УДК 512.554

А. П. Петравчук (Нац. ун-т им. Т. Шевченко, Киев)

О СУММЕ ПОЧТИ АБЕЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ И АЛГЕБРЫ ЛИ, КОНЕЧНОМЕРНОЙ НАД СВОИМ ЦЕНТРОМ *

We consider the Lie algebra L over an arbitrary field which is decomposable into the sum $L = A + B$ of almost Abelian subalgebra A and subalgebra B finite-dimensional over its center. We prove that this algebra is almost solvable, i.e. contains a solvable ideal of finite codimension. In particular, the sum of the Abelian and almost Abelian Lie algebras is an almost solvable Lie algebra.

Доведено, що алгебра Лі L над довільним полем, що розкладається в суму $L = A + B$ майже абелевої підалгебри A і скінченновимірної над своїм центром підалгебри B, майже розв'язна, тобто містить розв'язний ідеал скінченної ковимірності. Зокрема, сума абелевої та майже абелевої алгебр Лі є майже розв'язною алгеброю Лі.

1. Аналог известной теоремы Н. Ито [1] из теории групп о разрешимости произведения двух абелевых групп справедлив и для алгебр Ли: алгебра Ли, разложимая в сумму двух своих абелевых подалгебр, разрешима (ступени ≤ 2) (см. [2]). В общем случае неизвестно, будет ли почти разрешимым произведение двух почти абелевых групп (вопрос 7.55 из [3]), но для линейных групп положительный ответ на этот вопрос содержится в [4]. Поэтому аналогичный вопрос для алгебр Ли представляется интересным (алгебру Ли над полем будем называть почти абелевой, если она содержит абелев идеал конечной размерности). Следующая теорема, являющаяся основным результатом работы, дает частичный ответ на этот вопрос (в случае, когда в одном из слагаемых абелев идеал конечной коразмерности лежит в его центре).

Теорема. *Пусть L — алгебра Ли над произвольным полем, разложимая в сумму $L = A + B$ конечномерной над своим центром подалгебры A и почти абелевой подалгебры B. Тогда алгебра L почти разрешима (т. е. содержит разрешимый идеал конечной коразмерности).*

Следствие 1. *Сумма абелевой и почти абелевой алгебр Ли почти разрешима.*

Отметим, что изучению сумм двух абелевых алгебр Ли посвящена работа [5].

Доказательству теоремы предпошлем ряд лемм, в основном, технического характера. Все алгебры Ли рассматриваются над произвольным полем K, все произведения левонормированные. Алгебра Ли L называется конечномерной над своим центром, если $\dim L/Z(L) < \infty$, где $Z(L)$ — центр алгебры L. Если U и V — некоторые K-подпространства алгебры Ли L, то будем говорить, что U конечномерно над V, если $\dim (U + V)/V < \infty$. Через $s(L)$ будем обозначать ступень разрешимости (разрешимой) алгебры Ли L.

Лемма 1. *Пусть L — алгебра Ли, M, N — ее абелевы подалгебры, $m_1, m_2 \in M$, $n_1, n_2 \in N$ — произвольные элементы. Тогда:*

1) *если $[m_1, n_2]$ и $[m_2, n_1]$ принадлежат $M + N$, то $[[m_1, n_1], [m_2, n_2]] = 0$;*

2) *если T — идеал алгебры L, содержащийся в K-подпространстве $M + N$, то идеал T разрешим и $s(T) \leq 2$.*

Доказательство. Следуя рассуждениям Н. Ито из [1] (см. также, например, [6], теорема 3.1), обозначим

* Выполнена во время пребывания в университете г. Фрайбурга при поддержке Немецкого исследовательского общества (DFG). Автор благодарен DFG за поддержку и проф. О. Х. Кегелю за гостеприимство и помощь.

$$[m_1, n_2] = m^* + n'', \quad [m_2, n_1] = m'' + n^*,$$

где $m^*, m'' \in M$, $n^*, n'' \in N$. Очевидно,

$$[[m_1, n_1], [m_2, n_2]] = [m_1, n_1, m_2, n_2] - [m_1, n_1, n_2, m_2]$$

и поэтому ввиду абелевости подалгебр M и N получим

$$[m_1, n_1, m_2, n_2] = [m_2, n_1, m_1, n_2] = [m'' + n^*, m_1, n_2] =$$
$$= [n^*, m_1, n_2] = [n_2, m_1, n^*] = [-(m^* + n''), n^*] = -[m^*, n^*].$$

Аналогично имеем

$$[m_1, n_1, n_2, m_2] = [m_1, n_2, n_1, m_2] = [m^* + n'', n_1, m_2] =$$
$$= [m^*, n_1, m_2] = [m_2, n_1, m^*] = [m'' + n^*, m^*] = [n^*, m^*] = -[m^*, n^*].$$

Отсюда, очевидно, следует $[[m_1, n_1], [m_2, n_2]] = 0$.

2. Пусть $T_M = M \cap (T + N)$ и $T_N = N \cap (T + M)$. Очевидно, T_M и T_N — абелевы подалгебры из L и, как нетрудно убедиться, $T_M + T_N$ — подалгебра из L, содержащая идеал T. Ввиду [2] подалгебра $T_M + T_N$ разрешима ступени ≤ 2. Но тогда разрешим и идеал T и $s(T) \leq 2$. Лемма доказана.

По аналогии с теорией групп FC-центром алгебры Ли L будем называть множество $FC(L)$ всех элементов из L, централизаторы которых в L имеют конечные коразмерности. $FC(L)$ есть характеристический идеал алгебры L. FC-алгеброй Ли (идеально конечной в терминологии [7]) будем называть алгебру Ли, совпадающую со своим FC-центром. В следующей лемме собраны основные разультаты работы [8], которые используются в настоящей работе.

Лемма 2 [8]. *Пусть L — алгебра Ли над произвольным полем. Тогда*:

а) если алгебра L почти разрешима, то L содержит разрешимый характеристический идеал конечной коразмерности;

б) если L содержит разрешимую подалгебру конечной коразмерности, то L почти разрешима (если отмеченная подалгебра абелева, то L почти абелева, т. е. содержит абелев идеал конечной коразмерности);

в) если L содержит почти разрешимый идеал I с почти разрешимой фактор-алгеброй L/I, то L почти разрешима.

Лемма 3. *Пусть L — алгебра Ли, разложимая в сумму $L = A + B$ своих почти абелевых подалгебр A и B.* Тогда *FC-центр $I = FC(L)$ алгебры L является почти разрешимым идеалом алгебры L.*

Доказательство. Пусть M и N — произвольные абелевы идеалы подалгебр соответственно A и B такие, что $\dim A/M + \dim B/N < \infty$. Тогда, очевидно, для идеала $I = FC(L)$ справедливо $\dim I/(I \cap (M + N)) < \infty$. Рассмотрим произвольный элемент $g_0 = m_0 + n_0 \in I \cap (M + N)$, где $m_0 \in M$, $n_0 \in N$. Так как $\dim N/C_N(g_0) < \infty$ и $\dim N/C_N(n_0) < \infty$, то, очевидно, $\dim N/C_N(m_0) < \infty$ и поэтому ввиду абелевости идеала M получим $m_0 \in FC(L) = I$. Тогда и $n_0 \in I$ и, следовательно, подалгебры $A_0 = I \cap M$ и $B_0 = I \cap N$ имеют конечные коразмерности соответственно в $I_A = A \cap (I + B)$ и $I_B = B \cap (I + A)$. Легко видеть, что $L_0 = I_A + I_B$ — подалгебра из L, $A_0 + B_0 \subseteq FC(L_0)$ и $\dim L_0/(A_0 + B_0) < \infty$. Пусть $\{g_1, \ldots, g_n\}$ — полная система представителей смежных классов $FC(L_0)/(A_0 + B_0)$ (здесь $A_0 + B_0$ — K-подпространство из $FC(L)$).

Ввиду теоремы 3.2 из [7] элементы $g_1, \ldots, g_n$ содержатся в некотором конечномерном идеале S алгебры $FC(L_0)$ и поэтому $FC(L_0)/S$ разложима в сумму двух абелевых подалгебр A_0+S/S и B_0+S/S. Но тогда $FC(L_0)/S$ разрешима (см. [2]) и из леммы 2 следует, что $FC(L_0)$ почти разрешима и L_0 почти разрешима, так как $\dim L_0/FC(L_0) < \infty$. Поскольку $I \subseteq L_0$, то $I = FC(L_0)$ — почти разрешимый идеал алгебры L. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть L — алгебра Ли, разложимая в сумму $L = A + B$ своих почти абелевых подалгебр A и B, I — идеал алгебры L, являющийся суммой почти разрешимых идеалов алгебры L. Если $L = A + I = B + I$, то алгебра L почти разрешима.*

Доказательство. Пусть лемма неверна. Выберем алгебру Ли $L = A + B = A + I = B + I$, которая не почти разрешима с наименьшим числом $\dim L/(M + N)$, где M и N — абелевы идеалы подалгебр A и B соответственно. Так как A и B почти абелевы, то это число существует, обозначим его через $n = \dim L/(M+N)$. Обозначим через T сумму всех идеалов алгебры L, содержащихся в K-подпространстве $M+N$. Ввиду леммы 1 идеал T разрешим и поэтому фактор-алгебра $\overline{L} = L/T$ не почти разрешима (см. лемму 2). Поскольку $\overline{L} = \overline{A} + \overline{B} = \overline{A} + \overline{I} = \overline{B} + \overline{I}$, где $\overline{A} = A + T/T$, $\overline{B} = B + T/T$, $\overline{I} = I + T/T$, то, не теряя общности, можно считать $\overline{L} = L$, т. е. $T = 0$.

Покажем, что фактор-алгебра L/J почти разрешима для любого ненулевого идеала $J \subseteq L$. Действительно, в силу выбора алгебры L справедливо соотношение $J \not\subseteq M+N$ и, следовательно, $\dim L/(M+N+J) < n$. Но тогда в фактор-алгебре L/J K-подпространство $M+N+J/J$ имеет коразмерность $<n$, и поэтому ввиду выбора алгебры L фактор-алгебра L/J почти разрешима. Возьмем теперь какой-нибудь ненулевой почти разрешимый идеал $I_0 \subseteq I$ алгебры L (он существует, так как $L \neq A$ и поэтому $I \neq 0$). Согласно доказанному выше, фактор-алгебра L/I_0 почти разрешима и тогда ввиду леммы 2 L почти разрешима. Это невозможно в силу выбора L, и из полученного противоречия следует справедливость леммы.

Следствие 2. *Пусть L — алгебра Ли, разложимая в сумму $L = A + B$ своих почти абелевых подалгебр A и B. Тогда сумма всех почти разрешимых идеалов алгебры L является почти разрешимым идеалом из L.*

Доказательство. Обозначим через S сумму всех почти разрешимых идеалов алгебры L. Положим $S_A = A \cap (S+B)$, $S_B = B \cap (S+A)$. Тогда, как легко видеть, $S_A + S_B$ — подалгебра из L и $S \subseteq S_A + S_B$. Поскольку, очевидно,

$$S_A + S_B = S + S_A = S + S_B,$$

то ввиду леммы 4 подалгебра $S_A + S_B$ почти разрешима. Но тогда почти разрешим и идеал S. Следствие доказано.

Лемма 5. *Если алгебра Ли L разложима в сумму $L = A + B$ некоторых своих подалгебр A и B и N — идеал алгебры B, то K-подпространство*

$$L_0 = B + [A,N] + [A,N]^2 + \ldots + [A,N]^k + \ldots$$

является подалгеброй в L и $L_0 \subseteq B + [A,N] + A^2$.

Доказательство. Используя соотношение $[A, N, B] \subseteq N + [A, N]$, нетрудно убедиться, что $[[A, N]^k, B] \subseteq N + [A, N] + [A, N]^2 + \ldots + [A, N]^k$. Отсюда следует, что L_0 —подалгебра в L. Далее, из легко проверяемого тождества

$$[a_1 + b_1, a_2 + b_2] = [a_1, a_2] - [b_1, b_2] + [a_1 + b_1, b_2] - [a_2 + b_2, b_1] \quad (1)$$

следует, что $[A, N]^2 \subseteq B + [A, N] + A^2$. Применяя тождество (1) к $[[A, N]^2, [A, N]] = [A, N]^3$, убеждаемся, что $[A, N]^3 \subseteq B + [A, N] + [A, N]^2 + A^2$. Согласно доказанному выше, правая часть последнего соотношения содержится в $B + [A, N] + A^2$. Индукцией по n легко доказать, что $[A, N]^n \subseteq B + [A, N] + A^2$ для любого натурального n. Отсюда следует, что $L_0 \subseteq B + [A, N] + A^2$. Лемма доказана.

***Замечание* 1.** В дальнейшем будем использовать следующее **утверждение:** *пусть алгебра Ли L разложима в сумму $L = A + B$ своих подалгебр A и B и L_0 — подалгебра из L вида $L_0 = A_0 + B$, $A_0 \subseteq A$. Тогда $A_0 \cap Z(A)$ содержится в некотором идеале I_0 алгебры L, лежащем в L_0.*

Для доказательства достаточно, следуя [9], рассмотреть фильтрацию алгебры L по L_0

$$L = L_{-1} \supseteq L_0 = A_0 + B \supseteq L_1 \supseteq \ldots \supseteq L_k \supseteq \ldots,$$

где $L_{i+1} = \{x \in L_i \mid [x, L_{-1}] \subseteq L_i\}$. Тогда $A_0 \cap Z(A) \subseteq L_i$ для $i \geq 0$ и поэтому $A_0 \cap Z(A) \subseteq \bigcap_{i \geq 0} L_i$. Пересечение $I_0 = \bigcap_{i \geq 0} L_i$ является, очевидно, идеалом в L и $A_0 \cap Z(A) \subseteq I_0$.

***Замечание* 2.** Следующее почти очевидное **утверждение** мы часто будем использовать в дальнейшем (иногда без ссылок): *пусть L — алгебра Ли и N — K-подпространство из L конечной коразмерности. Тогда для произвольного элемента $g \in L$ существует K-подпространство $N_g \subseteq N$ конечной коразмерности в N такое, что $[N_g, g] \subseteq N$.*

Определение 1. *Пусть L — алгебра Ли над произвольным полем, разложимая в сумму $L = A + B$ своих подалгебр A и B, где A — конечномерная над своим центром алгебра и B почти абелева. Алгебру L будем называть минимальным SF-контрпримером, если она удовлетворяет условиям:*

1) L не содержит ненулевых почти разрешимых идеалов, в частности L не является почти разрешимой алгеброй;

2) подалгебра B не содержится в большей почти абелевой подалгебре из L.

Лемма 6. *Пусть L — алгебра Ли, разложимая в сумму $L = A + B$ своих почти абелевых подалгебр A и B, M и N — некоторые абелевы идеалы конечной коразмерности подалгебр A и B соответственно. Если для каждого элемента $a \in A$ K-подпространство $[a, N]$ конечномерно над N, то алгебра L почти разрешима.*

Доказательство. Из соотношения $[N, A, B] \subseteq N + [N, A]$ следует, что K-подпространство

$$I = N + [N, A] + [N, A, A] + \ldots + \underbrace{[N, A, \ldots, A]}_{k} + \ldots$$

является идеалом алгебры L. Покажем, что $\dim N / C_N(g) < \infty$ для произвольного элемента $g \in I$. Обозначим

$$I_0 = N, \quad I_1 = I_0 + [I_0, A], \ldots, \quad I_k = I_{k-1} + [I_{k-1}, A].$$

Очевидно, $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. Индукцией по k покажем, что для любого элемента $n_k \in I_k$ справедливо соотношение $\dim N/C_N(n_k) < \infty$. Утверждение это очевидно для $k=0$. Пусть оно уже доказано для всех элементов из I_{k-1}, докажем его для элементов из I_k. Достаточно показать, что для произвольных элементов $x \in I_{k-1}$, $a \in A$ справедливо неравенство $\dim N/C_N([x, a]) < \infty$. Обозначим $N_1 = C_N(x)$. По индуктивному предположению $\dim N/N_1 < \infty$. Поскольку $[a, N]$ конечномерно над N, то, как нетрудно видеть, существует K-подпространство $N_2 \subseteq N_1$ такое, что $\dim N_1/N_2 < \infty$ и $[N_2, a] \subseteq N_1$. Тогда для любого элемента $n_2 \in N_2$ имеем

$$[x, a, n_2] = [x, n_2, a]+[n_2, a, x] \in [x, N_1, a]+[x, N_1] = 0$$

и, следовательно, $[x, a, n_2] = 0$ для любого $n_2 \in N_2$. Таким образом, $\dim N/C_N([x, a]) < \infty$ (поскольку $\dim N/N_2 < \infty$) и поэтому $\dim N/C_N(g) < \infty$ для любого $g \in I$. Пусть $U = I \cap (M+N)$. Очевидно, $\dim I/U < \infty$ и согласно доказанному выше $\dim N/C_N(u) < \infty$ для любого $u \in U$. Так как I — идеал алгебры L, то $L_0 = I + B$ — подалгебра из L. Легко видеть, что $L_0 = A_0 + B$, где $A_0 = L_0 \cap A$. Очевидно также, что $\dim L_0/I < \infty$ и поэтому $\dim L_0/U < \infty$. Отсюда следует, что $\dim A_0/(A_0 \cap U) < \infty$ и, значит, $\dim A_0/(A_0 \cap U \cap M) < < \infty$. Легко видеть, что любой элемент из K-подпространства $A_0 \cap U \cap M$ лежит в $FC(L)$ и, следовательно, $\dim A_0/(A_0 \cap FC(L)) < \infty$. Но тогда фактор-алгебра $\overline{L}_0 = L_0/(L_0 \cap FC(L))$ содержит почти разрешимую подалгебру $\overline{B} = B + (L_0 \cap FC(L))/L_0 \cap FC(L)$, $\dim \overline{L}_0/\overline{B} < \infty$ и поэтому $\overline{L}_0$ почти разрешима ввиду леммы 2. Поскольку идеал $L_0 \cap FC(L)$ алгебры L_0 почти разрешим ввиду леммы 3, то подалгебра L_0 также почти разрешима. Но тогда почти разрешим и идеал I. При этом фактор-алгебра L/I содержит почти разрешимую подалгебру $A + I/I$ конечной коразмерности и поэтому L/I почти разрешима. Отсюда ввиду леммы 2 следует, что почти разрешима и алгебра L. Лемма доказана.

***Следствие* 3.** *Пусть L — алгебра Ли, разложимая в сумму $L = A + B$ двух своих почти абелевых подалгебр A и B, M и N — абелевы идеалы из A и B соответственно такие, что $\dim A/M + \dim B/N < \infty$. Если $L_0 = \{ g \in L \mid [g, N]$ конечномерно над $N \}$, то L_0 — почти разрешимая подалгебра из L.*

Доказательство. Пусть $g_1, g_2 \in L$ — произвольные элементы, $N_1 \subseteq N$, $N_2 \subseteq N$ — подпространства из N конечной коразмерности в N такие, что $[N_1, g_1] \subseteq N$ и $[N_2, g_2] \subseteq N$ (они существуют ввиду замечания 2). Поскольку $\dim N/(N_1 \cap N_2) < \infty$ и $[N_1 \cap N_2, g_1 + g_2] \subseteq N$, то $g_1 + g_2 \in L_0$. Далее, пусть $N_1' \subseteq N_1$ и $N_2' \subseteq N_2$ — такие подпространства, что $\dim N_1/N_1' + \dim N_2/N_2' < \infty$ и $[N_1', g_2] \subseteq N_1$, $[N_2', g_1] \subseteq N_2$. Тогда $\dim N/(N_1' \cap N_2') < \infty$ и, как нетрудно убедиться,

$$[N_1' \cap N_2', [g_1, g_2]] \subseteq [N_1' \cap N_2', g_1, g_2] + [N_1' \cap N_2', g_2, g_1] \subseteq N.$$

Отсюда следует, что $[g_1, g_2] \in L_0$ и поэтому L_0 — подалгебра из L. Очевидно, $L_0 \supseteq B$ и, значит, $L_0 = A_0 + B$, где $A_0 = A \cap L_0$. Кроме того, подалгебра L_0 почти разрешима ввиду леммы 6.

Лемма 7. *Пусть* $L = A + B$ — *минимальный* SF-*контрпример, где* A — *конечномерная над своим центром подалгебра из* L, *и* B — *почти абелева подалгебра из* L. *Если* N — *абелев идеал из* B *с* $\dim B/N < \infty$, *то для любого* $a \in A$, $a \notin B$ *подпространство* $[a, N]$ *бесконечномерно над* N.

Доказательство. Пусть лемма неверна и для некоторого элемента $a_0 \in A - B$ справедливо $\dim(N + [a_0, N])/N < \infty$. Множество $L_0 = \{ g \in L \mid [g, N]$ конечномерно над $N\}$ является ввиду следствия 3 почти разрешимой подалгеброй из L, при этом $L_0 = B + A_0$, где $A_0 = A \cap L_0$. Легко видеть, что $\dim L_0/B = \infty$. Действительно, если $\dim L_0/B < \infty$, то L_0 содержит абелеву подалгебру N с $\dim L_0/N < \infty$. Тогда ввиду леммы 2 L_0 почти абелева и $L_0 \supsetneq B$, что противоречит выбору подалгебры B в минимальном SF-контрпримере L. Поэтому $\dim L_0/B = \infty$ и, следовательно, $A_0 \cap Z(A) \neq 0$. Ввиду замечания 1 $A_0 \cap Z(A)$ содержится в некотором почти разрешимом идеале алгебры L (отличном от 0), что невозможно ввиду выбора L. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть* L — *алгебра Ли, разложимая в сумму* $L = A + B$, *где* A — *конечномерная над своим центром подалгебра,* B — *почти абелева подалгебра и* N — *абелев идеал из* B *с* $\dim B/N < \infty$. *Если* $[A, N] \cap N = 0$, *то* B *и* $[A, N]$ *порождают почти разрешимую подалгебру из* L.

Доказательство. Пусть $a_0 \in A$, $n_0 \in N$ — произвольные элементы и $[a_0, n_0] = a' + b_0$, где $a' \in A$, $b_0 \in B$. Покажем, что $\dim N/C_N(b_0) < \infty$. Пусть $N_1 = \{ n \in N \mid [a_0, n] \in A + N$ и $[a', n] \in A + N\}$. Поскольку $\dim L/(A + N) < \infty$, то, как нетрудно убедиться, $\dim N/N_1 < \infty$. Для произвольного элемента $n_1 \in N_1$ имеем

$$[a_0, n_0, n_1] = [b_0 + a', n_1] = [b_0, n_1] + [a', n_1].$$

Ввиду абелевости подалгебры N имеем

$$[a_0, n_0, n_1] = [a_0, n_1, n_0] = [a_2 + n_2, n_0] = [a_2, n_0]$$

для некоторых $a_2 \in A$, $n_2 \in N$. Отсюда следует, что

$$[b_0, n_1] = [a_2, n_0] - [a', n_1] \in [A, N] \cap N = 0.$$

Тогда $N_1 \subseteq C_N(b_0)$ и, следовательно, $\dim N/C_N(b_0) < \infty$. Очевидно,

$$[A, N, B] \subseteq [A, N] + N \tag{2}$$

и поэтому из тождества (1) следует, что для любого элемента $g_2 = a_2 + b_2$, $a_2 \in A$, $b_2 \in B$ из $[A, N]^2$ справедливо $\dim N/C_N(b_2) < \infty$. Так же можно показать, что для произвольного $g_k = a_k + b_k \in [A, N]^k$ с $a_k \in A$, $b_k \in B$ справедливо $\dim N/C_N(b_k) < \infty$, $k = 3, \ldots$. Ввиду леммы 5

$$L_0 = B + [A, N] + [A, N]^2 + \ldots + [A, N]^k + \ldots$$

является подалгеброй в L и $L_0 \subseteq B + [A, N] + A^2$. Так как $\dim A/Z(A) < \infty$, то, как нетрудно убедиться, $\dim A^2 < \infty$ и поэтому $\dim L_0/(B + [A, N]) < \infty$. Легко видеть, что

$$I = N + [A, N] + [A, N]^2 + \ldots + [A, N]^k + \ldots$$

является идеалом алгебры L_0. Поскольку $L_0 \supseteq B$, то $L_0 = A_0 + B$, где $A_0 =$

$=A\cap L_0$. Обозначим $I_{A_0}=A_0\cap(I+B)$ и $I_B=B\cap(I+A_0)$. Тогда, как легко видеть, $I_{A_0}+I_B$ — подалгебра из L_0 и согласно доказанному выше для любого элемента $b\in I_B$ справедливо $\dim N/C_N(b)<\infty$. Так как подалгебра I_B почти абелева, то из последнего неравенства вытекает $\dim I_B/Z(I_B)<\infty$. Для подалгебры I_{A_0} также $\dim I_{A_0}/Z(I_{A_0})<\infty$, и так как коммутанты подалгебр I_{A_0} и I_B конечномерны, то в силу теоремы 1 из [10] сумма $I_{A_0}+I_B$ почти разрешима. Отсюда следует, что идеал $I\subseteq I_{A_0}+I_B$ почти разрешим. В фактор-алгебре $\overline{L}_0=L_0/I$ подалгебра A_0+I/I имеет конечную коразмерность (так как $I\supseteq N$) и поэтому ввиду леммы 2 $\overline{L}_0$ почти разрешима. Но тогда почти разрешима и подалгебра L_0, содержащая B и $[A,N]$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть* $L=A+B$ — *минимальный* SF*-контрпример с* $\dim A/Z(A)<\infty$, $\dim B/N<\infty$ *для некоторого абелевого идеала* N *из* B *и* $N_0=\{n\in N\mid [A,n]$ *конечномерно над* $N\}$. *Тогда* $([A,N]\cap N)\subseteq N_0$, N_0 — *идеал из* B *и* $[A,N_0]\subseteq B$.

Доказательство. Пусть n_0 — произвольный элемент из $[A,N]\cap N$. Тогда $n_0=\sum_{i=1}^k [a_i,n_i]$ для некоторых элементов $a_i\in A$, $n_i\in N$, $i=1,\dots,k$. Пусть $A_0=\{a\in Z(A)\mid [a,n_i]\in Z(A)+N,\ i=1,\dots,k\}$. Очевидно, A_0 — K-подпространство из $Z(A)$ и $\dim Z(A)/A_0<\infty$. Далее, пусть $N_1=\{n\in N\mid [a_i,n]\in Z(A)+N,\ i=1,\dots,k\}$. Аналогично, справедливо соотношение $\dim N/N_1<\infty$. Покажем, что $[[A_0,N_1],n_0]=0$. Действительно, рассмотрим произвольные элементы $a_0\in A_0\subseteq Z(A)$ и $n_0\in N_1$. Тогда

$$[[a_0,n_0],[a_i,n_i]] = [a_0,n_0,a_i,n_i]-[a_0,n_0,n_i,a_i].$$

Обозначим $[a_0,n_i]=m_i^*+n_i''$, $m_i^*\in Z(A)$, $n_i''\in N$ и $[a_i,n_0]=m_i''+n_i^*$, где $m_i''\in Z(A)$, $n_i^*\in N$, $i=1,\dots,k$. Повторяя рассуждения из леммы 1, убеждаемся, что

$$[a_0,n_0,a_i,n_i]=-[m_i^*,n_i^*],\quad [a_0,n_0,n_i,a_i]=-[m_i^*,n_i^*],\ i=1,\dots,k.$$

Следовательно, $[[a_0,n_0],[a_i,n_i]]=0$ для всех $i=1,\dots,k$ и поэтому $[[A_0,N_1],n_0]=0$. Отсюда следует $[A_0,n_0,N_1]=0$. Покажем, что K-подпространство $V=[A_0,n_0]\cap(Z(A)+N)$ содержится в N. Действительно, если $v\in V$ — произвольный элемент, то $v=a'+n'$, $a'\in Z(A)$, $n'\in N$ и поэтому из равенства $[v,N_1]=0$ следует $[a',N_1]=0$. Поскольку $a'\in Z(A)$ и $\dim N/N_0<\infty$, то $a'\in FC(L)$. Ввиду леммы 3 $FC(L)$ — почти разрешимый идеал алгебры L и ввиду выбора L имеем $FC(L)=0$. Но тогда $a'=0$ и, следовательно, $v=n'\in N$. Ввиду произвольности элемента v имеем $V\subseteq N$. Поскольку $\dim L/(Z(A)+N)<\infty$, то $\dim[A_0,n_0]/V<\infty$ и поэтому в A_0 существует некоторое K-подпространство A_0' такое, что $[A_0',n_0]\subseteq N$ и $\dim A_0/A_0'<\infty$. Ввиду соотношения $\dim A/A_0'<\infty$ (согласно доказанному выше $\dim A/A_0<\infty$) отсюда следует, что $[A,n_0]$ конечномерно над N и, значит, $n_0\in N_0$. Ввиду произвольности элемента n получим $([A,N]\cap N)\subseteq N_0$.

Покажем, что $[N_0,B]\subseteq N_0$. Действительно, пусть $n_0\in N_0$, $b\in B$ — произвольные элементы. Тогда $[n_0,b,A]\subseteq[n_0,A,b]+[n_0,[b,A]]$. Первое слагаемое в правой части этого соотношения конечномерно над N, а второе содержится в $[n_0, A+B] \subseteq [n_0, A]+N$ и поэтому также конечномерно над N. Следовательно, $[n_0, b, A]$ конечномерно над N и $[n_0, b] \in N_0$ для произвольного элемента $b \in B$.

Покажем, что $[A, N_0] \subseteq B$. Пусть, напротив, $[A, N_0] \not\subseteq B$. Ввиду леммы 5 $L_0 = B+[A, N_0]+[A, N_0]^2+\ldots+[A, N_0]^k+\ldots$ является подалгеброй в L и $L_0 \subseteq B + [A, N_0] + A^2$. Поскольку $\dim A/Z(A) < \infty$, то, как нетрудно убедиться, $\dim A^2 < \infty$ и поэтому $\dim L_0/(B+[A, N_0]) < \infty$. Так как L — минимальный SF-контрпример и $L_0 \neq B$, то $\dim L_0/B = \infty$ (в противном случае ввиду леммы 2 L_0 была бы почти абелевой подалгеброй в L, строго содержащей B, что невозможно). Отсюда следует, что $\dim([A, N_0]++B)/B = = \infty$ и поэтому $([A, N_0]+B) \cap Z(A) \neq 0$. Тогда для некоторого элемента $a_0 \in \in Z(A)$, $a_0 \neq 0$ имеем $a_0 = [a_1, n_1]+\ldots+[a_k, n_k]+b$, где $a_i \in A$, $n_i \in N_0$, $b \in B$, $i = 1, \ldots, k$. Отсюда получим

$$[a_0, N] = \sum_{i=1}^{k}[a_i, n_i, N]+[b, N] \subseteq \sum_{i=1}^{k}[a_i, N, n_i]+N.$$

При этом $[a_i, N, n_i] \subseteq [A+B, n_i]$ и, значит, $[a_i, N, n_i]$ конечномерно над N, $i = = 1, \ldots, k$. Но тогда $[a_0, N]$ конечномерно над N и поэтому $a_0 \in B$ ввиду леммы 7. Тогда $a_0 \in Z(A) \cap B$. Однако $Z(A) \cap B = 0$ (так как в противном случае ввиду замечания 1 $Z(A) \cap B$ содержалось бы в некотором почти разрешимом идеале алгебры L, что невозможно) и поэтому $a_0 = 0$. Полученное противоречие доказывает справедливость включения $[A, N_0] \subseteq B$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть утверждение теоремы неверно. Выберем какой-нибудь контрпример L и пусть I — сумма всех почти разрешимых идеалов алгебры L. Ввиду следствия 2 I — почти разрешимый идеал из L и поэтому ввиду выбора алгебры L фактор-алгебра $\bar{L} = L/I$ также является контрпримером к теореме, не содержащим ненулевых почти разрешимых идеалов. Не теряя общности, можно считать, что $L = \bar{L}$, т. е. L не содержит ненулевых почти разрешимых идеалов. Легко видеть, что тогда $B \cap Z(A) = 0$. Действительно, в противном случае $0 \neq B \cap Z(A)$ содержалось бы ввиду замечания 1 в некотором идеале I алгебры L таком, что $I \subseteq B$, что невозможно, так как L не содержит почти разрешимых идеалов, отличных от нуля. Пусть теперь $\tilde{B}$ — какая-нибудь максимальная подалгебра из L со свойствами: а) $\tilde{B} \supseteq \supseteq B$; б) $\tilde{B} \cap Z(A) = 0$ (она существует, поскольку $\dim L/(B+Z(A)) < \infty$). Легко видеть, что $\dim \tilde{B}/B < \infty$ и поэтому ввиду леммы 2 подалгебра $\tilde{B}$ почти абелева. Но тогда $L = A+\tilde{B}$ — минимальный SF-контрпример и, не теряя общности, можно считать в дальнейшем, что $B = \tilde{B}$.

Ввиду леммы 5 $L_0 = B+[A, N]+[A, N]^2+\ldots+[A, N]^k+\ldots$ является подалгеброй из L. Покажем, что подалгебра L_0 не является почти разрешимой. Действительно, пусть это не так и L_0 почти разрешима. Ввиду выбора подалгебры B в L справедливо $\dim L_0/B = \infty$. В самом деле, в противном случае $L_0 = B$ (ввиду выбора подалгебры B в L) и поэтому $[A, N] \subseteq B$, что невозможно ввиду следствия 3. Поэтому $L_0 \cap Z(A) \neq 0$ и в силу замечания 1 алгебра L содержит идеал J, содержащийся в L_0 такой, что $L_0 \cap Z(A) \subseteq J$. Последнее невозможно, так как тогда J — почти разрешимый ненулевой идеал алгебры L и полученное противоречие доказывает утверждение, что L_0 не является почти разрешимой алгеброй. Так как $L_0 \supseteq B$, то, очевидно, $L_0 = A_0 + B$, где $A_0 = A \cap L_0$. В силу леммы 8 справедливо неравенство $[A, N] \cap N \neq 0$. Пусть $N_0 = \{ n \in N \mid [A, n]$ конечномерно над $N\}$. В силу леммы 9 $([A, N] \cap N) \subseteq N_0$ и поэтому $N_0 \neq 0$. Покажем, что N_0 — идеал подалгебры L_0. Действительно, ввиду леммы 9 $[N_0, B] \subseteq N_0$ и $[A, N_0] \subseteq B$. Очевидно также включение $[A, N, N_0] = [A, N_0, N] \subseteq N$. Если $g = a + b$ $(a \in A, b \in B)$ — произвольный элемент K-подпространства $[A, N]$, то $[a, N_0] \subseteq N \cap [A, N] \subseteq N_0$ и отсюда следует $[[A, N], N_0] \subseteq N_0$. Далее,

$$[[A, N]^2, N_0] \subseteq [[A, N], N_0, [A, N]] + [N_0, [A, N], [A, N]] \subseteq [N_0, [A, N]] \subseteq N_0.$$

Аналогично можно показать, что $[[A, N]^k, N_0] \subseteq N_0$. Отсюда следует, что N_0 — идеал подалгебры L_0. Фактор-алгебра $\overline{L}_0 = L_0/N_0$, очевидно, не является почти разрешимой и $\overline{L}_0 = \overline{A}_0 + \overline{B}$, где $\overline{A}_0 = A_0 + N_0/N_0$, $\overline{B} = B/N_0$. Покажем, что $[\overline{A}_0, \overline{N}] \cap \overline{N} = \overline{0}$, где $\overline{N} = N/N_0$. Действительно, пусть это не так и для некоторого элемента $n \in N$, $n \notin N_0$ справедливо равенство $n + n_0 = [a_1, n_1] + \ldots + [a_k, n_k] + n_0'$ для некоторых элементов $a_i \in A_0$, $n_i \in N$, $n_0, n_0' \in N_0$, $i = 1, \ldots, k$. Тогда элемент $n + n_0 - n_0'$ принадлежит $[A, N] \cap N$ и $n + n_0 - n_0' \notin N_0$, что невозможно в силу леммы 9. Следовательно, $[\overline{A}_0, \overline{N}] \cap \overline{N} = \overline{0}$. В силу леммы 8 $[\overline{A}_0, \overline{N}]$ и $\overline{B}$ содержатся в некотором почти разрешимом идеале $\overline{L}_1$ алгебры $\overline{L}_0$. Полный прообраз L_1 этой подалгебры в L_0 будет почти разрешимой подалгеброй, содержащей $[A_0, N]$ и B. Если $\dim L_1/B = \infty$, то $L_1 \cap Z(A) \neq 0$ и поэтому ввиду замечания 1 L содержит ненулевой почти разрешимый идеал, что невозможно. Следовательно, $\dim L_1/B < \infty$ и ввиду леммы 2 L_1 почти абелева. В силу выбора алгебры L имеем $L_1 = B$ и, следовательно, $[A_0, N] \subseteq B$. Но тогда ввиду леммы 7 $A_0 \subseteq B$. Отсюда следует $[A, N] \subseteq B$, и поэтому ввиду леммы 7 $A \subseteq B$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает теорему.

1. *Ito N.* Ueber das Produkt von zwei abelschen Gruppen // Math. Z. – 1955. – **62**, № 4. – S. 400 – 401.
2. *Kolman B.* Semi-modular Lie algebras // J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A1. – 1965. – **29**. – P. 149 – 163.
3. *Коуровская* тетрадь (Нерешенные вопросы теории групп). – 11 изд. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1990. – 126 с.
4. *Kegel O. H.* On the solvability of some factorized linear groups // Ill. J. Math. – 1965. – **9**, № 3. – P. 535 – 547.
5. *Bahturin Y., Kegel O. H.* Universal sums of Abelian subalgebras // Communs Algebra. – 1995. – **23**. – P. 2975 – 2990.
6. *Черников Н. С.* Группы, разложимые в произведение перестановочных подгрупп. – Киев: Наук. думка, 1987. – 206 с.
7. *Stewart I.* Lie algebras generated by finite dimensional ideals // Rez. Notes. Math. – 1972. – **2**.
8. *Петравчук А. П.* О бесконечномерных алгебрах Ли с разрешимыми идеалами конечной коразмерности // Алгебр. исслед. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1996. – С. 158 – 167.
9. *Кострикин А. И.* Критерий разрешимости конечномерной алгебры Ли // Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех. – 1982. – № 2. – С. 5 – 8.
10. *Петравчук А. П.* О сумме двух алгебр Ли с конечномерными коммутантами // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 8. – С. 1089 – 1096.

Получено 10.07.97