УДК 517.938

Г. А. Дерфель (Ун-т им. Бен-Гуриона, Бэр-Шева, Израиль),
Е. Ю. Романенко, А. Н. Шарковский (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ РАЗРЫВНОСТЬ ГЛАДКИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ q-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ *

We investigate the asymptotic behavior of solutions of the simplest nonlinear q-difference equations having the form $x(qt+1) = f(x(t))$, $q > 1$, $t \in R^+$. The study is based on a comparison of equations of these the difference equations $x(t+1) = f(x(t))$, $t \in R^+$. We show that, "for not very large" $q > 1$, the solutions of q-difference equation inherit the asymptotic properties of solutions of the corresponding difference equation. In particular, we obtain an upper bound of those values of a parameter q for which smooth bounded solutions possessing a property $\max_{t\in[0,T]}|x'(t)| \to \infty$ as $T \to \infty$ and tending (in the Hausdorff metric for graphs) to discontinuous upper semicontinuous functions are typical of the q-difference equation.

Досліджується асимптотична поведінка розв'язків найпростіших нелінійних q-різницевих рівнянь вигляду $x(qt+1) = f(x(t))$, $q > 1$, $t \in R^+$. В основу покладено порівняння таких рівнянь з різницевими рівняннями $x(t+1) = f(x(t))$, $t \in R^+$. Показано, що при „не дуже великих" $q > 1$ розв'язки q-різницевого рівняння успадковують асимптотичні властивості розв'язків відповідного різницевого рівняння, зокрема, отримано оцінку зверху тих значень параметра q, при яких типовими для q-різницевого рівняння є гладкі обмежені розв'язки, що мають властивість $\max_{t\in[0,T]}|x'(t)| \to \infty$ при $T \to \infty$ і прямують (в метриці Хаусдорфа для графіків) до розривних напівнеперервних зверху функцій.

Исследуем асимптотическое поведение решений функциональных уравнений

$$x(qt+1) = f(x(t)), \qquad t \in R^+, \quad q > 1. \tag{1}$$

Линейная замена

$$x(t) = y\left(t + \frac{1}{q-1}\right), \qquad \tau = t + \frac{1}{q-1}$$

приводит уравнение (1) к виду

$$y(q\tau) = f(y(\tau)). \tag{2}$$

Для функциональных уравнений с таким линейно преобразованным аргументом общего вида

$$y(q\tau) = F(\tau, y(\tau)) \tag{3}$$

уже давно используется термин „q-разностное уравнение" (см., например, [1–3]), правда, в основном, для случая, когда τ — комплексная переменная. Мы также используем этот термин — q-разностное уравнение — применительно к уравнениям вида (1) и (2), но рассматриваем только случай вещественного аргумента.

Хотелось бы отметить, что одним из источников нелинейных q-разностных уравнений является теория краевых задач для уравнений в частных производных. В частности, простейший пример, приводящий к уравнению вида (1), — это линейное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial z}, \qquad t \in R^+, \quad 0 \le z \le 1, \tag{4}$$

с нелинейным краевым условием

* Частично поддержана INTAS (проект INTAS 96-0700)

© Г. А. ДЕРФЕЛЬ, Е. Ю. РОМАНЕНКО, А. Н. ШАРКОВСКИЙ, 2000

$$u\big|_{z=1,\, t=q\tau} = f\big(u\big|_{z=0,\, t=\tau}\big), \qquad q > 1, \tag{5}$$

связывающим значения на концах $z=0$ и $z=1$ неизвестной $u(t, z)$ в различные (в данном случае линейно зависящие) моменты времени. Записывая общее решение уравнения (4) в виде бегущей волны $u(t, z) = x(z+at)$ и подставляя в краевое условие (5), получаем уравнение (1) для новой неизвестной x.

Далее будем рассматривать нелинейное q-разностное уравнение (1) в предположении, что $f \in C^1(I, I)$, I — замкнутый интервал. Нас будут интересовать C^1-гладкие решения. При каждом $\varphi\colon [0, 1) \to I$ начальное условие

$$x(t) = \varphi(t) \quad \text{при} \quad t \in [0, 1) \tag{6}$$

определяет единственное решение $x_\varphi\colon R^+ \to I$ уравнения (1), которое можно построить по шагам, а именно,

$$x_\varphi(t) = (f^i \circ \varphi)(\alpha^{-i}(t)) \quad \text{при} \quad t \in \alpha^i([0, 1)), \quad i = 0, 1, \ldots, \tag{7}$$

где

$$\alpha(t) = qt + 1. \tag{8}$$

Здесь символом $\circ$ обозначена суперпозиция функций, $f^i = f \circ f^{i-1}$, $\alpha^i = \alpha \circ \circ\, \alpha^{i-1}$, $\alpha^{-i} = \alpha^{-1} \circ \alpha^{-(i-1)}$, где $i = 1, 2, \ldots$ и $f^0 = id$, $\alpha^0 = id$, α^{-1} — функция, обратная к α. Понятно, что

$$\alpha^i(t) = q^i t + \frac{q^i - 1}{q - 1} \quad \text{и} \quad \alpha^{-i}(t) = q^{-i} t - q^{-i}\frac{q^i - 1}{q - 1}, \qquad i = 0, 1, \ldots .$$

Из (7) следует, что решение x_φ является C^1-гладким всюду на R^+ тогда и только тогда, когда

$$\varphi \in \Phi_1 = \{\varphi \in C^1([0, 1), I)\colon\ \varphi(1-0) = f(\varphi(0)),$$
$$q\,\varphi'(1-0) = f'(\varphi(0)), \varphi'(0)\}. \tag{9}$$

1. При $q = 1$ уравнение (1) превращается в разностное уравнение

$$x(t+1) = f(x(t)), \qquad t \in R^+. \tag{10}$$

Асимптотическое поведение решений таких разностных уравнений изучалось достаточно детально в последние $10-20$ лет. Для уравнения (10) типичными являются решения двух видов [4 – 6]:

асимптотически постоянные решения;

асимптотически разрывные решения — ограниченные гладкие решения, не являющиеся равномерно непрерывными на всей полуоси R^+; как следствие, максимум производной на $[T, T+1]$ для такого решения уравнения (10) неограниченно возрастает при $T \to \infty$; при этом типичной является ситуация, когда и число колебаний решения на $[T, T+1]$ (с неубывающей к нулю амплитудой) также неограниченно возрастает при $T \to \infty$ (точное определение асимптотической разрывности будет дано в п. 3).

Естественно возникает вопрос: *могут ли решения q-разностного уравнения* (1) *наследовать отмеченные выше свойства решений разностного уравнения* (10)? Конечно, при относительно больших q это невозможно, о чем, в частности, свидетельствует следующая теорема.

Теорема 1. *Если*

$$q > \max_{x \in I} \left| \frac{d}{dx} f^m(x) \right|^{1/m} \quad \textit{для некоторого натурального } m, \tag{11}$$

то для любого C^1*-гладкого решения* x_φ *уравнения* (1) *справедливо соотношение*

$$x'_\varphi(t) \to 0 \quad \textit{при} \quad t \to +\infty. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть Υ — произвольный временной интервал $[t_1, t_2]$ и $L(\varphi, \Upsilon) = \max_{t \in \Upsilon} |x'_\varphi(t)|$. Обозначим правую часть неравенства в (11) через q^* и положим $q_f = q^*/q$; согласно условиям теоремы $q_f < 1$. Дифференцируя уравнение (1), находим

$$x'(\alpha(t)) = q^{-1} f'(x)|_{x = x(t)} x'(t)$$

и, следовательно,

$$x'(\alpha^i(t)) = q^{-i} \frac{d}{dx} f^i(x)|_{x = x(t)} x'(t) \quad \text{при} \quad i \geq 1. \tag{13}$$

Таким образом,

$$L(\varphi, \alpha^m(\Upsilon)) = \max_{t \in \alpha^m(\Upsilon)} |x'_\varphi(t)| =$$

$$= \max_{t \in \Upsilon} |x'_\varphi(\alpha^m(t))| = q^{-m} \max_{x \in \Upsilon} \left| \frac{d}{dx} f^m(x) \Big|_{x = x_\varphi(t)} x'_\varphi(t) \right| \leq$$

$$\leq q^{-m} \max_{x \in \Upsilon} \left| \frac{d}{dx} f^m(x) \right| \max_{t \in \Upsilon} |x'_\varphi(t)| = q_f^m L(\varphi, \Upsilon). \tag{14}$$

Если выбрать $t_2 = \alpha^m(t_1)$, то временные интервалы $\alpha^{mi}(\Upsilon)$ накрывают всю полуось $t \geq t_1$, а это позволяет заключить, что $x'_\varphi(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, поскольку при переходе от интервала $\alpha^{mi}(\Upsilon)$ к примыкающему к нему интервалу $\alpha^{m(i+1)}(\Upsilon)$ максимум производной уменьшается в q_f^m раз. Теорема доказана.

Заметим, что в условиях теоремы 1 решение x_φ не обязательно должно быть асимптотически постоянным. Наоборот, если у отображения f есть цикл периода > 1, то каждое решение x_φ, для которого интервал $\varphi([0, 1])$ пересекается с областью притяжения этого цикла, колеблется при $t \to \infty$ с неубывающей к нулю амплитудой. А именно, для любого достаточно малого $\delta > 0$ найдется $T > 0$ такое, что колебание решения x_φ на интервале $[T, \alpha(T)]$ будет не меньше, чем $\sigma - \delta$, где $\sigma = \min_{\gamma', \gamma'' \in \Gamma} |\gamma' - \gamma''|$ и Γ — упомянутый выше цикл отображения f. Действительно, пусть $\omega_f(x)$ обозначает ω-предельное множество точки $x \in I$ при отображении f; если для некоторого $t_* \in [0, 1)$ $\omega_f(\varphi(t_*)) \in \Gamma$, то ввиду (7) имеем

$$\lim_{i \to \infty} |x_\varphi(\alpha^{ni}(t_*)) - x_\varphi(\alpha^{ni+1}(t_*))| = |x_* - f(x_*)|,$$

где n — период цикла Γ и $x_* = \omega_{f^n}(\varphi(t_*))$.

Условие (11) является довольно ограничительным: неравенство в (11)не выполняется ни при каком целом $m > 0$ уже в том случае, когда отображение f имеет отталкивающий цикл, например $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$, мультипликатор которого $\mu(\Gamma) = |f'(\gamma_1) f'(\gamma_2) \ldots f'(\gamma_n)|^{1/n}$ больше q. Действительно, так как

$$q^{mn} < (\mu(\Gamma))^{mn} = \left|\frac{df^m(\gamma_1)}{dx}\frac{df^m(\gamma_2)}{dx}\ldots\frac{df^m(\gamma_n)}{dx}\right|, \quad m > 0, \tag{15}$$

то, каково бы ни было $m > 0$, найдется точка $\gamma_{i_m} \in \Gamma$ такая, что $\left|\dfrac{df^m(\gamma_{i_m})}{dx}\right|^{1/m} > q$.

Как будет показано ниже, при нарушении условия (11) уравнение (1) может иметь асимптотически разрывные решения, у которых на интервале $\alpha^i([0, 1])$ при $i \to \infty$ неограниченно возрастает не только максимум производной, но и число колебаний (с неубывающей к нулю амплитудой).

2. Для описания асимптотических свойств решений уравнения (1) нам потребуются некоторые понятия и результаты теории одномерных отображений.

Через $U_\varepsilon(t)$ будем обозначать ε-окрестность точки $t \in R^+$, а через $V_\delta(t)$ — δ-окрестность в I точки $x \in I$. Символом Lim будем обозначать топологический предел последовательности замкнутых множеств, а Li и Ls будем использовать для обозначения соответственно нижнего и верхнего топологического пределов (см., например, [7]). Положим

$$Q_f(x) = \bigcap_{\delta>0}\bigcap_{j>0}\overline{\bigcup_{i>j} f^i(V_\delta(x))},$$

$$D(f) = \{x \in I\colon\ \operatorname{int} Q_f(x) \neq \varnothing\} \quad \text{и} \quad \Omega_-(f) = \Omega(f) \bigcap D(f).$$

Множество $Q_f(x)$ называется *областью влияния точки* $x \in I$ при отображении f. Множество $D(f)$ называется *разделителем отображения* f и состоит из тех точек $x \in I$, траектории которых неустойчивы по Ляпунову при отображении f; если $x \notin D(f)$, то $Q_f(x)$ совпадает с ω-предельным множеством $\omega_f(x)$ точки x. Множество $\Omega(f)$ — это *множество неблуждающих точек отображения* f (т. е. $\Omega(f) := \{x \in I\colon$ для любого $\delta > 0$ существует $k > 0$ такое, что $f^k(V_\delta(x)) \cap V_\delta(x) \neq \varnothing\}$). Множества $Q_f(x)$, $D(f)$ и $\Omega_-(f)$ инвариантны.

Единственным ограничением на $f \in C^1(I, I)$ будет следующее:

$$f'(x) \neq 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{D(f)}. \tag{16}$$

Этому условию удовлетворяют, в частности, структурно устойчивые отображения, которые, как известно, плотны в $C^1(I, I)$. При выполнении (16)

множества $\Omega_-(f)$ и $D(f)$ замкнуты, нигде не плотны на I и связаны соотношением

$$D(f) = \bigcup_{i \geq 0} f^{-i}(\Omega_-(f));$$

множество $Q_f(x)$ для каждой точки $x \in I$ является либо циклом (тогда $Q_f(x) = \omega_f(x)$ и $\operatorname{int} Q_f(x) = \varnothing$), либо циклом интервалов (и тогда $\operatorname{int} Q_f(x) \neq \varnothing$), причем периоды $Q_f(x)$ при $x \in I$ ограничены в совокупности (напомним, что множество замкнутых интервалов $J_1, J_2, \ldots, J_n$ называется циклом интервалов периода n, если $f(J_i) = J_{i+1(\mathrm{mod}\, n)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $\operatorname{int} J_i \bigcap \operatorname{int} J_k = \varnothing$ при $i \neq k$).

Как следствие, для периодов областей влияния $Q_f(x)$ всех точек $x \in I$ су-

ществует (конечное) наименьшее общее кратное, которое будем обозначать p. При этом

$$Q_f(x) = \bigcup_{i=0}^{p-1} f^i(Q_{f^p}(x)) \quad \text{и} \quad Q_{f^p}(f(x)) = f(Q_{f^p}(x)), \qquad x \in I.$$

Положим

$$D(f, \varphi) = \{t \in [0,1]:\ \varphi(t) \in D(f)\},$$

$$\Phi(f) = \{\varphi \in \Phi_1:\ \text{если}\ D(f,\varphi) \neq \varnothing,\ \text{то}\ \varphi'(t) \neq 0\ \text{при}\ t \in D(f,\varphi)\}.$$

Очевидно, что множество $\Phi(f)$ плотно в Φ_1. В дальнейшем, не оговаривая это особо, всегда будем считать, что $\varphi \in \Phi(f)$.

Сначала отметим одно свойство уравнения (1), которое имеет место независимо от величины параметра $q \geq 1$ и выполнения условия (16).

Лемма 1. *Для любого решения* x_φ *при всех* $t \in [0, 1)$ *имеет место включение*

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \operatorname*{Ls}_{j \to \infty} \overline{x_\varphi(U_\varepsilon(\alpha^{jp+s}(t)))} \subset f^s(Q_{f^p}(\varphi(t))) \tag{17}$$

при всех целых $s, \quad 0 \leq s < p$.

Доказательство. Заменой переменных

$$x(t) = z(\theta(t)), \qquad \theta(t) = \tau, \quad \text{где} \quad \theta(t) = \frac{\ln(t + 1/(q-1))}{\ln q}, \tag{18}$$

уравнение (1) превращается в разностное уравнение

$$z(\tau+1) = f(z(\tau)), \qquad \tau \geq \tau_* = -\frac{\ln(q-1)}{\ln q}, \tag{19}$$

при этом

$$x_\varphi(t) = z_\varphi(\theta(t)), \qquad t \geq 0, \tag{20}$$

где z_φ — решение уравнения (19), удовлетворяющее начальному условию

$$z(\tau) = \varphi(\theta^{-1}(\tau)) \quad \text{при} \quad t \in [\tau_*, \tau_* + 1). \tag{21}$$

Поэтому при каждом $t_0 \in [0, 1)$ для любого $\varepsilon > 0$ и всех $i \geq 0$ имеют место соотношения

$$x_\varphi(U_\varepsilon(\alpha^i(t_0))) = (z_\varphi \circ \theta)(U_\varepsilon(\alpha^i(t_0))) = z_\varphi(U_{\varepsilon/q^i}(\tau_0 + i)) \subset$$

$$\subset z_\varphi(U_\varepsilon(\tau_0 + i)), \qquad \tau_0 = \theta(t_0). \tag{22}$$

Поскольку $\varphi'(\tau_0) \neq 0$, когда $\varphi(\tau_0) \in D(f)$, то, как известно из теории разностных уравнений,

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \operatorname*{Lim}_{j \to \infty} \overline{z_\varphi(U_\varepsilon(\tau_0 + jp + s))} = f^s(Q_{f^p}(z_0)),$$

$$s = 0, 1, \ldots, p-1, \quad \text{где} \quad z_0 = \varphi(t_0),$$

и тогда ввиду (22) и (21) при каждом целом s, $0 \leq s < p$, справедливы соотношения

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \operatorname{Ls}_{j\to\infty} \overline{x_\varphi(U_\varepsilon(\alpha^{jp+s}(t_0)))} \subset \bigcap_{\varepsilon>0} \operatorname{Ls}_{j\to\infty} \overline{z_\varphi(U_\varepsilon(\tau_0+jp+s))} =$$

$$= f^s(Q_{f^p}(z_0)) = f^s(Q_{f^p}(\varphi(t_0))),$$

что и доказывает лемму.

Лемму 1 можно доказывать и не прибегая к теории разностных уравнений. Мы воспользовались здесь именно таким подходом, поскольку в этом случае доказательство позволяет отразить соотношение между асимптотическими свойствами решений q-разностного и соответствующего разностного уравнений.

Лемма 1 позволяет полностью охарактеризовать поведение решения x_φ в окрестности точек $t_j = \alpha^{jp+s}(t)$, когда $t \notin D(f,\varphi)$. А именно, поскольку для $x \notin D(f)$ область влияния $Q_{f^p}(x)$ состоит из одной точки $(=\omega_{f^p}(x))$, то из леммы 1 сразу же вытекает следующее утверждение.

Следствие. *Для каждого решения x_φ уравнения* (1) *и любого $t \in$ $\in [0,1)\setminus D(f,\varphi)$ выполняется равенство*

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \operatorname{Lim}_{j\to\infty} \overline{x_\varphi(U_\varepsilon(\alpha^{jp+s}(t)))} = f^s(Q_{f^p}(\varphi(t))) \tag{23}$$

при всех целых s, $0 \le s < p$.

Равенство (23) означает, что если $t_* \notin D(f,\varphi)$, то график решения x_φ в достаточно малой окрестности точки $t_j = \alpha^{jp+s}(t_*)$, $0 \le s \le p-1$, „приближается" при $j\to\infty$ к горизонтальной прямой $\{x = c_*\}$, где $c_* =$ $= f^s(Q_{f^p}(\varphi(t_*)))$. Следовательно, решение x_φ является равномерно непрерывным на R^+ вне любой окрестности множества $\bigcup_{i\ge 0}\alpha^i(D(f,\varphi))$.

Таким образом, „под вопросом" остается поведение решений в окрестности точек $t_i = \alpha^{ip+s}(t_*)$, $0 \le s \le p-1$, для которых $t_* \in D(f,\varphi)$. Если условие (11) выполнено, то ответ дает теорема 1. В противном случае *a priori* не исключена возможность того, что при достаточно малых $q>1$ производная решения x_φ в точках t_i неограниченно возрастает при $i\to\infty$. Достаточным для реализации такой возможности является условие

$$q < \min_{x\in\Omega_-(f)} \left|\frac{d}{dx} f^m(x)\right|^{1/m} \quad \text{при некотором натуральном} \quad m. \tag{24}$$

Отметим, что (24) влечет неравенство

$$q < \mu(\Gamma) \quad \text{для любого неустойчивого цикла} \quad \Gamma \quad \text{отображения} \quad f. \tag{25}$$

Действительно, пусть $\Gamma = \{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n\}$ — неустойчивый цикл f. Из (24) следует, что $\left|\dfrac{df^m(\gamma_k)}{dx}\right| > q^m$, $k = 1, 2,\ldots, n$, и тогда в силу (15) находим $(\mu(\Gamma))^{mn} > q^{mn}$, что и доказывает (25).

Теорема 2. *Если условия* (16) *и* (24) *выполнены, то для любого решения x_φ уравнения* (1) *и каждого $t \in D(f,\varphi)$*

$$\lim_{i\to\infty} |x'_\varphi(\alpha^i(t))| = \infty \tag{26}$$

и, более того, справедливо равенство

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \operatorname*{Lim}_{j\to\infty} \overline{x_\varphi(U_\varepsilon(\alpha^{jp+s}(t)))} = f^s(Q_{f^p}(\varphi(t))) \tag{27}$$

при всех целых s, $0 \le s < p$.

Доказательство. Пусть $t_* \in D(f,\varphi)$. Ограничимся здесь простейшим случаем, когда $\varphi(t_*) := x_*$ принадлежит некоторому циклу Γ периода $n \vdots p$, для которого в силу условия (24) с необходимостью $\mu(\Gamma) > q$.

Далее нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть* Γ *— отталкивающий цикл отображения* f *периода* n *и* $\mu(\Gamma) > q > 1$. *Тогда для любой точки* $x^* \in \Gamma$ *имеет место соотношение*

$$\bigcap_{\delta>0} \operatorname*{Lim}_{j\to\infty} \overline{f^{jn}(V_{\delta/q^{jn}}(x^*))} = Q_{f^n}(x^*). \tag{28}$$

Доказательство. Положим

$$A_j(\delta) = f^{jn}(V_{\delta/q^{jn}}(x^*)).$$

Как известно [7], $\operatorname*{Ls}_{j\to\infty} A_j(\delta) = \bigcap_{j>0} \overline{\bigcup_{i>j} A_i(\delta)}$ и поэтому

$$\bigcap_{\delta>0} \operatorname*{Ls}_{j\to\infty} A_j(\delta) = \bigcap_{\delta>0}\bigcap_{j>0} \overline{\bigcup_{i>j} f^{in}(V_{\delta/q^{in}}(x^*))} \subset$$

$$\subset \bigcap_{\delta>0}\bigcap_{j>0} \overline{\bigcup_{i>j} f^{jn}(V_\delta(x^*))} = Q_{f^n}(x^*). \tag{29}$$

Рассмотрим $\operatorname*{Li}_{j\to\infty} A_j(\delta)$. Покажем, что существует $\delta_* > 0$ такое, что при $\delta < \delta_*$ для любого $\eta > 0$ найдется $N > 0$ с тем свойством, что

$$V_\eta(A_j(\delta)) \supset Q_{f^n}(x^*), \quad \text{когда} \quad j > N. \tag{30}$$

Положим

$$q_0 = \frac{1}{2}(\mu(\Gamma) + q)$$

и тогда

$$\mu(\Gamma) > q_0 > q. \tag{31}$$

Выберем в качестве δ_* наибольшее значение $\delta > 0$, при котором

$$\min_{x\in V_\delta(x^*)} \left|\frac{d}{dx} f^n(x)\right| > q_0^n; \tag{32}$$

такое $\delta_* > 0$ всегда существует ввиду непрерывности f' и соотношения $\left|\frac{d}{dx} f^n(x^*)\right| = (\mu(\Gamma))^n > q_0^n$, которое вытекает из (31). Из (32) и (31) следуют включения

$$f^n(V_\delta(x^*)) \supset V_{q_0^n\delta}(x^*) \supset V_{q^n\delta}(x^*) \quad \text{при} \quad \delta < \delta_*. \tag{33}$$

Чтобы выбрать N, воспользуемся следующим фактом. Во-первых, в силу определения $Q_{f^n}(x)$ для любого η найдется $N_* > 0$ такое, что

$$Q_{f^n}(x^*) \subset V_\eta(f^{nN_*}(V_\delta(x_*))), \quad \text{если} \quad \delta < \delta_*. \tag{34}$$

Во-вторых, так как $q < q_0$, то всегда найдется $N_0 > 0$ такое, что

$$q^{n(N_*+N_0)} < q_0^{nN_0}. \tag{35}$$

Положим $N = N_* + N_0$.

Тода при $\delta < \delta_*$ и $j > N$ вследствие (33) и (35) имеют место включения

$$A_j(\delta) := f^{jn}(V_{\delta/q^{jn}}(x^*)) \supset \ldots \supset f^{nN}(V_{\delta/q^{nN}}(x^*)) \supset$$
$$\supset f^{n(N_*+N_0)}(V_{\delta/q_0^{nN_0}}(x^*)) \supset f^{nN_*}(V_\delta(x^*)),$$

которые в силу (34) влекут (30). Из (30), в свою очередь, следует, что

$$\bigcap_{\delta>0} \operatorname*{Li}_{j\to\infty} A_j(\delta) \supset Q_{f^n}(x^*). \tag{36}$$

Из (29) и (36) находим

$$\bigcap_{\delta>0} \operatorname*{Ls}_{j\to\infty} A_j(\delta) \subset Q_{f^n}(x^*) \subset \bigcap_{\delta>0} \operatorname*{Li}_{j\to\infty} A_j(\delta),$$

откуда и вытекает (28).

Продолжим доказательство теоремы 2.

1. Для любого $i \geq 0$ обозначим через l_i целую часть числа i/n и положим $r_i = i - nl_i$ (понятно, что $0 \leq r_i < n$). Тогда (13) принимает вид

$$x'_\varphi(\alpha^i(t_*)) = q^{-i} \frac{d}{dx} f^{nl_i}(x_{**}) \frac{d}{dx} f^{r_i}(x_*) \varphi'(t_*), \quad \text{где} \quad x_{**} = f^{r_i}(x_*). \tag{37}$$

Заметим, что

$$\left|\frac{d}{dx} f^n(x_*)\right|^{1/n} = |f'(x_*) f'(f(x_*)) \ldots f'(f^{n-1}(x_*))|^{1/n} = \mu(\Gamma). \tag{38}$$

Поэтому

$$\left|\frac{d}{dx} f^{nl_i}(x_{**})\right| = \prod_{j=0}^{l_i} \left|\frac{d}{dx} f^n(x)\big|_{x=f^{jn}(x_{**})}\right| = (\mu(\Gamma))^{nl_i},$$

и тогда из (37) находим

$$|x'_\varphi(\alpha^i(t_*))| = q^{-(nl_i+r_i)}(\mu(\Gamma))^{nl_i} \left|\frac{d}{dx} f^{r_i}(x_*) \varphi'(t_*)\right| \geq q_\Gamma^{nl_i} M_\varphi, \tag{39}$$

где

$$q_\Gamma = \frac{\mu(\Gamma)}{q} \quad \text{и} \quad M_\varphi = |\varphi'(t_*)| \min_{0\leq r\leq n-1} q^{-r} \left|\frac{d}{dx} f^r(x)\big|_{x=\varphi(t_*)}\right|.$$

Так как в силу условий теоремы $q_\Gamma > 1$ и $M_\varphi \neq 0$, то из (39) заключаем, что $|x'_\varphi(\alpha^i(t_*))| \to \infty$ при $i \to \infty$. Соотношение (26) доказано.

2. Докажем равенство (27). В силу соотношений (7)

$$x_\varphi(U_\varepsilon(\alpha^{jn+s}(t_*))) = (f^{jn+s} \circ \varphi \circ \alpha^{-jn-s})(U_\varepsilon(\alpha^{jn+s}(t_*))) =$$
$$= (f^{jn} \circ f^s \circ \varphi)(U_{\varepsilon/q^{jn+s}}(t_*)).$$

Поскольку $\varphi'(t_*) \neq 0$ по условиям теоремы и $f'(x) \neq 0$ при $x \in \Gamma$, а

$$(f^r \circ \varphi)(t_*) = f^r(x_*) := x_*^r \in \Gamma \quad \text{при} \quad r > 0,$$

то

$$\frac{d}{dt}(f^s \circ \varphi)(t_*) = \varphi'(t_*) \prod_{r=0}^{s-1} f'(x_*^r) \neq 0.$$

Следовательно, существует $\varepsilon_* > 0$ такое, что $\frac{d}{dt}(f^s \circ \varphi)(t) \neq 0$ при $t \in U_{\varepsilon_*}(t_*)$. Тогда для любого $\varepsilon \le \varepsilon_*$ справедливы включения

$$V_{\sigma_* \varepsilon / q^{jn}}(x_*^s) \subset (f^s \circ \varphi)(U_{\varepsilon/q^{jn+s}}(t_*)) \subset V_{\sigma^* \varepsilon / q^{jn}}(x_*^s), \tag{40}$$

где

$$\sigma_* = q^{-s} \min_{t \in U_{\varepsilon_*}(t_*)} \left|\frac{d}{dt}(f^s \circ \varphi)(t)\right| \quad \text{и} \quad \sigma^* = q^{-s} \max_{t \in U_{\varepsilon_*}(t_*)} \left|\frac{d}{dt}(f^s \circ \varphi)(t)\right|.$$

Так как $x_*^s \in \Gamma$, то согласно лемме 1 заключаем, что

$$\bigcap_{\delta > 0} \operatorname*{Lim}_{j \to \infty} \overline{f^{jn}(V_{\delta/q^{jn}}(x_*^s))} = Q_{f^n}(x_*^s) = Q_{f^n}(f^s(x_*)).$$

Отсюда ввиду (40) непосредственно следует, что для всех целых s, $0 \le s \le n - 1$, имеют место равенства

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \operatorname*{Lim}_{j \to \infty} \overline{x_\varphi(U_\varepsilon(\alpha^{jn+s}(t_*)))} = Q_{f^n}(f^s(x_*)) = f^s(Q_{f^n}(x_*)). \tag{41}$$

А значит, (27) справедливо и подавно, поскольку n является делителем p. Теорема доказана.

Отметим, что для точек $x^* \in \Omega_-(f)$ множество $Q_{f^p}(x^*)$ — невырожденный замкнутый интервал. Это означает, что в условиях теоремы 2 каждая начальная функция φ, для которой $D(f, \varphi) \neq \varnothing$, определяет решение x_φ, график которого в окрестности точек $t_j = \alpha^{jp+s}(x_*)$, $t_* \in D(f, \varphi)$, $0 \le s \le p-1$, „приближается" при $j \to \infty$ к вертикальному отрезку $\{t_j\} \times I_*$, где $I_* = Q_{f^p}(f^s(\varphi(t_*)))$ (строгая формулировка этого факта будет дана в п. 3). Следовательно, решение x_φ не является равномерно непрерывным $\Big($в окрестности множества $\bigcup_{i \ge 0} \alpha^i(D(f, \varphi))\Big)$.

Проверка условия (24) представляется, вообще говоря, довольно затруднительной. Поэтому при анализе асимптотических свойств решений полезным оказывается следующий факт, который имеет место независимо от выполнения условий (16), (24) и вытекает из доказательства теоремы 2.

Теорема 3. *Если Γ — отталкивающий цикл отображения f с мультипликатором $\mu(\Gamma) > q$ и для начальной функции φ существуют точка $t_* \in [0, 1)$ и целое $k \ge 0$ такие, что*

$$f^k(\varphi(t_*)) \in \Gamma \quad \text{и} \quad \frac{d}{dx} f^k(x)\Big|_{x=\varphi(t_*)} \neq 0, \tag{42}$$

то для решения x_φ уравнения (1)

$$\lim_{i \to \infty} |x'_\varphi(\alpha^i(t_*))| = \infty$$

и

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \operatorname*{Lim}_{j \to \infty} \overline{x_\varphi(U_\varepsilon(\alpha^{jn+s}(t_*)))} = Q_{f^n}(f^s(x_*)), \tag{43}$$

$$s = 0, 1, \ldots, n, \qquad n \text{ — \textit{период} } \Gamma.$$

3. Если условие (24) выполнено, то все решения x_φ уравнения (1), для которых $\varphi \in \Phi(f)$ и $D(f, \varphi) \neq \varnothing$, будучи гладкими и ограниченными, не имеют свойства равномерной непрерывности на всей полуоси R^+. Начальные функции, порождающие такие решения, если их (функции) продолжить на замкнутый интервал $[0, 1]$ с помощью условий согласования (9), образуют в пространстве $C^1([0, 1], I)$ множество второй категории, если только отображение f имеет внутреннюю отталкивающую неподвижную точку. Описать асимптотическое поведение упомянутых выше решений уравнения (1) можно таким же образом, как и в случае разностного уравнения (10), — вкладывая пространство $C^1(R^+, I)$ в пространство полунепрерывных сверху функций $SC(R^+, 2^I)$, наделенное метрикой

$$\Delta_\Upsilon(\xi_1, \xi_2) = \operatorname{dist}_H(\operatorname{gr}_\Upsilon \xi_1, \operatorname{gr}_\Upsilon \xi_2), \tag{44}$$

где dist_H — расстояние Хаусдорфа между множествами, а $\operatorname{gr}_\Upsilon \xi$ — график функции $\xi(t)$ при $t \in \Upsilon$, Υ — замкнутое множество из R^+. Сходимость на некотором множестве Υ последовательности ξ_i к ξ_0 в метрике (44) эквивалентна, как известно (см., например, [7]), тому, что

$$\operatorname*{Lim}_{i \to \infty} \operatorname{gr}_\Upsilon \xi_i = \operatorname{gr}_\Upsilon \xi_*.$$

Будем говорить, что асимптотически разрывная непрерывная функция $z: R^+ \to I$ стремится при $t \to \infty$ к разрывной полунепрерывной сверху функции $\mathcal{P}: R^+ \to 2^I$, если

$$\Delta_{[T, T+1]}(z, \mathcal{P}) \to 0 \quad \text{при} \quad T \to \infty, \tag{45}$$

а саму функцию $\mathcal{P}$ в этом случае будем называть *предельной* для функции z.

Теорема 4. *Пусть условия* (16) *и* (24) *выполнены. Тогда каждое решение* x_φ *уравнения* (1), *для которого* $D(f, \varphi) \neq \varnothing$, *является асимптотически разрывным и имеет предельную функцию*

$$\mathcal{P}_\varphi(t) = f^{i (\operatorname{mod} p)}(Q_{f^p}(\varphi(\alpha^{-i}(t)))), \tag{46}$$

$$\textit{когда} \quad t \in \alpha^i([0, 1]), \quad i = 0, 1, \ldots;$$

функция $\mathcal{P}_\varphi$ *имеет свойство* $\mathcal{P}_\varphi(\alpha(t)) = \mathcal{P}_\varphi(t)$, $t \in R^+$.

Теорема 4 вытекает из следствия, теоремы 2 и следующей леммы.

Лемма 3. *Пусть* $\xi_i \in C([0, 1], I)$, $i = 1, 2, \ldots$. *Если для каждого* $t \in [0, 1]$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\operatorname*{Lim}_{i \to \infty} \overline{\xi_i(U_\varepsilon(t))}$, *то*

$$\operatorname*{Lim}_{i \to \infty} \operatorname{gr} \xi_i = \{(t, x\} \in [0, 1] \times I: x \in G_t\},$$

где $G_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \operatorname*{Lim}_{i \to \infty} \overline{\xi_i(U_\varepsilon(t))}$.

Лемма 3 доказывается путем непосредственной проверки включения

$$\operatorname*{Ls}_{i \to \infty} \operatorname{gr} \xi_i \subset G \subset \operatorname*{Li}_{i \to \infty} \operatorname{gr} \xi_i, \quad \text{где} \quad G = \{(t, x\} \in [0, 1] \times I: x \in G_t\}.$$

Доказательство теоремы 4. Согласно следствию и теореме 2, для каждого $t \in [0, 1]$ справедливо соотношение

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \operatorname*{Lim}_{j\to\infty} \overline{x_\varphi(U_\varepsilon(\alpha^{jp+s}(t)))} = f^s(Q_{f^p}(\varphi(t)))$$

при всех целых s, $0 \le s < p$.

Тогда в силу леммы 3 и определения функции $\mathcal{P}_\varphi$ заключаем, что

$$\operatorname*{Lim}_{j\to\infty} \mathrm{gr}_{[0,1]}\, x_\varphi(\alpha^{jp+s}(t)) = \mathrm{gr}_{[0,1]}\, \mathcal{P}_\varphi(\alpha^s(t)),$$

откуда, в свою очередь, следует, что

$$\Delta_{[0,1]}(x_\varphi \circ \alpha^{jp+s}, \mathcal{P}_\varphi \circ \alpha^s) \to 0 \tag{47}$$

при $j \to \infty$ и всех целых s, $0 \le s < p$.

И поскольку

$$\Delta_{[0,1]}(x_\varphi \circ \alpha^{jp+s}, \mathcal{P}_\varphi \circ \alpha^s) = \Delta_{[0,1]}(x_\varphi \circ \alpha^{jp+s}, \mathcal{P}_\varphi \circ \alpha^{jp+s}) =$$

$$= \Delta_{\alpha^{jp+s}([0,1])}(x_\varphi, \mathcal{P}_\varphi), \tag{48}$$

а интервалы $\alpha^{jp+s}([0,1])$, $s = 0, 1, \ldots, p-1$, $j = 0, 1, \ldots$, накрывают всю полуось R^+, то из (47) и (48) следует, что

$$\Delta_{[T,T+1]}(x_\varphi, \mathcal{P}_\varphi) \to 0 \quad \text{при} \quad T \to \infty,$$

что и доказывает теорему.

4. В качестве примера рассмотрим уравнение

$$x(qt+1) = \lambda x(t)(1 - x(t)), \qquad q > 1, \quad 3 < \lambda \le 4. \tag{49}$$

Нелинейность в правой части (49) задается весьма популярным и хорошо изученным квадратичным отображением

$$f_\lambda\colon x \mapsto \lambda x(1-x), \qquad x \in R. \tag{50}$$

Нас будут интересовать свойства ограниченных C^1-гладких решений уравнения (49). Так как интервал $[0,1]$ — это наибольший ограниченный инвариантный интервал отображения (50) (когда $1 \le \lambda \le 4$), то такие решения генерируются начальными функциями $\varphi\colon [0,1) \to [0,1]$, удовлетворяющими условиям согласования (9). Далее будем называть эти начальные функции допустимыми.

Отображение (50) имеет две неподвижные точки: $\beta_1 = 0$ и $\beta_2 = 1 - 1/\lambda$. Им соответствуют два стационарных решения уравнения (49): $x(t) \equiv 0$ и $x(t) \equiv 1 - 1/\lambda$.

Обе неподвижные точки при $3 < \lambda \le 4$ являются отталкивающими: $\mu(\beta_1) = \lambda$ и $\mu(\beta_2) = \lambda - 2$. Поэтому любая начальная функция, не равная тождественно 0 или $1 - 1/\lambda$, порождает решение, колеблющееся между $f^{\max} = \lambda/4$ и $f^{\min} = f_\lambda(f^{\max}) = \lambda^2(4-\lambda)/16$.

Так как $\max\limits_{x\in[0,1]} |f'_\lambda(x)| = \lambda$, то согласно теореме 1 при $q > \lambda$ $x'_\varphi(t) \to 0$ при $t \to \infty$, какова бы ни была начальная функция φ.

Как будут себя вести решения при $q \le \lambda$? Остановимся подробнее на случае $3 < \lambda < 1 + \sqrt{6}$, когда отображение (50) имеет притягивающий цикл Γ периода 2, образуемый точками $\gamma_{1,2} = \left(\lambda + 1 \mp \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda - 3}\right) \big/ 2\lambda$ (с мультипликатором $\mu(\Gamma) = \sqrt{|\lambda^2 - 2\lambda - 4|}$) и не имеет других периодических точек. В этом случае:

множество $\Omega_{-}(f_\lambda)$ неустойчивых неблуждающих точек состоит из двух неподвижных точек β_1 и β_2 и только;

цикл $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ притягивает все точки интервала $[0, 1]$ за исключением замкнутого множества $D(f_\lambda) = \{f_\lambda^{-i}(\beta_2),\ i \geq 0\} \cup \{0, 1\}$, при этом $f_\lambda'(x) \neq 0$ при $x \in D(f_\lambda)$;

область влияния $\mathcal{Q}_{f_\lambda}(x)$ для точек $x \in D(f_\lambda)$ — это невырожденные (замкнутые) интервалы:

$$\Omega_{f_\lambda}(x) = \begin{cases} \left[0, f_\lambda\left(\frac{1}{2}\right)\right], & \text{если } x = 0 \text{ или } x = 1; \\ \left[f_\lambda^2\left(\frac{1}{2}\right), f_\lambda\left(\frac{1}{2}\right)\right], & \text{если } x \in D(f_\lambda) \setminus \{0, 1\}, \end{cases}$$

а для $x \notin D(f_\lambda)$ — это пара точек $\{\gamma_1, \gamma_2\}$, образующих цикл;

наименьшее общее кратное p периодов областей влияния $\mathcal{Q}_{f_\lambda}(x)$ точек $x \in [0, 1]$ равно 2.

Теоремы $1-4$ позволяют сделать следующие выводы о свойствах решений уравнения (49).

Доопределим $\varphi(t)$ в точке $t = 1$ с помощью условий (9) и будем обозначать через $\tilde{\varphi}$ те допустимые начальные функции, которые принадлежат $\Phi(f_\lambda)$; это, в частности, предполагает, что $\tilde{\varphi}([0,1]) \subset (0, 1)$ и $\tilde{\varphi}(t) \not\equiv 1 - 1/\lambda$.

1. Если $q > \lambda - 2$, то ввиду теоремы 1 каждое решение $x_{\tilde{\varphi}}$ имеет свойство: $x_{\tilde{\varphi}}'(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и, следовательно, равномерно непрерывно на всей полуоси R^+.

2. Если же $q < \lambda - 2$, то ситуация прямо противоположная: все решения $x_{\tilde{\varphi}}$ являются асимптотически разрывными. Действительно, из свойств отображения (50) вытекает, что

$$D(f_\lambda, \tilde{\varphi}) = \{t \in [0, 1]\colon\ \omega_{f_\lambda}(\tilde{\varphi}(t)) = \{\beta_2\}\}$$

и, следовательно, $D(f_\lambda, \tilde{\varphi})$ непусто и конечно;

$$\mathcal{Q}_{f_\lambda}(\tilde{\varphi}(t)) = \left[f_\lambda^2\left(\frac{1}{2}\right), f_\lambda\left(\frac{1}{2}\right)\right] \quad \text{для} \quad t \in D(f_\lambda, \tilde{\varphi});$$

$$\mathcal{Q}_{f_\lambda}(\tilde{\varphi}(t)) = \omega_{f_\lambda}(\tilde{\varphi}(t)) = \{\gamma_1, \gamma_2\} \quad \text{для} \quad t \in [0, 1] \setminus D(f_\lambda, \tilde{\varphi}).$$

Согласно теореме 2, каждое решение $x_{\tilde{\varphi}}$ является асимптотически разрывным и, ввиду теоремы 4, стремится к предельной функции

$$\mathcal{P}_{\tilde{\varphi}}(t) = \begin{cases} P_{\tilde{\varphi}}(\alpha^{-2i}(t)), & \text{если } t \in \alpha^{2i}([0, 1)); \\ f(P_{\tilde{\varphi}}(\alpha^{-2i-1}(t))), & \text{если } t \in \alpha^{2i+1}([0, 1)), \quad i = 0, 1, \ldots, \end{cases}$$

где $P_{\tilde{\varphi}}\colon [0, 1] \to 2^{[0, 1]}$ — разрывная полунепрерывная сверху функция, задаваемая выражением

$$P_{\tilde{\varphi}}(t) = \begin{cases} \gamma_i, & \text{если} \quad \omega_{f_\lambda^2}(\tilde{\varphi}(t)) = \{\gamma_i\}, \quad i = 1, 2; \\ \left[f_\lambda^2\left(\frac{1}{2}\right), f_\lambda\left(\frac{1}{2}\right)\right], & \text{если} \quad \omega_{f_\lambda}(\tilde{\varphi}(t)) = \{\beta_2\}. \end{cases}$$

Мы не будем здесь детально останавливаться на анализе уравнения (49), когда $1 + \sqrt{6} < \lambda < 4$. Отметим лишь, что при переходе параметра λ через бифуркационное значение $\lambda = 1 + \sqrt{6}$ цикл периода 2 становится отталкивающим и при этом рождается новый притягивающий цикл периода 4; при дальнейшем увеличении λ вплоть до значения $\lambda = 4$ возникают все новые и новые циклы, при этом появление притягивающих циклов новых периодов подчиняется известному универсальному порядку [8] (но при каждом значении λ имеется не более одного притягивающего цикла).

Такое усложнение динамики отображения (50) естественно влечет и более сложное поведение решений уравнения (49), если (24) имеет место. В частности, с ростом λ множество $D(f_\lambda, \tilde{\varphi})$ сначала становится счетным, а затем и несчетным; это приводит к тому, что на множестве значений параметра, состоящем из тех значений λ, при которых выполняется условие (16), и содержащем открытое, плотное на интервале $(3, 4]$ множество, каждое решение $x_{\tilde{\varphi}}$, для которого $\tilde{\varphi}$ отлично от 0 и $1 - 1/\lambda$, стремится к полунепрерывной сверху предельной функции с бесконечным множеством точек разрыва на $[0, 1]$, и следовательно, число колебаний $x_{\tilde{\varphi}}$ на интервале $\alpha^i([0, 1])$ неограниченно возрастает при $i \to \infty$ (как степенная функция при $\lambda < \lambda_* \approx 3{,}569$ (в этом случае отображение (50) имеет циклы только периодов 2^i, $i = 0, 1, \ldots, l$, $l < \infty$), а затем при $\lambda > \lambda_*$ — экспоненциально).

При изменении параметра λ от $1 + \sqrt{6}$ до 4 встречаются значения λ, при которых условие (16) не выполняется и теоремы 2 и 4, вообще говоря, „не работают”. В этом случае (как, впрочем, и во многих других) при исследовании асимптотически разрывных решений уравнения (49) часто оказывается полезной теорема 3. Правда, при этом возникают некоторые „тонкости”, когда условие (16) не выполняется.

Такая ситуация имеет место, например, при $\lambda = 4$, когда точка $x = 1/2$, в которой всегда $f'_\lambda(1/2) = 0$, принадлежит множеству $D(f_\lambda)$. Что можно сказать в этом случае о решениях? При $\lambda = 4$ точки циклов отображения (50), как известно, заполняют плотно интервал $[0, 1]$ и, следовательно, $D(f_\lambda)$ совпадает со всем интервалом $[0, 1]$. За исключением неподвижной точки $x = 0$, для которой мультипликатор равен 4, для любого цикла мультипликатор равен 2 (поскольку при $\lambda = 4$ отображение f_λ с помощью $h(x) = \sin^2 \pi t$ гладко сопрягается на множестве $(0, 1) \setminus \{1 \setminus 2\}$ с „tent”-отображением $g(x) = 1 - 2|x - 1/2|$, у которого мультипликаторы всех циклов равны 2). Для каждой точки $x \in [0, 1]$ $Q_{f_\lambda}(x) = [0, 1]$.

Известно также, что отображение f_λ с $\lambda = 4$ за конечное число итераций „растягивает” любой невырожденный подынтервал из $[0, 1]$ на весь интервал $[0, 1]$ и, в частности, „накрывает” наподвижную точку $x = 0$, для которой мультипликатор равен 4. Поэтому, имея в виду теорему 3, можно было бы предположить, что уже при $q < 4$ уравнение (49) имеет гладкие, но асимптотически разрывные решения. Однако это не так, если $q > 2$. Чтобы показать это, воспользуемся тем, что любое ограниченное решение x_φ уравнения (49) с

$\lambda = 4$ (т. е. решение, порождаемое начальной функцией $\varphi: [0, 1) \to [0, 1]$) можно представить в виде (см. для сравнения [9, 10]):

$$x_\varphi(t) = \sin^2\left[(\tau(t))^{\ln 2/\ln q} B_\varphi\left(\frac{\ln\tau(t)}{\ln q}\right)\right], \tag{51}$$

где $\tau(t) = t + \dfrac{1}{q-1}$ и $B_\varphi: [\theta_*, \infty) \to R$ — периодическая функция периода 1, задаваемая формулой

$$B_\varphi(\theta) = 2^{-(\theta_* + \langle\theta-\theta_*\rangle)} \arcsin\sqrt{\varphi\left(\frac{q^{\langle\theta-\theta_*\rangle}-1}{q-1}\right)}, \quad \theta_* = -\frac{\ln(q-1)}{\ln q}, \tag{52}$$

и $\langle\cdot\rangle$ обозначает дробную часть числа. Для допустимых (т. е. удовлетворяющих условиям гладкого согласования (9)) начальных функций, дифференцируя (51), находим

$$x'_\varphi(t) = (\tau(t))^{-1+\ln 2/\ln q}\, \eta_\varphi\left(\frac{\ln\tau(t)}{\ln q}\right), \tag{53}$$

где

$$\eta_\varphi(\theta) = \frac{1}{\ln q}\left[B_\varphi(\theta)\ln 2 + B'_\varphi(\theta)\right]\sin\left[2^{1+\theta} B_\varphi(\theta)\right].$$

Можно показать, что функция η_φ ограничена. Поэтому из (53) вытекает, что $x'_\varphi(t) \to 0$ при $t \to \infty$ для каждой начальной функции $\varphi: [0, 1) \to \to [0, 1]$, если только $q > 2$, а это противоречит тому, что можно было ожидать при $q < 4$.

Такая ситуация объясняется тем, что для любой функции $\varphi: [0, 1) \to \to [0, 1]$, не равной тождественно константе, найдутся точка $t_0 \in [0, 1)$ и целое $k \geq 2$ такие, что $f_\lambda^k(\varphi(t_0)) = 0$. Но тогда $f_\lambda^{k-2}(\varphi(t_0)) = 1/2$ и, следовательно,

$$\frac{d}{dt} f_\lambda^k(\varphi(t))\Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dx} f_\lambda^2(x)\Big|_{x=1/2} \frac{d}{dx} f_\lambda^{k-2}(x)\Big|_{x=\varphi(t_0)} \varphi'(t_0) = 0,$$

поскольку $\dfrac{d}{dx} f_\lambda^r(x)\Big|_{x=1/2} = 0$ при $r \geq 1$. Таким образом, хотя каждая допустимая начальная функция обязательно „садится" на какой-либо прообраз неподвижной точки $x = 0$, т. е. первое из условий (42) всегда выполняется, функция φ в любом случае не удовлетворяет второе из условий (42), так что и теорема 3 оказывается неприменимой.

Что можно сказать о решении уравнения (49), когда $q \leq 2$? В случае $q = 2$ ограниченные решения уравнения (49) с $\lambda = 4$ описываются формулой

$$x_\varphi(t) = \sin^2\left[(t+1) B_\varphi\left(\frac{\ln(t+1)}{\ln 2}\right)\right],$$

и, следовательно, для допустимых начальных функций φ все решения x_φ, отличные от констант 0 и $3/4$, имеют производную, не убывающую к нулю при $t \to +\infty$, хотя и ограниченную.

Когда же $q < 2$, то, как видно из (53), $\max\limits_{t\in[0,T]} |x'_\varphi(t)| \to \infty$ при $T \to \infty$. Более того, значения $t_* \in [0, 1)$, для которых $|x'_\varphi(\alpha^i(t_*))| \to \infty$ при $i \to \infty$, лежат на $[0, 1)$ всюду плотно, какова бы ни была начальная функция φ, не равная константе ни на каком подынтервале из $[0, 1]$. Это — следствие того, что при $\lambda = 4$, как уже отмечалось, точки циклов отображения (50), мультипликаторы которых равны 2, лежат плотно на $[0, 1]$ и, следовательно, значения $t_* \in [0, 1)$, для которых $\varphi(t_*)$ попадает на какой-либо из таких циклов, также заполняют плотно начальный интервал $[0, 1)$. Остается воспользоваться теоремой 3. Можно еще добавить, что имеет место и предельное соотношение (43), а именно,

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \operatorname*{Lim}_{i \to \infty} \overline{x_\varphi(U_\varepsilon(\alpha^i(t_*)))} = [0, 1]. \tag{54}$$

Вместе с тем для любой такой начальной функции φ на $[0, 1)$ лежат плотно значения t_0, при которых точка $x_0 = \varphi(t_0)$ за конечное число итераций попадает в неподвижную точку $x = 0$. Для каждого такого t_0 $x'_\varphi(\alpha^i(t_0)) = 0$, начиная с некоторого i, и, тем не менее, соотношение (54) остается справедливым, если в (54) t_* заменить на t_0.

Мы не будем здесь останавливаться на доказательстве этого факта, который можно рассматривать как аналог теоремы 3 применительно к уравнению (49) с $\lambda = 4$ и который является частным случаем общего утверждения о соотношении между q и мультипликатором отталкивающего цикла (на который решение „наталкивается"), гарантирующего выполнение (43) в случае, когда второе из условий (42) не имеет места. Отметим лишь, что в рассматриваемом примере важно, чтобы мультипликатор точки $x = 0$ (равный 4) был больше, чем q^2. Эта особенность в поведении решений, а также большинство рассмотренных в данной работе свойств уравнения (1) более детально (в частности, с доказательством теоремы 2 в общем случае) исследуются в работе [11].

1. *Jackson F. M.* q-Difference equations // Amer. J. Math. – 1910. – **32**. – P. 305–314.
2. *Carmichael R. D.* The general theory of linear q-difference equations // Ibid. – 1912. – **34**. – P. 147–168.
3. *Birkhoff G. D.* The generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations // Proc. Amer. Acad. Arts and Sci. – 1913. – **49**. – P. 521–568.
4. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1986. – 280 с. (Англ. перевод: Difference equations and their applications // Ser. Math. and its Appl. – Kluwer Acad. Publ., 1993. – **250**. – 358 p.)
5. *Романенко О. Ю., Шарковський О. М.* Від одновимірних до нескінченновимірних динамічних систем: ідеальна турбулентність // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 12. – С. 1604–1627. (Англ. перевод: Ukr. Math. J. – 1996. – **48**, № 12. – P. 1817–1842.)
6. *Romanenko E.* On attractors of continuous difference equations // Computers Math. Appl. – 1998. – **36**, № 10–12. – P. 377–390.
7. *Куратовский К.* Топология: В 2 т. – М.: Мир, 1966. – Т. 1. – 594 с.
8. *Шарковский А. Н.* Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // Укр. мат. журн. – 1996. – **16**, № 1. – С. 61–70. (Англ. перевод: Coexistence of cycles of continuous transformation of the straight line into self // Int. J. Bifurcation and Chaos. – 1995. – **5**, № 5. – P. 1263–1273, and Thirty years after Sharkovskii's theorem: New perspectives (Proc. Conf.). – World Sci., 1995. – P. 1–11.)
9. *Шарковский А. Н.* Характеризация косинуса // Aequat. math. – 1973. – **9**, № 2. – P. 121–128.
10. *Пелюх Г. П., Шарковский А. Н.* Введение в теорию функциональных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1974. – 120 с.
11. *Derfel G., Romanenko E., Sharkovsky A.* Long time properties of solutions for simplest q-difference equations // J. Different. Equat. and Appl. – 2000. – **6**, № 5. – P. 485–511.

Получено 14.12.99