УДК 517.5

Вит. В. Волчков (Донецк. ун-т)

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НАД ПОЛЕМ ТЕЙТА

We obtain conditions of the equivalence of some differential operators in spaces of analytic functions over the Tate field.

Одержано умови еквівалентності деяких диференціальних операторів у просторах аналітичних функцій над полем Тейта.

1. Введение. Пусть L_i, $i = 1, 2$, — топологические векторные пространства (ТВП) над полем K, A и B — линейные непрерывные операторы, отображающие соответственно пространства L_1 и L_2 в себя. Операторы A и B называются эквивалентными ($A \sim B$), если существует изоморфизм T пространства L_1 на L_2 такой, что $TA = BT$. Этот изоморфизм T называется оператором преобразования A в B. Очевидным свойством оператора T является равенство

$$T(\operatorname{im} A) = \operatorname{im} B, \tag{1}$$

где $\operatorname{im} A$, $\operatorname{im} B$ — области значений операторов A и B соответственно. Отметим, что если $L_1 = L_2$ и $A = B$, то речь идет об операторах T, коммутирующих в L_1 с A.

Многие авторы изучали условия эквивалентности дифференциальных операторов в пространстве аналитических функций над полем комплексных чисел (см., например, [1, 2] и приведенную в них библиографию). В данной статье рассматриваются аналогичные вопросы для полей с неархимедовой нормой. Здесь возникают новые эффекты. В отличие от комплексного случая, серьезные трудности вызывает тот факт, что экспонента не является целой функцией [3, с. 123]. С другой стороны, отсутствие целых функций без нулей, кроме тождественной постоянной, упрощает ситуацию в отдельных случаях.

Теорема 1 данной работы имеет вспомогательный характер и содержит необходимые в дальнейшем сведения. Утверждение теоремы 2 является неархимедовым аналогом известного результата М. Г. Хапланова [4] о матричном описании операторов в пространствах аналитических функций над полем $\mathbb{C}$. В теореме 3 содержатся условия эквивалентности линейных дифференциальных операторов, рассмотренных ранее для комплексного случая Н. И. Нагнибидой [5]. Теорема 4 дает необходимые и достаточные условия эквивалентности некоторых операторов, связанных с оператором обобщенного дифференцирования.

2. Основные конструкции. Пусть $\mathbb{Q}_p$ — поле p-адических чисел с p-адической нормой $|\cdot|_p$, удовлетворяющей условию $|p|_p = p^{-1}$. Как известно (см., например, [3, с. 104]), норма $|\cdot|_p$ допускает единственное продолжение на алгебраическое замыкание $\overline{\mathbb{Q}}_p$ поля $\mathbb{Q}_p$. Обозначим через $\mathbb{C}_p$ пополнение $\overline{\mathbb{Q}}_p$ по норме $|\cdot|_p$. Это полное и алгебраически замкнутое поле [3, с. 114] называется полем Тейта. Пусть $A_{p,R}$, $0 < R \leq \infty$, – множество функций, аналитических в диске $D_p(R^-) = \{z \in \mathbb{C}_p \colon |z|_p < R\}$ (см. [6, с. 39]).

Определение. *Будем говорить, что последовательность функций* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in A_{p,R}$ *сходится p-адически равномерно на дисках* $D_p(r) = \{z \in \mathbb{C}_p \colon$

$|z|_p \le r\}$, $0 < r < P$, *к функции* $f \in A_{p,R}$, *если для любого* $r \in (0, R)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{|z|_p \le r} |f_n(z) - f(z)|_p = 0$.

Положим $U_{r,\varepsilon} = \left\{ f \in A_{p,R} \colon \sup\limits_{|z|_p \le r} |f(z)|_p \le \varepsilon \right\}$, где $r \in (0, R)$, $\varepsilon > 0$.

Теорема 1. *Пусть* $0 < R \le \infty$.

1. *Семейство* $U = \{U_{r,\varepsilon}\}$ *является базисом окрестностей нуля однозначно определяемой топологии* τ, *относительно которой пара* $(A_{p,R}; \tau)$ *является ТВП над полем* $\mathbb{C}_p$.

2. *Сходимость в* $(A_{p,R}; \tau)$ *является* p*-адически равномерной на дисках* $D_p(r)$, $0 < r < R$.

3. $(A_{p,R}; \tau)$ *является хаусдорфовым и метризуемым ТВП.*

4. *Линейные дифференциальные операторы непрерывны в* $(A_{p,R}; \tau)$.

Доказательство. Первое утверждение получается стандартными рассуждениями [7, с. 26] из следующих очевидных свойств семейства U:

а) $U \ne \varnothing$, $\varnothing \notin U$, $U_{r,\varepsilon} \subset U_{r_1,\varepsilon_1} \cap U_{r_2,\varepsilon_2}$, где $r = \max(r_1, r_2)$, $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$;

б) $U_{r,\varepsilon} + U_{r,\varepsilon} \subset U_{r,\varepsilon}$, $\lambda U_{r,\varepsilon} \subset U_{r,\varepsilon}$ при $|\lambda|_p \le 1$;

в) $p\, U_{r,\varepsilon} = U_{r,\varepsilon/p}$;

г) если $A = \{f_1, \ldots, f_n\}$ — конечное подмножество $A_{p,R}$, то $A \subset \lambda U_{r,\varepsilon}$ при $|\lambda|_p \ge |\lambda_0|_p$, где $\lambda_0 \in \mathbb{C}_p$ выбирается из условия $\varepsilon |\lambda_0|_p \ge \max\limits_{1 \le i \le n} \left\{ \sup\limits_{|z|_p \le r} |f_i(z)|_p \right\}$.

Утверждение 2 является простым следствием утверждения 1 и определения $U_{r,\varepsilon}$.

Так как семейство $\{U_{r,\varepsilon} \colon r, \varepsilon \in \mathbb{Q}\}$ является счетным базисом окрестностей нуля, то из утверждения 2 получаем, что $(A_{p,R}; \tau)$ хаусдорфово, а значит [7, с. 42], метризуемое ТВП.

Для доказательства последнего утверждения нам потребуются некоторые конструкции, связанные с интегралом Л. Г. Шнирельмана [6, с. 40].

Пусть последовательность функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in A_{p,R}$ сходится в $(A_{p,R}; \tau)$ к функции $f \in A_{p,R}$, k — неотрицательное целое число, $r \in (0, R)$ и $z \in D_p(r)$. Выберем $\rho \in \mathbb{C}_p$ таким образом, чтобы $r < |\rho|_p < R$. Используя оценки интеграла Шнирельмана и формулы для производных [6, с. 43], имеем

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)|_p = \left| k! \int\limits_{0,\rho} \frac{f_n(\xi) - f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} \xi \, d\xi \right|_p \le$$

$$\le \max_{|\xi|_p = |\rho|_p} |k!|_p \frac{|f_n(\xi) - f(\xi)|_p}{|\xi - z|_p^{k+1}} |\xi|_p \le$$

$$\le \frac{|\rho|_p}{(|\rho|_p - r)^{k+1}} \max_{|\xi|_p = |\rho|_p} |f_n(\xi) - f(\xi)|_p .$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{|z|_p\le r}|f_n^{(k)}(z)-f^{(k)}(z)|_p = 0,$$

откуда следует утверждение 4. Теорема 1 доказана.

Замечание **1.** Всюду в дальнейшем будем рассматривать $A_{p,R}$ как ТВП с топологией τ.

3. Матричное описание операторов в $A_{p,R}$. Следующий результат является неархимедовым аналогом теоремы М. Г. Хапланова [4].

Теорема 2. *Пусть* $0<R\le\infty$. *Определенный лишь на элементах* $z^n\in A_{p,R}$, $n=0,1,\dots$, *оператор* T *можно расширить до линейного непрерывного отображения всего пространства* $A_{p,R}$ *в себя тогда и только тогда, когда для любого* $\rho\in(0,R)$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\sup_{|z|_p\le\rho}|Tz^n|_p\right)^{1/n} < R. \tag{2}$$

Доказательство. *Необходимость.* Прежде всего отметим, что если

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k z^k$$

— произвольная функция из $A_{p,R}$, то последовательность

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k z^k, \quad n=0,1,\dots,$$

сходится в $A_{p,R}$ к функции f, так как

$$\sup_{|z|_p\le r}|f(z)-S_n(z)|_p \le \max_{k\ge n}|f_k|_p|a|_p^k,$$

где $a\in\mathbb{C}_p$ и $r<|a|_p<R$. Пусть теперь T — линейное непрерывное отображение пространства $A_{p,R}$ в себя. Предположим, что для некоторого $\rho\in(0,R)$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\sup_{|z|_p\le\rho_0}|Tz^n|_p\right)^{1/n} \ge R.$$

Выберем $r\in\mathbb{C}_p$ таким образом, чтобы $\rho_0<|r|_p<R$. Тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\max_{|z|_p=|r|_p}|Tz^n|_p\right)^{1/n} \ge R. \tag{3}$$

Положим $\varphi_n(z) = Tz^n$, $n=0,1,\dots$. Из (3) следует существование такой последовательности $\Lambda = \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ натуральных чисел и такой последовательности точек $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(|z_k|_p=|r|_p)$, что

$$\lim_{k\to\infty}(|\varphi_{n_k}(z_k)|_p)^{1/n_k} \ge R. \tag{4}$$

Пусть $\Psi_k=\varphi_{n_k}(z_k)$, $E=\{k\in N:\ \Psi_k\ne 0\}$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = \sum_{k\in E}|\Psi_k|_p^{-1}z^{n_k}.$$

В силу условия (4) она, очевидно, принадлежит $A_{p,R}$. Однако ряд

$$\sum_{k \in E} |\Psi_k|_p^{-1} \, T z^{n_k},$$

представляющий (в силу непрерывности оператора T) функцию $T\varphi(z)$, не сходится в $A_{p,R}$, что ведет к противоречию.

Достаточность. Рассмотрим функции

$$\varphi_n(z) = Tz^n = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{n,k} \, z^k, \qquad |z|_p < R.$$

Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \, z^n$$

— произвольная функция из $A_{p,R}$. Покажем, что T можно расширить до линейного непрерывного отображения всего пространства $A_{p,R}$ в себя, полагая

$$Tf(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \, \varphi_n(z).$$

Пусть $|z_0|_p < R$, $r_1 \in \mathbb{C}_p$ выбрано таким образом, чтобы $|z_0|_p < |r_1|_p < R$.

Так как [6, с. 40, 43]

$$\varphi_{n,k} = \int\limits_{0,r_1} \varphi_n(z) \, z^{-k} \, dz, \qquad n, k = 0, 1, \ldots,$$

то, используя (2) при $\rho = |r_1|_p$, находим числа $C(r_1) \geq 0$ и $M(r_1) \in (0, R)$ такие, что $|\varphi_{n,k}|_p \leq C(r_1) \, M^n(r_1) |r_1|_p^{-k}$, $n, k = 0, 1, \ldots$. Выберем $r_2 \in \mathbb{C}_p$ таким образом, чтобы $M(r_1) < |r_2|_p < R$. Поскольку

$$|f_n|_p \leq |r_2|_p^{-n} \max_{|z|_p = |r_2|_p} |f(z)|_p,$$

для любого $n = 0, 1, \ldots$ получаем $\lim\limits_{k \to \infty} |f_n \, \varphi_{n,k} \, z_0^k|_p = 0$, а также

$$\lim_{n \to \infty} \max_{k \geq 0} |f_n \, \varphi_{n,k} \, z_0^k|_p = 0.$$

Отсюда следует [8, с. 320], что ряд $\sum_{k,n=0}^{\infty} f_n \, \varphi_{n,k} \, z^k$ сходится при $z \in D_p(R^-)$ и функция

$$Tf(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \, \varphi_n(z)$$

принадлежит $A_{p,R}$. Линейность оператора T очевидна. Далее, используя (2), находим для любого $r \in (0, R)$ числа $C(r) \geq 0$ и $M(r) \in (0, R)$ такие, что

$$\sup_{|z|_p \leq r} |\varphi_n(z)|_p \leq C(r) \, M^n(r), \qquad n = 0, 1, \ldots.$$

Выбирая $r_3 \in \mathbb{C}_p$ так, чтобы $\underset{\sim}{M}(r) < |r_3|_p < R$, и используя неравенство $|f_n|_p \le |r_3|_p^{-n} \max\limits_{|z|_p = |r_3|_p} |f(z)|_p$, имеем

$$\sup_{|z|_p \le r} |Tf(z)|_p \le C(r) \max_{n \ge 0} \left\{ \frac{M(r)}{|r_3|_p} \right\}^n \max_{|z|_p = |r_3|_p} |f(z)|_p .$$

Отсюда следует непрерывность оператора T. Теорема 2 доказана.

Следствие. *Для того чтобы матрица* $[t_{i,k}]_{i,k=0}^{\infty}$ *определяла в* $A_{p,R}$, $0 < < R \le \infty$, *линейный и непрерывный оператор* T *равенством*

$$Tf(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \sum_{i=0}^{\infty} t_{i,k} z^i,$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого $\rho \in (0, R)$ *существовали такие* $r = r(\rho) < R$ *и* $C = C(\rho) \ge 0$, *что*

$$|t_{i,k}|_p \le C r^k \rho^{-i}, \quad i, k = 0, 1, \dots .$$

4. Эквивалентность операторов с особенностями. Пусть s — неотрицательное целое число, $\beta(z) \in A_{p,\infty}$. Рассмотрим операторы $A = z^s D + \beta(z) E$, $B = z^s D$, где D — оператор дифференцирования, а E — тождественный оператор в $A_{p,\infty}$.

Теорема 3. 1. *Если* $0 \le s \le 2$, *то* $A \sim B$ *в* $A_{p,\infty}$ *тогда и только тогда, когда* $\beta(z) \equiv 0$.

2. *Если* $s \ge 3$, *то* $A \sim B$ *в* $A_{p,\infty}$ *тогда и только тогда, когда* $\beta(z) \equiv \equiv -l z^{s-1}$, *где* $l \in \{0, 1, \dots, s-2\}$.

Доказательство. Пусть $A \sim B$ в $A_{p,\infty}$, T — изоморфизм $A_{p,\infty}$, для которого $TA = BT$. Из эквивалентности A и B следует, что A имеет нетривиальный нуль, т. е. существует ненулевая функция $\varphi \in A_{p,\infty}$ такая, что $z^s \varphi'(z) + \beta(z)\varphi(z) \equiv 0$. Тогда $\varphi(z) \ne 0$ для любого $z \in \mathbb{C}_p$, если $s = 0$, и $\varphi(z) \ne 0$ для любого $z \in \mathbb{C}_p \setminus \{0\}$, если $s \ge 1$. Следовательно [9, с. 96],

$$\varphi(z) = \begin{cases} c, & c \in \mathbb{C}_p \setminus \{0\}, \ s = 0; \\ c(s) z^l, & c(s) \in \mathbb{C}_p \setminus \{0\}, \ l \ge 0, \ s \ge 1, \end{cases}$$

откуда $\beta(z) \equiv 0$ при $s = 0$ и $\beta(z) \equiv -l z^{s-1}$ при $s \ge 1$. Покажем, что $l = 0$ в случае $1 \le s \le 2$ и $l \in \{0, 1, \dots, s-2\}$, если $s \ge 3$.

Пусть $s = 1$. Предположим, что $l \ge 1$. Тогда $T(1) = TA(-1/l) = = BT(-1/l) = (-1/l) BT(1)$, поэтому $l\Psi(z) + z\Psi'(z) \equiv 0$, где $\Psi(z) = = T(1)$. Следовательно, $T(1) = 0$, что противоречит биективности оператора T. Итак, $l = 0$ и $\beta(z) \equiv 0$.

Пусть $s = 2$. Предположим, что $l \ge 1$. Из соотношения $TA = BT$ следует, что Tz^l — ненулевая константа. Так как $z^l \in \operatorname{im} A$ (поскольку $Az^{l-1} = -z^l$), то из (1) получаем $Tz^l \in \operatorname{im} B$, что противоречит определению оператора B. Итак, $l = 0$ и $\beta(z) \equiv 0$.

Пусть теперь $s \ge 3$. Как и в случае $s = 2$, получаем $\beta(z) \equiv -l z^{s-1}$, где $l \in \{0, 1, \dots, s-2\}$. Покажем, что операторы $A = z^s D - l z^{s-1} E$ и $B = z^s D$,

$s \geq 3$, $l \in \{0, 1, \dots, s-2\}$, эквивалентны в $A_{p,\infty}$. Для $m \in \mathbb{Z}$ и $i = 0, 1 \dots$ положим

$$\prod_i (m; s) = \begin{cases} \prod_{k=0}^{j-1} (m + ks - k), & i \geq 1; \\ l, & i = 0. \end{cases}$$

Пусть $j, q \in N$, $0 \leq j, q \leq s-2$ и $q \neq l$. Поскольку $|n!|_p^{-1} \leq p^{n/(p-1)}$ (см., например, [3, с. 123]), из очевидных неравенств $|n_p| \leq 1$, $|n|_p^{-1} \leq |n|$ имеем

$$\left| \frac{\prod_i (j; s)}{\prod_i (q-l; s)} \right|_p \leq \left| \prod_i (q-l; s) \right|_p^{-1} \leq$$

$$\leq \frac{1}{|q-l|_p} \frac{1}{|(is-i)!|_p} \leq (s-2)\, p^{(is-i)/(p-1)}. \tag{5}$$

Аналогично, если $q \neq 0$ и $j \neq$, то

$$\left| \frac{\prod_i (j-l; s)}{\prod_i (q; s)} \right|_p \leq p^{(is-i)/(p-1)}. \tag{6}$$

Так как элементы матриц $[a_{i,k}]_{i,k=0}^{\infty}$ и $[b_{i,k}]_{i,k=0}^{\infty}$ операторов A и B определяются соответственно соотношениями

$$a_{i,k} = \begin{cases} 0, & i \neq k+s-1; \\ k-l, & i = k+s-1, \end{cases} \qquad b_{i,k} = \begin{cases} 0, & i \neq k+s-1; \\ k, & i = k+s-1, \end{cases}$$

из (5) и (6) следует (см. [5], а также следствие теоремы 2) существование изоморфизма T пространства $A_{p,\infty}$, для которого $TA = BT$. Теорема 3 доказана.

***Замечание* 2.** В комплексном случае необходимые и достаточные условия эквивалентности операторов A и B получены в [5]. При этом класс функций $\beta(z)$, для которых $A \sim B$, является более широким.

5. Операторы обобщенного дифференцирования. Пусть $\alpha_k \in \mathbb{C}_p \setminus \{0\}$, $k = 0, 1, \dots$. Определим оператор D_α обобщенного дифференцирования в $A_{p,R}$, полагая

$$D_\alpha 1 = 0, \quad D_\alpha z^{k+1} = \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} z^k, \quad k = 0, 1, \dots .$$

Условие (2) для него имеет вид

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \left| \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} \right|_p^{1/k} \leq 1 \quad \text{при} \quad R < \infty$$

и

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \left| \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} \right|_p^{1/k} < \infty \quad \text{при} \quad R = \infty.$$

В случае, когда $\alpha_k = 1/k!$, оператор D_α совпадает с D, а при $\alpha_k = 1$ — с оператором Поммье Δ, где $(\Delta f)(z) = \dfrac{f(z) - f(0)}{z}$ для любой $f \in A_{p,R}$.

Теорема 4. *Пусть* $\beta(z) \in A_{p,R}$, $n \in N$ *и последовательность* $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям*

$$\varlimsup_{k\to\infty}\left|\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}}\right|_p^{1/k} < \infty \quad \text{и} \quad \varlimsup_{k\to\infty}\left|\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right|_p^{1/k} < \infty.$$

Для того чтобы операторы $A = \beta(z) D_\alpha^n$ *и* $B = D_\alpha^n$ *были эквивалентны в* $A_{p,\infty}$, *необходимо и достаточно, чтобы функция* $\beta(z)$ *была ненулевой тождественной константой.*

Доказательство. *Достаточность* в теореме 4 очевидна, докажем *необходимость.* Пусть $A \sim B$ в $A_{p,\infty}$. Из условия

$$\varlimsup_{k\to\infty}\left|\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right|_p^{1/k} < \infty$$

индукцией по n получаем $\operatorname{im} B = A_{p,\infty}$. Отсюда и из (1) следует, что $\operatorname{im} A = A_{p,\infty}$. Таким образом, $\beta(z) \neq 0$ для любого $z \in \mathbb{C}_p$, а значит [9, с. 96], $\beta(z)$ — ненулевая константа. Теорема 4 доказана.

В качестве следствия получаем аналогичное утверждение для операторов D^n и Δ^n.

1. *Ибрагимов И. И., Нагнибида Н. И.* Матричный метод и квазистепенные базисы в пространстве аналитических в круге функций // Успехи мат. наук. – 1975. – **30**, вып. 6. – С. 101–147.
2. *Фаге М. К., Нагнибида Н. И.* Проблема эквивалентности обыкновенных линейных дифференциальных операторов. – Новосибирск: Наука, 1987. – 280 с.
3. *Коблиц Г.* p-Адические числа, p-адический анализ и дзета-функции. – М.: Мир, 1982. – 192 с.
4. *Хапланов М. Г.* Линейные преобразования аналитических пространств // Докл. АН СССР. – 1951. – **80**. № 1. – С. 21–24.
5. *Нагнибида Н. И.* Об эквивалентности некоторых дифференциальных операторов первого порядка с „особенностями" // Сиб. мат. журн. – 1969. – **10**, № 6. – С. 1453–1456.
6. *Спринджук В. Г.* Классические диофантовы уравнения от двух неизвестных. – М.: Наука, 1982. – 287 с.
7. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1971. – 360 с.
8. *Боревич З. И., Шафаревич И. Р.* Теория чисел. – М.: Наука, 1972. – 495 с.
9. *Ленской Д. Н.* Функции в неархимедовски нормированных полях. – Саратов: Саратов. ун-т, 1962. – 108 с.

Получено 24.06.98