УДК 517.5

А. К. Бахтин (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ НЕНАЛЕГАЮЩИХ ОБЛАСТЕЙ

We generalize some results concerning extremal problems of nonoverlapping domains with free poles on the unit circle.

Узагальнено деякі результати щодо екстремальних задач про неналягаючі області з вільними полюсами на одиничному колі.

Впервые задачи о неналегающих областях рассматривались в работе [1], в которой решена экстремальная задача о произведении конформных радиусов пары неналегающих областей. В дальнейшем эта тематика интенсивно развивалась многими авторами (см. [2 – 6]). В работе [7] рассмотрены экстремальные задачи для неналегающих областей нового типа, а именно: задачи со свободными полюсами на окружности.

Целью данной работы является уточнение и обобщение некоторых результатов, полученных в работах [7 – 10].

1. Основные результаты. Пусть U_w — круг $|w| < 1$ комплексной w-плоскости, $A_n = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = \{a_k\}_{k=1}^n$, $n \in N$, — набор произвольных попарно различных точек окружности $l = \partial U_w = \{w : |w| = 1\}$. Пусть $F_n = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\} = \{B_k\}_{k=1}^n$, $n \in N$, — система произвольных многосвязных областей таких, что $B_k \bigcap B_m \neq \varnothing$ для любых $k \neq m$, $B_k \bigcap l \neq \varnothing$, $k, m = 1, 2, \ldots, n$.

Пару $\sigma_n = (F_n, A_n) = (\{B_k\}_1^n, \{a_k\}_1^n)$ будем называть согласованной, если $a_k \in B_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Множество всех согласованных пар будем называть классом $\sum_n^{(0)}$. Обозначим через $\sum_n^{(1)}$ множество тех и только тех пар $\sigma_n = (F_n, A_n) \in \sum_n^{(0)}$, для которых набор $F_n = \{B_k\}_1^n$ состоит из областей B_k, удовлетворяющих условию $\infty \notin B_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$; через $\sum_n^{(2)}$ множество тех и только тех пар $\sigma_n = (F_n, A_n) = (\{B_k\}_1^n, \{a_k\}_1^n) \in \sum_n^{(0)}$, для которых набор $F_n = \{B_k\}_1^n$ состоит только из односвязных областей B_k, а через $\sum_n^{(3)}$ множество тех и только тех пар $\sigma_n = (F_n, A_n) \in \sum_n^{(0)}$, для которых набор $F_n = \{B_k\}_{k=1}^n$ состоит из областей B_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, симметричных относительно окружности $l = \{w : |w| = 1\}$.

Кроме того, обозначим

$$\sum_n^{(4)} = \sum_n^{(1)} \bigcap \sum_n^{(2)}, \quad \sum_n^{(5)} = \sum_n^{(2)} \bigcap \sum_n^{(3)},$$

$$\sum_n^{(6)} = \sum_n^{(1)} \bigcap \sum_n^{(2)} \bigcap \sum_n^{(3)}.$$

Пусть $\sigma_n = (F_n, A_n) \in \sum_n^{(0)}$. Рассмотрим набор $F_n = \{B_k\}_{k=1}^n$. Связную компоненту Γ дополнения области B_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, до полной плоскости C_w назовем несущественной, если при любом $j = 1, 2, \ldots, n$ $B_j \not\subset \Gamma$. Операцию перехода от области B_k к области $B_k^\Gamma = B_k \bigcup \Gamma$ назовем операцией заполнения несущественной граничной компоненты. Заполняя все несущественные граничные компоненты областей B_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, получаем систему неналегающих, конечносвязных областей $\tilde{B}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим $\tilde{F}_n = \{\tilde{B}_k\}_{k=1}^n$. Тогда ясно, что $\tilde{\sigma}_n = (\tilde{F}_n, A_n) = (\{\tilde{B}_k\}_1^n, A_n) \in \sum_n^{(0)}$. Множество всех пар $\tilde{\sigma}_n = (\tilde{F}_n, A_n)$, когда $\sigma_n = (F_n, A_n)$ пробегает весь класс $\sum_n^{(m)}$, обозначим через $\check{\sum}_n^{(m)}$, $m = 0, 1, \ldots, 6$; $n \in N$. Если $\tilde{\sigma}_n = (\tilde{F}_n, A_n) \in \sum_n^{(2)}$, то система (F_n, A_n) имеет заполнение в смысле Ю. Е. Аленицина (см. [3, с. 16]). Обозначим через $\widetilde{\sum}_n$ класс пар $\sigma_n = (F_n, A_n) \in \sum_n^{(3)}$, имеющих заполнение $\tilde{\sigma}_n = (\tilde{F}_n, A_n) = (\{\tilde{B}_k\}_1^n, A_n)$ в смысле Ю. Е. Аленицина и удовлетворяющих условию $\infty \notin \tilde{B}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, для любой пары $\sigma_n = (F_n, A_n)$. Класс $\widetilde{\sum}_n$ был рассмотрен в [10], где в определении класса $\widetilde{\sum}_n$ вместо условия $\infty \notin B_k^+$, $k = 1, 2, \ldots, n$, ошибочно фигурирует условие $\infty \notin B_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ (B_k^+ — стандартное обозначение заполнения по Ю. Е. Аленицину (см. [3, с. 16])).

Классом $\hat{\sum}_n$ назовем множество тех и только тех пар $\sigma_n = (F_n, A_n) = (\{B_k\}_1^n, \{a_k\}_1^n) \in \sum_n^{(3)}$, для которых 0 и ∞ принадлежат одной и той же связной компоненте дополнения до полной плоскости каждой области B_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Из определений ясно, что $\widetilde{\sum}_n \subset \hat{\sum}_n$, $n \in N$.

На классе $\sum_n^{(0)}$ рассмотрим функционал

$$J_\alpha(F_n, A_n) = \prod_{k=1}^n r^{\alpha_k}(B_k, a_k), \tag{1}$$

где $r(B_k, a_k)$ — внутренний радиус области B_k относительно точки a_k, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \{\alpha_k\}_1^n$, $\alpha_k \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, — фиксированный вектор из R^n такой, что $\|\alpha\|_{R^n} \neq 0$ и $\alpha_k \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и величина $\operatorname{Sup} J_\alpha(F_n, A_n) < +\infty$ для некоторого класса $\sum_n^{(m)}$, $m = 0, 1, \ldots, 6$, $n \in N$. Для каждой пары $\sigma_n = (F_n, A_n) = (\{B_k\}_{k=1}^n, \{a_k\}_{k=1}^n)$ назовем $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ точечной составляющей, а набор $F_n = \{B_k\}_{k=1}^n$ — непрерывной составляющей пары σ_n.

Если $\operatorname{Sup} J_\alpha(F_n, A_n) < +\infty$ для некоторого $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_k \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и некоторого класса $\sum_n^{(m)}$, $m = 0, 1, \ldots, 5$; $n = 2, 3, \ldots$, то можно показать, что существует экстремальная пара $\sigma_n^0 = (F_n^0, A_n^0) \in \sum_n^{(m)}$ такая, что $J_\alpha(\sigma_n^0) = J_\alpha(F_n^0, A_n^0) = \sup\limits_{\Sigma_n^{(m)}} J_\alpha(F_n, A_n)$. Отметим, что для классов $\sum_n^{(6)}$, $\widetilde{\sum}_n$, $\hat{\sum}_n$, $n = 2, 3, \ldots$, и любого конечного $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_k \geq 0$, $k = 1, \ldots, n$, всегда существуют экстремальные пары.

Максимум функционала (1) на классах $\sum_n^{(m)}$, $m = 0, 1, \ldots, 6$; $n = 2, 3, \ldots$ (при условии, что величина $\operatorname{Sup} J_\alpha(F_n, A_n) < +\infty$ на соответствующем классе), $\widetilde{\sum}_n$ и $\hat{\sum}_n$ обозначим соответственно $J_n^{(m)}(\alpha)$, $m = 0, 1, \ldots, 6$; $\tilde{J}_n(\alpha)$, $\hat{J}_n(\alpha)$, $n = 2, 3 \ldots$.

Задача 1. Найти величины $J_n^{(m)}(\alpha)$, $\tilde{J}_n(\alpha)$, $\hat{J}_n(\alpha)$ и определить все соответствующие экстремальные пары.

Используемые ниже сведения из теории квадратичных дифференциалов можно найти в монографии [5].

Критическим множеством T_Q для квадратичного дифференциала $Q(w)\,dw^2$ будем называть замыкание объединения всех траекторий $Q(w)\,dw^2$, имеющих предельную точку в некоторой конечной критической точке дифференциала $Q(w)\,dw^2$.

Функционал вида (1) будем называть степенным функционалом или функционалом степенного вида, соответствующим параметру $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_k \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Впервые функционалы такого вида появились в задачах о неналегающих областях в работах [11, 12]. В работах [7–10] изучены некоторые частные случаи задачи 1.

Следующие теоремы усиливают и обобщают некоторые результаты из работ [7–10].

Теорема 1. *Пусть* $n = 3, 4, \ldots$ *и* $\sigma_n = (F_n, A_n) = (\{B_k\}_{k=1}^n, \{a_k\}_{k=1}^n) \in \sum_n^{(3)}$ *— произвольная экстремальная пара в задаче* 1, *реализующая величину* $J_n^{(3)}(\alpha)$, *а* $\tilde{\sigma}_n = (F_n, A_n) \in \check{\sum}_n^{(3)}$ *— соответствующее заполнение пары* σ_n.

Тогда вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_k \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *и точечная составляющая пары* σ_n *задают квадратичный функционал*

$$Q(w)\,dw^2 = -\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{(2 - \overline{a}_k w)}{(w - a_k)^2}\,dw^2, \tag{2}$$

относительно которого непрерывная составляющая пары $\tilde{\sigma}_n$ *является допустимым семейством областей, причем логарифмическая емкость множества, состоящего из всех несущественных граничных компонент каждой области* B_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, *равна нулю и*

$$\overline{\left(\bigcup_{k=1}^{n} \tilde{B}_k\right)} = \overline{C}_w. \tag{3}$$

Теорема 2. *Если для некоторого* $n = 3, 4, \ldots$ *и некоторого* $\alpha = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, $\alpha_k \geq 0$, $k = 1, \ldots, n$, *выполняется равенство*

$$J_n^{(3)}(\alpha) = J_n^{(6)}(\alpha), \tag{4}$$

то справедливо утверждение

$$J_n^{(k)}(\alpha) = J_n^{(6)}(\alpha), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 5. \tag{5}$$

Причем если величина $J_n^{(3)}(\alpha)$ *реализуется для некоторой системы* $\sigma_n^0 \in \in \sum_n^{(6)}$, *то и величины* $J_n^{(m)}(\alpha)$, $m = 0, 1, \ldots, 5$, *из равенства* (5) *реализуются для всех систем* $\sigma_n' \in \sum_n^{(m)}$, $m = 0, 1, \ldots, 5$, *таких, что* $\tilde{\sigma}_n' = \sigma_n^0$ *и емкость множества всех несущественных граничных компонент каждой области* B_k', $k = 1, 2, \ldots, n$, *равна нулю.*

Теорема 3. *В задаче* 1 *для* $n = 4$ *и* $\alpha = (1, \delta, 1, \delta)$, $0 \leq \delta \leq 1$, *выполняется равенство*

$$J_4^{(k)}(\alpha) = J_4^{(6)}(\alpha), \quad k = 0, 1, \ldots, 5, \tag{6}$$

причем величины $J_4^{(k)}(\alpha)$ *в равенстве* (6) *реализуются для систем*

$$\sigma_4(\varepsilon) = (F_4(\varepsilon), A_4(\varepsilon)) = \left(\{\varepsilon D_k\}_{k=1}^4, \left\{\varepsilon \exp\frac{\pi}{2}(k-1)i\right\}_{k=1}^4\right), \quad |\varepsilon| = 1, \tag{7}$$

где $\varepsilon D_k := \{\xi \in C_w \colon \xi = \varepsilon w,\ w \in D_k\}$, $\bigcup_{k=1}^4 D_k = C_w \setminus T_Q$,

$$Q(w)\,dw^2 = \frac{(\delta-1)w^4 - 2(\delta+1)w^2 + (\delta-1)}{(w^4-1)^2}\,dw^2,$$

$$a_k = \exp\frac{\pi}{2}(k-1)i \in D_k, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Если $\sigma_4 = (F_4, A_4) = (\{B_k\}_1^4, \{a_k\}_1^4) \in \sum_4^{(0)}$ *— любая другая экстремальная система, а* $\tilde{\sigma}_4 = (\{\tilde{B}_k\}_1^4, A_4)$ *— ее заполнение, то емкость всех несущественных граничных компонент каждой из областей* B_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, *равна нулю и выполняется равенство* $\tilde{\sigma}_4 = (\tilde{F}_4, A_4) = \sigma_4(\varepsilon) = (F_4(\varepsilon), A_4(\varepsilon))$ *для некоторого* ε, $|\varepsilon| = 1$.

Теорема 4. *В задаче* 1 *при* $n = 2$ *и* $\alpha = (1, \delta)$, $0 \leq \delta \leq 1$, *выполняется равенство*

$$\tilde{J}_2(\alpha) = \hat{J}_2(\alpha), \tag{8}$$

причем экстремальными являются пары

$$\sigma_2(\varepsilon) = (F_2(\varepsilon), A_2(\varepsilon)), \tag{9}$$

где $F_2(\varepsilon) = \{\varepsilon D_k\}_{k=1}^2$, $A_2(\varepsilon) = \{-\varepsilon, \varepsilon\}$, $\varepsilon D_k := \{\xi \in C_w \colon \xi = \varepsilon w,\ w \in D_k\}$, $\bigcup_{k=1}^2 D_k = C_w \setminus T_Q$,

$$Q(w)\,dw^2 = \frac{(\delta-1)w^2 - 2(\delta+1)w + (\delta-1)}{w(w^2-1)^2}\,dw^2,$$

$$a_k = \exp\pi(k-1)i \in D_k, \quad k = 1, 2.$$

Если $\sigma_2 = (F_2, A_2) = (\{B_k\}_1^2, \{a_k\}_1^2) \in \hat{\sum}_2$ *— любая другая экстремальная пара, а* $\tilde{\sigma}_2 = (\{\tilde{B}_k\}_1^2, A_2)$ *— ее заполнение, то* $\tilde{\sigma}_2 = \sigma_2(\varepsilon)$ *при некотором* ε, $|\varepsilon| = 1$, *и емкость всех несущественных граничных компонент каждой области* B_1, B_2 *равна нулю.*

2. Доказательство теоремы 1. Функция Грина области B_k относительно точки a_k имеет вид

$$g_{B_k}(w, a_k) = \log\frac{1}{|w - a_k|} + \log r(B_k, a_k) + o(1), \tag{10}$$

где $o(1) \rightrightarrows 0$ при $w \to a_k$, $r(B_k, a_k)$ — внутренний радиус B_k относительно точки a_k.

Согласно методу граничной вариации [13, 14], имеем следующую вариационную формулу:

$$w^* = w + \frac{A\rho^2}{w - w_0} - \frac{\overline{A}\rho^2 w^3}{1 - w\overline{w}_0} + O(\rho^3), \tag{11}$$

где $A(\rho)$, $\rho > 0$, — параметры граничной вариации, а остаточный член удовлетворяет неравенству $|O(\rho^3)| \le \mathrm{const}\cdot\rho^3$ на любом компактном множестве, не содержащем точек w_0 и $1/\overline{w}_0$, $w_0 \in \left[C_w \setminus \bigcup_{k=1}^n B_k\right]$, $w_0 \ne 0, \infty$. Формула (11) задает отображение, при котором любой элемент $\sigma_n = (F_n, A_n) = (\{B_k\}_1^n, \{a_k\}_1^n) \in \sum_n^{(3)}$ преобразуется в некоторый элемент $\sigma_n^* = (F_n^*, A_n^*) = (\{B_k^*\}_1^n, \{a_k^*\}_1^n) \in \sum_n^{(3)}$, причем $\sigma_n^* \to \sigma_n$ при $\rho \to 0$. Согласно свойству инвариантности функции Грина при конформном отображении получаем

$$g_{B_k^*}(w^*, a_k^*) = g_{B_k}(w, a_k). \tag{12}$$

Из выражений (10) – (12) следует

$$r(B_k^*, a_k^*) =$$

$$= r(B_k, a_k)\left\{1 - \mathrm{Re}\,A\rho^2\left[\frac{1}{(a_k^* - w_0)^2} + \frac{3\overline{(a_k^*)}^2 - 2\overline{(a_k^*)}^3 w_0}{(1 - w_0\overline{a_k^*})^2}\right] + O(\rho^3)\right\}.$$

Отсюда непосредственно вытекает соотношение

$$J_\alpha(\sigma_n^*) = J_\alpha(F_n^*, A_n^*) = J_\alpha(\sigma_n)\left\{1 - \right.$$

$$\left. - \rho^2\,\mathrm{Re}\,A\sum_{k=1}^n \alpha_k\left[\frac{1}{(a_k^* - w_0)^2} + \frac{3\overline{(a_k^*)}^2 - 2\overline{(a_k^*)}^3 w_0}{(1 - \overline{a_k^*} w_0)^2}\right] + O(\rho^3)\right\}. \tag{13}$$

Следствием равенства (13) и экстремальности системы $\sigma_n = (F_n, A_n) = (\{B_k\}_1^n, \{a_k\}_1^n) \in \sum_n^{(3)}$ является неравенство

$$2\operatorname{Re} A \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left[\frac{2 - \overline{a_k^*} w_0}{(w_0 - a_k^*)^2} \right] + O(\rho) \geq 0. \tag{14}$$

Переходя в неравенстве (14) к пределу при $\rho \to 0$ и применяя лемму Шиффера [13], получаем, что непрерывная составляющая пары σ_n является допустимым семейством областей относительно дифференциала (2), для этого семейства выполняется соотношение (3), а точечная составляющая пары σ_n и вектор α задают дифференциал (2). Теорема 1 доказана.

Замечание. Используя другую формулу граничной вариации Дюрена–Шиффера [14]

$$w^* = w + \frac{A\rho^2}{w_0} \frac{w}{w - w_0} - \frac{\overline{A}\rho^2}{\overline{w}_0} \frac{w^2}{1 - \overline{w}_0 w} + O(\rho^3),$$

аналогично можно получить квадратичный дифференциал

$$Q(w)\, dw^2 = -2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k a_k}{w(w - a_k)^2} dw^2,$$

описывающий ту же экстремальную пару $\sigma_n = (F_n, A_n) = (\{B_k\}_1^n, \{a_k\}_1^n) \in \in \sum_n^{(3)}$.

3. Доказательство теоремы 2. Пусть $\sigma_n = (F_n, A_n) = (\{B_k\}_1^n, \{a_k\}_1^n)$ — произвольный элемент класса $\sum_n^{(0)}$. Непрерывная составляющая $F_n = \{B_k\}_{k=1}^n$ пары σ_n — это семейство неналегающих многосвязных областей B_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. По определению пара σ_n согласована и, следовательно, $a_k \in B_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Кроме того, $a_k \in l$, поэтому $B_k \cap l \neq \varnothing$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть $E_1 = \overline{U}_w$, $E_2 = \overline{C}_w \setminus U_w$. Следуя [6, 15, 16], обозначим через $B_k^{(1)}$, $k = 1, \ldots, n$, объединение связной компоненты множества $B_k \cap E_1$, содержащей точку a_k, с ее инверсией относительно l, а через $B_k^{(2)}$, $k = 1, \ldots, n$, объединение связной компоненты множества $B_k \cap E_2$, содержащей точку a_k, с ее инверсией относительно l. Применение данного преобразования сопоставляет каждому элементу $\sigma_n = (F_n, A_n) = (\{B_k\}_1^n, \{a_k\}_1^n) \in \sum_n^{(0)}$ два элемента $\sigma_n^{(1)} = (F_n^{(1)}, A_n) = (\{B_k^{(1)}\}_{k=1}^n, A_n) \in \sum_n^{(3)}$ и $\sigma_n^{(2)} = (F_n^{(2)}, A_n) = (\{B_k^{(2)}\}_{k=1}^n, A_n) \in \sum_n^{(3)}$. Пару $\{\sigma_n^{(1)}, \sigma_n^{(2)}\}$ назовем результатом разделяющего преобразования элемента $\sigma_n \in \sum_n^{(0)}$. Здесь использован весьма частный случай общего разделяющего преобразования, введенного и изученного в работах [6, 15, 16]. Тогда в силу результатов этих работ получаем неравенство

$$r(B_k, a_k) \leq \sqrt{r(B_k^{(1)}, a_k)\, r(B_k^{(2)}, a_k)} \tag{15}$$

для всех B_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, $F_n = \{B_k\}_{k=1}^n$ — непрерывная составляющая произвольного элемента $\sigma_n \in \sum_n^{(0)}$.

Из соотношений (1) и (15) следует

$$J_\alpha(F_n, A_n) \leq \sqrt{J_\alpha(F_n^{(1)}, A_n)\, J_\alpha(F_n^{(2)}, A_n)}, \tag{16}$$

где $\sigma_n = (F_n, A_n) \in \sum_n^{(0)}$, $\sigma_n^{(k)} = (F_n^{(k)}, A_n) \in \sum_n^{(3)}$, $k = 1, 2$.

В свою очередь, из соотношений (4), (16) вытекает неравенство

$$J_n^{(0)}(\alpha) \leq \sqrt{(J_k^{(3)}(\alpha))^2} = J_n^{(3)}(\alpha) = J_n^{(6)}(\alpha). \tag{17}$$

С другой стороны, легко видеть, что

$$\sum\nolimits_n^{(6)} \subset \sum\nolimits_n^{(k)} \subset \sum\nolimits_n^{(0)}, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5. \tag{18}$$

Из включения (18) следуют неравенства

$$J_n^{(6)}(\alpha) \leq J_n^{(k)}(\alpha) \leq J_n^{(0)}(\alpha), \quad k = 1, 2, 3, 4, 5. \tag{19}$$

Сопоставляя неравенства (17) и (19), получаем соотношения

$$J_n^{(6)}(\alpha) \leq J_n^{(k)}(\alpha) \leq J_n^{(0)}(\alpha) \leq J_n^{(3)}(\alpha) = J_n^{(6)}(\alpha), \quad k = 1, 2, 3, 4, 5. \tag{20}$$

Цепочка неравенств (20) приводит к окончательному равенству

$$J_n^{(0)}(\alpha) = J_n^{(k)}(\alpha) = J_n^{(6)}(\alpha), \quad k = 1, 2, 3, 4, 5. \tag{21}$$

Соотношения (15) – (21) показывают, что если величина $J_n^{(3)}(\alpha)$ реализуется для таких систем $\sigma_n \in \sum_n^{(3)}$, что их заполнение $\tilde{\sigma}_n \in \sum_n^{(6)}$, то и величины $J_n^{(k)}(\alpha)$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$, реализуются для этих же систем. Теорема 2 доказана.

4. Доказательство теоремы 3. Произвольной паре $\sigma_4 = (F_4, A_4) = (\{B_k\}_{k=1}^4, \{a_k\}_{k=1}^4) \in \sum_4^{(3)}$ поставим в соответствие пару $\tilde{\sigma}_4 = (\tilde{F}_4, A_4) = (\{\tilde{B}_k\}_{k=1}^4, \{a_k\}_{k=1}^4) \in \check{\sum}_4^{(3)}$, где $\tilde{\sigma}_4$ — заполнение пары σ_4 и $\tilde{B}_k$, $k = 1, 2, 3, 4$, — набор конечносвязных областей.

Тогда для соответствующих пар σ_4 и $\tilde{\sigma}_4$ имеет место неравенство

$$r(B_k, a_k) \leq r(\tilde{B}_k, a_k), \quad k = 1, 2, 3, 4. \tag{22}$$

С другой стороны, для класса $\check{\sum}_4^{(3)}$ имеет место включение

$$\check{\sum}\nolimits_4^{(3)} \subset \sum\nolimits_4^{(3)}. \tag{23}$$

Для экстремальной пары $\sigma_4 = (F_4, A_4)$ выполняется равенство

$$J_4^{(3)}(\alpha) = J_\alpha(\sigma_4) = J_\alpha(F_4, A_4). \tag{24}$$

Тогда из (22) и (24) получаем

$$J_4^{(3)}(\alpha) = J_\alpha(\sigma_4) = \prod_{k=1}^{4} r^{\alpha_k}(B_k, a_k) \leq \prod_{k=1}^{4} r^{\alpha_k}(\tilde{B}_k, a_k) \leq \check{J}_4^{(3)}(\alpha). \tag{25}$$

Одновременно из (23) имеем неравенство

$$\check{J}_4^{(3)}(\alpha) \leq J_4^{(3)}(\alpha). \tag{26}$$

Обозначим через $\mathring{\sum}_4^{(3)}$ подкласс $\sum_4^{(3)}$, состоящий из тех пар $\sigma_4 = (F_4, A_4)$, для которых набор $F_4 = \{B_k\}_{k=1}^4$ состоит только из конечносвязных областей.

Ясно, что $\check{\sum}_4^{(3)} \subset \mathring{\sum}_4^{(3)} \subset \sum_4^{(3)}$. Обозначим $\mathring{J}_4^{(3)}(\alpha) = \max\limits_{\mathring{\Sigma}_4^{(3)}} J_\alpha(\sigma_4)$.

Отсюда и из (25), (26) следует

$$J_4^{(3)}(\alpha) \le \check{J}_4^{(3)}(\alpha) \le \mathring{J}_4^{(3)}(\alpha) \le J_4^{(3)}(\alpha).$$

Из последнего неравенства получаем $J_4^{(3)}(\alpha) = \mathring{J}_4^{(3)}(\alpha)$. В силу теоремы 1 из работы [10] получаем равенство

$$\mathring{J}_4^{(3)}(\alpha) = J_4^{(6)}(\alpha). \tag{27}$$

На основании соотношения (27), теоремы 2 данной работы и теоремы 1 из [10] можно заключить, что утверждение теоремы 3 справедливо. Теорема 3 доказана.

5. Доказательство теоремы 4. Так как $\widetilde{\sum}_2 \subset \hat{\sum}_2$, то очевидно

$$\tilde{J}_2(\alpha) \le \hat{J}_2(\alpha). \tag{28}$$

В силу замечания к доказательству теоремы 1, любая экстремальная пара $\sigma_2 = (F_2, A_2) \in \hat{\sum}_2$ ассоциирована с квадратичным дифференциалом

$$Q(w)\,dw^2 = -2\left\{\frac{a_1}{(a_1-w)^2} + \frac{\delta a_2}{(a_2-w)^2}\right\}\frac{dw^2}{w} \tag{29}$$

в том смысле, что точечная составляющая σ_2 и вектор α задают этот дифференциал, а непрерывная составляющая $F_2 = \{B_1, B_2\}$ является допустимым семейством областей относительно дифференциала (29).

Производя заполнение всех несущественных граничных компонент, кроме той, что содержит 0 и ∞, получаем пару

$$\tilde{\sigma}_2 = (\tilde{F}_2, A_2) = (\{\tilde{B}_k\}_{k=1}^2, A_2) \in \hat{\sum}_2,$$

где $\tilde{B}_k$, по-прежнему, обозначает область B_k, заполненную таким образом.

Так как

$$r(B_k, a_k) \le r(\tilde{B}_k, a_k), \quad k = 1, 2, \tag{30}$$

то пара $\tilde{\sigma}_2$ экстремальна, а емкость заполненных компонент равна нулю.

Выполняя круговую симметризацию области $\tilde{B}_1$ относительно начала координат и положительной полуоси, а области $\tilde{B}_2$ относительно начала координат и отрицательной полуоси, получаем пару $\sigma_2^* = (F_2^*, A_2^*) = (\{B_k^*\}_{k=1}^2, \{-1, 1\}) \in \widetilde{\sum}_2$ и такую, что

$$r(\tilde{B}_k, a_k) \le r(B_k^*, (-1)^{k-1}), \quad k = 1, 2. \tag{31}$$

Поскольку пара $\sigma_2^* = (F_2^*, A_2^*) \in \widetilde{\sum}_2$, то из неравенства (31) получаем неравенство

$$\hat{J}_2(\alpha) \le \tilde{J}_2(\alpha). \tag{32}$$

Сравнивая соотношения (28) и (32), приходим к выводу, что

$$\hat{J}_2(\alpha) = \tilde{J}_2(\alpha).$$

Ввиду того, что $\sigma_2 = (F_2, A_2)$ — экстремальная пара, в неравенствах (30) и (31) реализуется равенство

$$r(B_k, a_k) = r(\tilde{B}_k, a_k) = r(B_k^*, (-1)^{k-1}), \quad k = 1, 2.$$

Из свойств емкости следует, что емкость замкнутого множества, составленного из всех несущественных граничных компонент, равна нулю, а из результатов о единственности при симметризации [5] получаем, что одной из экстремальных пар является пара, непрерывная составляющая которой образуется круговыми областями квадратичного дифференциала (9)

$$Q(w)\,dw^2 = \frac{(\delta-1)w^2 - 2(\delta+1)w + (\delta-1)}{w(w^2-1)^2}\,dw^2,$$

а точечная составляющая — $A_2 = \{-1\,,\,1\}$, причем $-1 \in B_2$, $1 \in B_1$. Все остальные экстремальные пары, после заполнения всех несущественных граничных компонент, совпадают с этой парой с точностью до вращения вокруг начала координат. Теорема 4 доказана.

1. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – **5**. – С. 159–245.
2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
3. *Лебедев Н. А.* Принцип площадей в теории однолистных функций. – М.: Наука, 1975. – 336 с.
4. *Кузьмина Г. В.* Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы. – Л.: Наука, 1980. – 241 с.
5. *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.
6. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Владивосток, 1988. – 193 с.
7. *Бахтина Г. П.* Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1974. – 125 с.
8. *Бахтина Г. П.* О конформных радиусах симметричных неналегающих областей // Современные вопросы вещественного и комплексного анализа. – 1984. – С. 21–27.
9. *Бахтина Г. П., Бахтин А. К.* Об экстремальных задачах для симметричных неналегающих областей // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 2. – С. 179–185.
10. *Бахтин А. К.* О произведении внутренних радиусов симметричных неналегающих областей // Там же. – № 11. – С. 1454–1464.
11. *Куфарев П. П., Фалес А. Э.* Об одной экстремальной задаче для дополнительных областей // Докл. АН СССР. – 1951. – **81**, № 6. – С. 995–998.
12. *Колбина Л. И.* Конформное отображение единичного круга на неналегающие области // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1955. – **5**. – С. 37–43.
13. *Schiffer M.* A method of variation within the family of simple functions // Proc. London Math. Soc. – 1938. – **44**. – P. 432–449.
14. *Duren P. L., Schiffer M.* A variation method for functions schlicht in an annulus // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1962. – **9**. – P. 260–272.
15. *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **168**. – С. 48–66.
16. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – **49**, № 1 (295). – С. 3–76.

Получено 31.03.97