УДК 519.9

Г. П. Пелюх (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ И ОГРАНИЧЕННЫХ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

For a class of nonlinear functional equations, we establish conditions for the existence and uniqueness of the solution continuous and bounded on the real axis.

Одержано умови існування і єдиності неперервного і обмеженого на дійсній осі розв'язку одного класу нелінійних функціональних рівнянь.

Нелинейные функциональные уравнения вида

$$x(t) = f\big(t, x(\varphi_1(t, x(t))), \ldots, x(\varphi_m(t, x(t)))\big), \tag{1}$$

где $t \in R = (-\infty, +\infty)$, $f\colon R \times R^m \to R$, $\varphi_i\colon R \times R \to R$, $i = \overline{1,m}$, $x(t)$ — неизвестная функция, исследовались многими математиками (достаточно полную библиографию можно найти в [1]). В результате этого для широких классов таких уравнений получены условия существования и единственности решений — непрерывных [2, 3], дифференцируемых [3 – 5], аналитических [6 – 8] и др. В настоящей работе также исследуется вопрос о существовании и единственности решения — непрерывного и ограниченного на R — и ее можно рассматривать как дальнейшее развитие указанных выше исследований. Основной целью является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) *функции* $f(t, x_1, \ldots, x_m)$, $\varphi_i(t, x)$, $i = \overline{1,m}$, *являются непрерывными и ограниченными при* $t \in R$, $x_i \in R$, $i = \overline{1,m}$, $x \in R$ *и*

$$\sup_{\substack{t \in R,\\ x_i \in R,\ i=\overline{1,m}}} |f(t, x_1, \ldots, x_m)| = M < \infty;$$

2) *функции* $f(t, x_1, \ldots, x_m)$, $\varphi_i(t, x)$, $i = \overline{1,m}$, *удовлетворяют условиям Липшица*

$$\left|f(\bar t, \bar x_1, \ldots, \bar x_m) - f(\bar{\bar t}, \bar{\bar x}_1, \ldots, \bar{\bar x}_m)\right| \le L_0 \left|\bar t - \bar{\bar t}\right| + \sum_{i=1}^m L_i \left|\bar x_i - \bar{\bar x}_i\right|,$$

$$\left|\varphi_i(\bar t, \bar x) - \varphi_i(\bar{\bar t}, \bar{\bar x})\right| \le l_i' \left|\bar t - \bar{\bar t}\right| + l_i'' \left|\bar x_i - \bar{\bar x}_i\right|, \quad i = \overline{1,m},$$

где L_i, $i = \overline{0,m}$, l_i', l_i'', $i = \overline{1,m}$, — *некоторые положительные постоянные,* $(\bar t, \bar x_1, \ldots, \bar x_m)$, $(\bar{\bar t}, \bar{\bar x}_1, \ldots, \bar{\bar x}_m) \in R^{m+1}$, $(\bar t, \bar x)$, $(\bar{\bar t}, \bar{\bar x}) \in R^2$;

3) $a = \sum_{i=1}^m L_i < 1$, $0 < l_i' < 1$, $0 < l_i'' < 1$, $i = \overline{1,m}$, $0 < L_0 \le \dfrac{(1-a)^2}{4a}$.

Тогда уравнение (1) *имеет единственное непрерывное при* $t \in R$ *решение, удовлетворяющее условиям*

$$\begin{gathered} |x(t)| \le M, \\ \left|x(\bar t) - x(\bar{\bar t})\right| \le L\left|\bar t - \bar{\bar t}\right|, \end{gathered} \tag{2}$$

где

$$L = \frac{(1-a)}{2a} + \frac{(1-a)}{2a}\sqrt{1 - \frac{4a}{(1-a)^2}L_0}, \quad t, \bar{t}, \bar{\bar{t}} \in R.$$

Доказательство. Пусть $C^0(R)$ — множество функций $x(t)$, непрерывных и ограниченных при $t \in R$. С помощью соотношения

$$\rho(x(t), y(t)) = \|x(t) - y(t)\| = \sup_{t \in R} |x(t) - y(t)|$$

введем в $C^0(R)$ метрику ρ. Тогда множество функций $C^0(R)$ с метрикой ρ является полным метрическим пространством.

Обозначим через $C^{0,L}(R)$ множество функций $x(t)$, принадлежащих пространству $C^0(R)$ и удовлетворяющих условиям

$$\left| x(t) \right| \leq M, \quad t \in R, \tag{3}$$

$$\left| x(\bar{t}) - x(\bar{\bar{t}}) \right| \leq L \left| \bar{t} - \bar{\bar{t}} \right|, \quad \bar{t}, \bar{\bar{t}} \in R. \tag{4}$$

Нетрудно убедиться, что множество $C^{0,L}(R)$ является компактным в себе.

С помощью соотношения

$$Tx(t) = f\big(t, x(\varphi_1(t, x(t))), \ldots, x(\varphi_m(t, x(t)))\big) \tag{5}$$

определим отображение T и покажем, что оно является сжатым отображением множества $C^{0,L}(R)$ в себя.

Сначала покажем, что отображение T переводит множество $C^{0,L}(R)$ в себя. В самом деле, если $x \in C^{0,L}(R)$, то в силу (5) и условия 1 функция $Tx(t)$ непрерывна при $t \in R$ и удовлетворяет условию (3). Далее, так как

$$Tx(\bar{t}) - Tx(\bar{\bar{t}}) = f\big(\bar{t}, x(\varphi_1(\bar{t}, x(\bar{t}))), \ldots, x(\varphi_m(\bar{t}, x(\bar{t})))\big) -$$

$$- f\big(\bar{\bar{t}}, x(\varphi_1(\bar{\bar{t}}, x(\bar{\bar{t}}))), \ldots, x(\varphi_m(\bar{\bar{t}}, x(\bar{\bar{t}})))\big),$$

то, принимая во внимание условие 2, получаем

$$\left| Tx(\bar{t}) - Tx(\bar{\bar{t}}) \right| \leq L_0 \left| \bar{t} - \bar{\bar{t}} \right| + \sum_{i=1}^{m} L_i \left| x(\varphi_i(\bar{t}, x(\bar{t}))) - x(\varphi_i(\bar{\bar{t}}, x(\bar{\bar{t}}))) \right| \leq$$

$$\leq L_0 \left| \bar{t} - \bar{\bar{t}} \right| + \sum_{i=1}^{m} L_i L \left| \varphi_i(\bar{t}, x(\bar{t})) - \varphi_i(\bar{\bar{t}}, x(\bar{\bar{t}})) \right| \leq$$

$$\leq L_0 \left| \bar{t} - \bar{\bar{t}} \right| + \sum_{i=1}^{m} L_i L \left(l_i' \left| \bar{t} - \bar{\bar{t}} \right| + l_i'' L \left| \bar{t} - \bar{\bar{t}} \right| \right) =$$

$$= \left(L_0 + L \sum_{i=1}^{m} L_i (1 + L) \right) \left| \bar{t} - \bar{\bar{t}} \right| = \big(L_0 + aL(1 + L) \big) \left| \bar{t} - \bar{\bar{t}} \right| = L \left| \bar{t} - \bar{\bar{t}} \right|.$$

Таким образом, $Tx(t) \in C^{0,L}(R)$.

Теперь покажем, что отображение T сжато. Действительно, если $x(t)$, $y(t) \in C^{0,L}(R)$, то

$$|Tx(t) - Ty(t)| = \big| f(t, x(\varphi_1(t, x(t))), \ldots, x(\varphi_m(t, x(t)))) -$$

$$- f(t, y(\varphi_1(t, y(t))), \ldots, y(\varphi_m(t, y(t)))) \big| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} L_i \left| x(\varphi_i(t, x(t))) - y(\varphi_i(t, y(t))) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} L_i \left| x(\varphi_i(t, x(t))) - x(\varphi_i(t, y(t))) \right| + \sum_{i=1}^{m} L_i \left| x(\varphi_i(t, y(t))) - y(\varphi_i(t, y(t))) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} L_i L l_i'' \left| x(t) - y(t) \right| + \sum_{i=1}^{m} L_i \left| x(\varphi_i(t, y(t))) - y(\varphi_i(t, y(t))) \right|.$$

Поскольку $\varphi_i(t, y(t)) \in R$, $i = \overline{1, m}$, и $|x(t) - y(t)| \leq 2M$, $|x(\varphi_i(t, y(t))) - y(\varphi_i(t, y(t)))| \leq 2M$, $i = \overline{1, m}$, то из последнего соотношения вытекает

$$|Tx(t) - Ty(t)| \leq \left(\sum_{i=1}^{m} L_i + L \sum_{i=1}^{m} L_i l_i'' \right) \| x(t) - y(t) \|$$

и, следовательно,

$$\| Tx(t) - Ty(t) \| \leq \theta \| x(t) - y(t) \|$$

или

$$\rho\,(Tx(t), Ty(t)) \leq \theta \rho\,(x(t), y(t)),$$

где $\theta = \sum_{i=1}^{m} L_i + L \sum_{i=1}^{m} L_i l_i''$. Поскольку $L < \dfrac{1-a}{a}$, то в силу условия 3 имеем $\theta < a + \dfrac{1-a}{a} a = 1$, т. е. отображение T сжато.

Таким образом, отображение T, определенное с помощью формулы (5), переводит $C^{0,L}(R)$ в себя и является сжатым. Тогда, как известно, T имеет единственную неподвижную точку $x(t) \in C^{0,L}(R)$ и

$$x(t) = \lim_{n \to \infty} T^n x_0(t),$$

где $x_0(t)$ — произвольная функция из $C^{0,L}(R)$. Теорема доказана.

***Замечание* 1.** Если выполняются условия 1–3 теоремы и функции $f(t, x_1, \ldots, x_m)$, $\varphi_i(t, x(t))$, $\overline{1, m}$, являются $\tilde{T}$-периодическими по t, то и решение $x(t) \in C^{0,L}(R)$ является $\tilde{T}$-периодическим.

***Замечание* 2.** Аналогичная теорема имеет место в случае, когда $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$. При этом ее доказательство остается прежним, если $|f|$ и $|x|$ определить, например, соотношениями $|f| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |f_i|$, $|x| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

1. *Kuczma M.* Functional equations in a single variable. – Warszawa: PWN, 1968. – 383 p.
2. *Lattes S.* Sur les equations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation // Ann. Mat. – 1906. – **13**. – P. 1–137.
3. *Montel P.* Lecons sur les recurrences et leurs applications. – Paris, 1957. – 268 p.
4. *Hartman P.* On local homeomorphism of Euclidean spaces // Bol. Soc. mat. mexic. – 1960. – **5**. – P. 220–241.
5. *Sternberg S.* On the behavior of invariant curves near a hyperbolic point of a surface transformation // Amer. J. Math. – 1955. – **77**. – P. 526–534.
6. *Moser J.* The analytic invariants of an area-preserving mapping near a hyperbolic fixed point // Communs Pure and Appl. Math. – 1956. – **9**. – P. 673–692.
7. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – М., 1947. – 392 с.
8. *Пелюх Г. П.* Представление решений разностных уравнений с непрерывным аргументом // Дифференц. уравнения. – 1996. – **32**, №2. – С. 304–312.

Получено 16.06.99