УДК 517.928

Т. А. Мельник (Одес. ун-т)

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ РАЗРЫВНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Asymptotic expansion is constructed for a solution of boundary-value problem for a singularly perturbed system of differential equations whose right-hand sides are discontinuous on certain surface.

Побудовано асимптотичне розвинення розв'язку крайової задачі для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з правою частиною, розривною на певній поверхні.

В данной работе метод пограничных функций А. Б. Васильевой [1] распространяется на нелинейные сингулярно возмущенные краевые задачи для систем, правые части которых имеют разрыв на некоторой поверхности. Асимптотическое разложение решения соответствующей задачи Коши получено в [2].

1. Постановка задачи. Пусть движение некоторого объекта на сегменте $I = [0, T]$ описывается системой дифференциальных уравнений

$$\mu \frac{dz}{dt} = F(z, y, t), \qquad \frac{dy}{dt} = f(z, y, t), \tag{1}$$

где

$$F \equiv \left\{ F^j(z, y, t) \middle| \; j = \operatorname{sign} \Phi(z, y, t) \right\},$$
$$f \equiv \left\{ f^j(z, y, t) \middle| \; j = \operatorname{sign} \Phi(z, y, t) \right\}, \tag{2}$$

$\mu > 0$ — малый параметр; z и F — M-мерные вектор-функции; y и f — m-мерные вектор-функции; $\Phi(z, y, t)$ — скалярная функция; $\Gamma = \left\{ (z, y, t) \middle| \; \Phi(z, y, t) = 0 \right\}$ — поверхность переключения. Краевые условия имеют вид

$$\Psi(x(0, \mu), x(T, \mu), \mu) = 0. \tag{3}$$

Здесь Ψ — $(M + m)$-мерная вектор-функция, $x = (z, y)$. Решение $x(t, \mu)$ краевой задачи (1) – (3) рассматривается в классе абсолютно непрерывных функций, удовлетворяющих условию (3) и почти всюду на I системе уравнений (1). Предположим, что для любого $\bar{y}_0^0$ существует решение вырожденной задачи

$$0 = F(\bar{z}_0(t), \bar{y}_0(t), t), \qquad \frac{d\bar{y}_0}{dt} = f(\bar{z}_0(t), \bar{y}_0(t), t), \qquad \bar{y}_0(0) = \bar{y}_0^0, \tag{4}$$

пересекающее поверхность Γ в некоторый момент времени $t_0^1 \in \operatorname{int} I$. Кроме пограничных слоев, возникающих в соответствующих непрерывных задачах, в данной задаче явление пограничного слоя происходит и в окрестности точки t_0^1. Пограничные функции $\Pi_0 z^j\left(\tau_0^j\right)$, определяющие поведение решения $z(t, \mu)$ задачи (1) – (3) в зоне пограничного слоя, при $\tau_0^j > 0$; $j = 0, 1$, удовлетворяют задачам

$$\frac{d\Pi_0 z^j}{d\tau_0^j} = F\left(\bar{z}_0\left(t_0^j + 0\right) + \Pi_0 z^j, \bar{y}_0\left(t_0^j\right), t_0^j\right),$$
$$\Pi_0 z^j(0) = \bar{z}_0\left(t_0^j - 0\right) - \bar{z}_0\left(t_0^j + 0\right), \tag{5}$$

где $t_0^0 \equiv 0$, $\bar{z}\left(t_0^0 - 0\right) \equiv \bar{Z}_0^0$, $\tau_0^j = \left(t - t_0^j\right)/\mu$.

Асимптотическое разложение решения $x(t, \mu)$ краевой задачи (1) – (3) ищется как решение задачи (1), (2) с начальным условием

$$x(0, \mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \mu^l \overline{X}_l^0, \tag{6}$$

причем коэффициенты $\overline{X}_l^0$ определяются из условия (3). Асимптотическое представление решения $x(t, \mu)$ сингулярно возмущенной задачи Коши (1), (2), (6) построено в [2] и имеет вид

$$x^j(t, \mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \mu^l \overline{x}_l^j(t) + \sum_{l=0}^{\infty} \mu^l \Pi_l x^j(\tau^l), \tag{7}$$

где $\overline{x}_0(t) \equiv \overline{x}_0^0(t)$ при $0 \le t < t_0^1$, $\overline{x}_0(t) \equiv \overline{x}_0^1(t)$ при $t_0^1 < t \le T$, $x(t, \mu) \equiv x^0(t, \mu)$ при $0 \le t < t_1(\mu)$, $x(t, \mu) \equiv x^1(t, \mu)$ при $t_1(\mu) \le t \le T$,

$$\tau^j = \left(t - t^j\right)/\mu, \quad t^0 = t_0^0 = 0, \quad \left(x(t^1, \mu), t^1\right) \in \Gamma, \quad t^1(\mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \mu^l t_l^1.$$

Подставив представление (7) в условие (3) и разложив в ряд по степеням μ, получим

$$\sum_{l=0}^{\infty} \mu^l \Psi_l = 0,$$

откуда уравнения $\Psi_l = 0$ определяют коэффициенты $\overline{X}_l^0$. Заметим, что

$$\Psi_0 \equiv \Psi\left(x_0, \overline{x}_0(T), 0\right) = 0. \tag{8}$$

2. Теорема об оценке остаточного члена асимптотического разложения. Введем условие [1] разрешимости краевой задачи (1) – (3) при соответствующем выборе коэффициентов $\overline{X}_l^0$ ряда (6) и условия [2] для асимптотического представления решения $x(t, \mu)$ задачи Коши (1), (2), (6).

1. Система (8) относительно x_0 имеет решение $x_0 = \overline{X}_0^0$ и функциональный определитель

$$\Lambda_0\left(\overline{X}_0^0\right) \equiv \frac{D(\Psi_0)}{D(x_0)}\bigg|_{x_0 = \overline{X}_0^0} \ne 0.$$

2. Функции $F^{\pm 1}$, $f^{\pm 1}$, Φ, Ψ $n+2$ раза непрерывно дифференцируемы в некоторой открытой области $Q \subset R^{M+m+1}$, причем

$$F^j \equiv a_1^j(y, t)z + a_2^j(y, t), \quad f^j \equiv a_3^j(y, t)z + a_4^j(y, t).$$

3. Уравнения $F^{\pm 1}(z, y, t) = 0$ имеют $n+2$ раза непрерывно дифференцируемые изолированные решения $z = \varphi^{\pm 1}(y, t)$ на непустом компактном множестве $Q \subset R^{m+1}$ и точка $(\varphi(y, t), y, t) \in Q$, если $(y, t) \in Q_1$, где $\varphi \equiv \equiv \left\{ \varphi^j(y, t) \,\middle|\, j = \operatorname{sign} \Phi\left(\varphi^j(y, t), y, t\right) \right\}$.

4. Вырожденная задача (4) на промежутке I имеет решение $\overline{z}_0(t) = = \varphi(\overline{y}_0(t), t)$, $\overline{y}_0(t)$ такое, что точка $(\overline{y}_0(t), t) \in Q_1$ и существует $t_0^1 \in \operatorname{int} I$, что

$$\lim_{t \to t_0^1 - 0} \Phi(\overline{z}_0(t), \overline{y}_0(t), t) = 0, \qquad \lim_{t \to t_0^1 - 0} \frac{d\Phi(\overline{z}_0(t), \overline{y}_0(t), t)}{dt} = \alpha \ne 0,$$

$$\Phi\left(\bar{Z}_0^0, \bar{Y}_0^0, 0\right)\cdot\Phi\left(\bar{z}_0(0), \bar{Y}_0^0, 0\right) > 0, \qquad \Phi(\bar{z}_0(\xi), \bar{y}_0(\xi), \xi)\cdot\Phi(\bar{z}_0(\eta), \bar{y}_0(\eta), \eta) < 0$$

при $\xi \in \left[0, t_0^1\right)$, $\eta \in \left(t_0^1, T\right]$.

5. Собственные значения $\bar{\lambda}_k(t)$ матрицы $F_z(\bar{z}_0(t), \bar{y}_0(t), t)$ при $t \in I$ удовлетворяют неравенствам $\operatorname{Re}\bar{\lambda}_k(t) < 0$, $k = \overline{1, M}$.

6. Для решений $\Pi_0 z^j\left(\tau_0^j\right)$ задач (5) при $j = 0, 1$ выполняются условия

$$\left(\bar{z}_0\left(t_0^j + 0\right) + \Pi_0 z^j\left(\tau_0^j\right), \bar{y}_0\left(t_0^j\right), t_0^j\right) \in Q \quad \text{при} \quad \tau_0^j \geq 0;$$

$$\lim_{\tau_0^j \to \infty} \Pi_0 z^j\left(\tau_0^j\right) = 0;$$

существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $t \in \left(t_0^1, t_0^1 + \varepsilon_0\right)$

$$\alpha \lim_{\mu \to 0} \frac{d}{dt}\Phi\left(\bar{z}_0(t) + \Pi_0 z^1\frac{(t - t_0^1)}{\mu}, \bar{y}_0(t), t\right) > 0.$$

Теорема. *Пусть для некоторого* $\bar{X}_0^0$ *выполняются условия* 1 – 6. *Тогда существуют постоянные* $C > 0$, $\delta > 0$, $\mu_0 > 0$, $\alpha > 0$ *такие, что для* $\mu \in (0, \mu_0]$ *в* δ*-окрестности множества*

$$L_0(t, \mu) = \left\{ x_0(t, \mu) \middle| \; z_0(t, \mu) = \bar{z}_0(t) + \Pi_0 z^j \frac{(t - t_0^j)}{\mu}, \; t \geq t_0^j, \right.$$

$$\left. y_0(t, \mu) = \bar{y}_0(t), \; t \in I \right\}$$

существует единственное решение $x(t, \mu)$ *краевой задачи* (1) – (3), *пересекающее поверхность* Γ *в единственный момент времени* $t^1(\mu) \in I$, *и для* n*-й частичной суммы* $X_n(t, \mu)$ *ряда* (7) *справедливы оценки*

$$\|y(t, \mu) - Y_n(t, \mu)\| \leq C\mu^{n+1},$$

$$\|z(t, \mu) - Z_n(t, \mu)\| \leq C\mu^{n+1}[1 + \alpha_n(t, \mu)], \tag{9}$$

$$\left|t_1(\mu) - T_n^1(\mu)\right| \leq C\mu^{n+1},$$

где

$$T_n^1(\mu) \equiv \sum_{l=0}^{n} \mu^l t_l^1, \quad \alpha_n \equiv \frac{1}{\mu}\exp\left(-\alpha\frac{t - \xi^1}{\mu}\right) \; \text{при} \; t \geq \xi^1,$$

$\alpha_n \equiv 0$ *при* $t < \xi^1$ *для любого* $\xi^1 \in \left[T_n^1 - C\mu^{n+1}, T_n^1 + C\mu^{n+1}\right]$.

3. ***Доказательство теоремы.*** Обозначим через $X(t, \mu, x_0)$ решение задачи (1), (2) с начальным условием $X(0, \mu, x_0)$, через $X(t, 0, x_0)$ решение соответствующей вырожденной задачи (4), удовлетворяющее условию $Y(0, \mu, x_0) = y_0$.

Для доказательства разрешимости краевой задачи (1) – (3) покажем, что функциональный определитель системы (3)

$$\Lambda(x_0, \mu) \equiv \frac{\partial\Psi(x_0, X(t, \mu, x_0), \mu)}{\partial x_0} + \frac{\partial\Psi(x_0, X(t, \mu, x_0), \mu)}{\partial x_T}\frac{\partial X(T, \mu, x_0)}{\partial x_0} \tag{10}$$

отличен от нуля в некоторой δ-окрестности $S_\delta\left(\bar{X}_0^0\right)$ точки $\bar{X}_0^0$.

Из теоремы [2] об оценке остаточного члена асимптотического представления разрывной сингулярно возмущенной задачи Коши вытекает, что существуют $\mu_0 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\| X(T, \mu, x_0) - X(T, 0, x_0) \| \leq C\mu \tag{11}$$

при $\mu \in (0, \mu_0]$ и $x_0 \in S_\delta(\overline{X}_0^0)$.

Для решений систем в вариациях разрывных сингулярно возмущенных задач, которые при условиях 3 – 6 теоремы являются сингулярно возмущенными системами с асимптотически большим импульсным воздействием, следует [3], что для некоторого $\mu_0 > 0$ при $\mu \in (0, \mu_0]$

$$\left\| \frac{\partial X(T, \mu, x_0)}{\partial x_0} - \frac{\partial X(T, 0, x_0)}{\partial x_0} \right\| \leq C\mu. \tag{12}$$

Следовательно, из соотношений (10) – (12) заключаем, что

$$\Lambda(x_0, \mu) = \Lambda_0(x_0) + O(\mu). \tag{13}$$

В силу условия 1, представления (13) и непрерывности функции (10) по x_0 существует $\delta > 0$ такое, что $\Lambda(x_0, \mu) \neq 0$ при $x_0 \in S_\delta$.

Остальные рассуждения полностью повторяют доказательство [1] для непрерывной сингулярно возмущенной краевой задачи с одним пограничным слоем.

1. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 272 с.
2. *Мельник Т. А.* Асимптотика решения некоторой разрывной сингулярно возмущенной задачи Коши // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 11. – С. 1502–1508.
3. *Плотников В. А.* Асимптотические методы в теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. – Киев, 1993. – 60 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 93.27)

Получено 03.02.97,
после доработки — 08.07.97