2. *Black F., Scholes M.* The pricing of options and cooperate liabilities // J. Political Economy. – 1973. – № 3. – P. 637 – 659.
3. *Swishchuk A. V.* Hedging of options under mean-square stetion and with semi-Markov volatility // Ukr. Math. J. – 1995. – **47**, № 7. – P. 976 – 983.
4. *Свіщук А. В., Журавицький Д. Г.* Застосування розривних еволюційних систем у фінансовій математиці // Допов. НАН України. – 1997. – № 7. – С. 50 – 56.
5. *Aase K. K.* Contingent claims valuation when the security price is a combination of a Ito process and random point process // Stochast. Proc. and their Appl. – 1998. – **28**. – P. 185 – 220.

Одержано 09.11.98,
після доопрацювання — 15.04.99