УДК 519. 21

**Д. В. Гусак** (Ін-т математики НАН України, Київ)

# ГРАНИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗПОДІЛУ МОМЕНТУ РУЙНАЦІЇ МОДИФІКОВАНОГО ПРОЦЕСУ РИЗИКУ

For modified risk process with instantaneous reflection at the point $B > 0$ under which the considered process

$$\zeta(t) = \zeta_{B,u}(t), \quad \zeta(0) = u, \ 0 \le u < B,$$

returns in the initial state $u$, we investigate the limit behavior of generating function of the first ruin moment as $u \to B$ and $B \to \infty$.

Для модифікованого процесу ризику з миттєвим відбиттям в точці $B > 0$, при якому розглядуваний процес

$$\zeta(t) = \zeta_{B,u}(t), \quad \zeta(0) = u, \ 0 \le u < B,$$

повертається в початковий стан $u$, досліджено граничну поведінку генератриси моменту першої руйнації при $u \to B$ та $B \to \infty$.

Нехай $U(t) = u + \xi(t)$ – класичний процес ризику, де $\xi(t) = ct - X(t)$ – складний пуассонівський процес з додатним знесенням $c > 0$ та від'ємними стрибками $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Интервали між сусідніми стрибками $\eta_k > 0$ – показниково розподілені з параметром $\lambda > 0$ і характеристична функція (х. ф.) процесу $\xi(t)$ має вигляд

$$\mathrm{E}e^{i\alpha\xi(t)} = \exp\{t\psi(\alpha)\}, \tag{1}$$

$$\psi(\alpha) = i\alpha c + \lambda \int_{-\infty}^{0} (e^{i\alpha x} - 1)\, dF(x).$$

Введемо позначення основних функціоналів для початкового процесу $\xi(t)$:

$$m = \mathrm{E}\xi(1) = c + \lambda \mathrm{E}\xi_k, \quad c > 0, \ \mathrm{E}\xi_k < 0,$$

$$\xi^{\pm}(t) = \sup_{0 \le s \le t} (\inf)\, \xi(s),$$

$$\tau^{\pm}(\pm z) = \inf\{t > 0 : \pm\xi(t) > z\} \quad z > 0,$$

$$\tau_B(u) = \inf\{t > 0 : u + \xi(t) \,\overline{\in}\, t\,(0, B)\},$$

які визначають відповідно екстремуми процесу, моменти першого виходу за рівень $\pm z$ та виходу з інтервалу $(0, B)$.

Розглядуваний в [1] модифікований процес ризику (м. п. р.) з миттєвим відбиттям у початковий стан $u$, $0 < u < B$, $v = B - u$, визначається стохастичним співвідношенням

$$\zeta(t) = \zeta_{B,u}(t) = \begin{cases} u + \xi(t), t < \tau^{+}(v) = T_1, \ v = B - u; \\ \zeta(t - T_1), \quad t > T_1. \end{cases} \tag{2}$$

Класичний процес ризику $U(t)$ можна виразити сумою

$$U(t) = \zeta(t) + X(t),$$

де процес $X(t)$, що називається дивідендним, визначається співвідношенням

$$X(t) = X_{B,u}(t) = n(t)v, \quad v = B - u, \tag{3}$$

$n(t)$ – кількість досягнень процесом $\zeta(\cdot)$ рівня $B$ на інтервалі $[0; t]$.

Для вивчення граничної поведінки розподілу моменту першої руйнації процесу $\zeta(t)$

$$T_u^B = \inf\{t > 0 : \zeta_{B,u}(t) < 0\} \tag{4}$$

введемо допоміжні позначення і сформулюємо деякі допоміжні твердження з [2, 3]. Нехай $\theta_s$ – показниково розподілена випадкова величина (незалежна від $\xi(t)$) з параметром $s > 0$. Тоді позначимо

$$P(s, x) = \mathrm{P}\{\xi(\theta_s) < x\}, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$P_{\pm}(s, \pm x) = \mathrm{P}\{\xi^{\pm}(\theta_s) < \pm x\}, \quad x \geq 0,$$

$$\varphi_{\pm}(s, \alpha) = \mathrm{E}e^{i\alpha\xi^{\pm}(\theta_s)}.$$

Справедлива така лема (див. [2]).

**Лема.** *Для неперервного зверху процесу* $\xi(t)$

$$\varphi_+(s, \alpha) = \frac{\rho(s)}{\rho(s) + i\alpha}, \tag{5}$$

*де* $\rho(s)$ – *єдиний додатний корінь рівняння* $\psi(i\rho) = s$, $s > 0$,

$$\varphi_-(s, \alpha) = p_-(s) + \frac{1}{\rho(s)}\int_{-\infty}^{0} e^{i\alpha x}\, d_x P'(s,x) + \mathrm{E}[e^{i\alpha\xi(\theta_s)}, \xi(\theta_s) < 0], \tag{6}$$

$$P'(s, x) = \frac{\partial}{\partial(x)} P(s,x), \quad x \neq 0, \quad p_-(s) = \mathrm{P}\{\xi^-(\theta_s) = 0\}.$$

*При умові* $m > 0$ *існує* $\lim_{s\to 0} \rho(s)s^{-1} = \rho'(0) = \dfrac{1}{m}$ *і абсолютний мінімум*

$$\xi^- = \inf_{t<\infty} \xi(t),$$

*має невироджений розподіл* $(x < 0)$

$$\mathrm{P}\{\xi^- < x\} = \frac{1}{\rho'(0)}\frac{d}{dx}\int_0^{\infty} \mathrm{P}\{\xi(t) < x\}\, dt. \tag{7}$$

На основі розглянутих позначень і співвідношень леми введемо позначення резольвентної функції і потенціалу (див. [2, 3])

$$\begin{gathered} R_s(x) = s^{-1}\rho(s)\int_{-0}^{x} e^{\rho(s)(x-y)} d\mathrm{P}\{-\xi^-(\theta_s) < y\}, \\ R(x) = \lim_{s\to 0} R_s(x), \quad x > 0, \end{gathered} \tag{8}$$

а також м. п. р. із затримкою в $B$

$$\eta(t) = \eta_{B,u}(t) = \begin{cases} u + \xi(t), & t < T_1 = \tau^+(v); \\ B, & T_1 < t < T_1 + \eta_1 = T_*; \\ \eta_{B,u}(t - T_*), & t > T_*, \end{cases}$$

та моменту її руйнації

$$T_B(u) = \inf\{t > 0 : \eta_{B,u}(t) < 0\}.$$

Із стохастичного співвідношення

$$T_u^B = \begin{cases} \tau^-(-u), & \tau^-(-u) < \tau^+(v); \\ \tau^+(v) + T_u^B, & \tau^+(v) \le \tau^-(-u), \end{cases}$$

випливає ( див. [3])

$$\mathrm{E}e^{-s\,T_u^B} = \frac{R_s(B)Ee^{-s\tau_B(u)} - R_s(u)}{R_s(B) - R_s(u)}, \tag{9}$$

а для $\tau_B(u)$ та $T_B(u)$, згідно з [2, 3], справедливі співвідношення

$$\mathrm{E}e^{-s\tau_B(u)} = 1 - s\left(\frac{R_s(u)}{R_s(B)}\int_0^B R_s(y)\,dy - \int_0^u R_s(y)\,dy\right), \tag{10}$$

$$\mathrm{E}e^{-sT_B(u)} = 1 - s\left(\frac{R_s(B)}{R_s'(B)}R_s(u)dy - \int_0^u R_s(y)\,dy\right), \tag{11}$$

$$R_s'(u) = \frac{d}{du}R_s(u), \qquad R_s'(B) = \frac{d}{du}R_s(u)\Big|_{u=B-0}.$$

На основі (9) – (11) встановлюється таке твердження.

**Теорема 1.** *При $u \to B$ розподіл $T_u^B$ – моменту першої руйнації м. п. р. $\zeta(t)$ — збігається з розподілом $T_B(B)$ — моментом першої руйнації процесу $\eta_{B,B}(t)$,*

$$\lim_{u\to B}\mathrm{E}e^{-sT_u^B} = \mathrm{E}e^{-sT_B(B)}. \tag{12}$$

***Доведення*** базується на граничному переході $(u \to B)$ в (9) з використанням правила Лопіталя і врахуванням того, що

$$\frac{d}{du}(\mathrm{E}e^{-s\tau_B(u)})\Big|_{u=B} = s\left(R_s(B) - \frac{R_s'(B)}{R_s(B)}\int_0^B R_s(y)\,dy\right).$$

В результаті цього з (9) випливає

$$\lim_{u\to B}\mathrm{E}e^{-sT_u^B} = \lim_{u\to B}\frac{R_s(B)\dfrac{d}{du}(Ee^{-s\tau_B(u)}) - R_s'(u)}{-R_s'(u)} =$$

$$= 1 + s\left(\int_0^B R_s(y)\,dy - R_s^2(B)[R_s'(B)]^{-1}\right),$$

звідки на основі (11) при $u \to B$ встановлюється потрібне співвідношення (12).

Гранична поведінка $T_u^B$ при $B \to 0$ залежить від знаку $m = \mathrm{E}\xi(1)$ і визначається на основі (9) при $m > 0$ розподілом $\xi^-$, а при $m \le 0$ поведінкою розподілу $\tau_B(u)$ – моменту першого виходу $\xi(t)$ з інтервалу $(0, B)$.

**Теорема 2.** 1. *Нехай $m > 0$; тоді при $u > 0$ і скінченних $s > 0$*

$$\lim_{B\to\infty}\mathrm{E}e^{-\frac{s}{B}T_u^B} = \frac{\mathrm{P}\{\xi^- \le -u\} + \mathrm{P}\{\xi^- > -u\}(e^{-\frac{s}{m}} - 1)}{\mathrm{P}\{\xi^- \le -u\}},$$

$$\lim_{B\to\infty}\mathrm{E}e^{-sB^{-1}T_0^B} = \frac{1}{m}\frac{\mathrm{P}\{\xi^- > -u\}}{\mathrm{P}\{\xi^- \le -u\}}. \tag{13}$$

*При* $u = 0$ *і скінченних* $s > 0$

$$\lim_{B\to\infty} \mathrm{E} e^{-sB^{-1}T_0^B} = 1 + \mathrm{P}\{\xi^- = 0\}\,(e^{-\frac{s}{m}} - 1),$$

$$\lim_{B\to\infty} \mathrm{E}\, T_0^B B^{-1} = \frac{1}{m}\mathrm{P}\{\xi^- = 0\}. \tag{14}$$

2. *Нехай* $m = 0$, $D\xi(1) = \sigma^2 < \infty$; *тоді при* $u \approx \beta B$, $0 < \beta < 1$, *і скінченних* $s > 0$,

$$\lim_{B\to\infty} \mathrm{E} e^{-sB^{-2}T_u^B} = \frac{\operatorname{sh}(1-\beta)\sqrt{2s}\sigma^{-1}}{\operatorname{sh}\sqrt{2s}\sigma^{-1} - \operatorname{sh}\beta\sqrt{2s}\sigma^{-1}}. \tag{15}$$

3. *Нехай* $m < 0$, *тоді при* $u \geq 0$

$$\lim_{B\to\infty} \mathrm{E} e^{-sT_u^B} = \lim_{B\to\infty} \mathrm{E} e^{-s\tau_B(u)} = \mathrm{E} e^{-s\tau^-(-u)}. \tag{16}$$

***Доведення.*** 1. При $m > 0$ з теореми 5.2. 1 (див. [3, с. 156]) випливає

$$\lim_{B\to\infty} \mathrm{E} e^{-sB^{-1}\tau_B(u)} = 1 - mR(u)\left(1 - e^{-\frac{s}{m}}\right),$$

де

$$R(u) = \rho'(0)\mathrm{P}\{-\xi^- \leq u\} \qquad \rho'(0) = m^{-1}.$$

Тоді з (9) при скінченних $s$ одержуємо

$$\lim_{B\to\infty} R_{sB^{-1}}(u) = R(u), \qquad u > 0,$$

$$\lim_{B\to\infty} \mathrm{E} e^{-sB^{-1}T_u^B} = \lim_{B\to\infty} \frac{R_{sB^{-1}}(B)\,\mathrm{E} e^{-sB^{-1}\tau_B(u)} - R_{sB^{-1}}(u)}{R_{sB^{-1}}(B) - R_{sB^{-1}}(u)} =$$

$$= \frac{1 - \mathrm{P}\{-\xi^- < u\} + \left(e^{-\frac{s}{m}} - 1\right)\mathrm{P}\{-\xi^- < u\}}{\mathrm{P}\{-\xi^- \geq u\}},$$

і, таким чином, перше співвідношення в (13) доведено. З нього виводиться й друге співвідношення в (13) граничним переходом ($s \to 0$). При $m = 0$ і скінченних $s > 0$ із (13) випливають обидва співвідношення (14).

2. При $m = 0$ та $\sigma^2 < \infty$ з теореми 5.2. 2 (див. [3, с. 156]) при $u \approx \beta B$, $0 < \beta < 1$,

$$\lim_{B\to\infty} \mathrm{E} e^{-sB^{-2}\tau_B(u)} = \frac{\operatorname{sh}(1-\beta)\sqrt{2s}\sigma^{-1} + \operatorname{sh}\beta\sqrt{2s}\sigma^{-1}}{\operatorname{sh}\sqrt{2s}\sigma^{-1}}.$$

При цих же умовах, згідно з теоремою 7.6 (див. [3, с. 131]) для скінченних $s > 0$

$$\lim_{B\to\infty} \frac{R_{sB^{-2}}(\beta B)}{R_{sB^{-2}}(B)} = \frac{\operatorname{sh}\beta\sqrt{2s}\sigma^{-1}}{\operatorname{sh}\sqrt{2s}\sigma^{-1}},$$

$$\lim_{B\to\infty} \mathrm{E}e^{-sB^{-2}T_u^B} = \lim_{B\to\infty}\left[\mathrm{E}e^{-sB^{-2}\tau_B(u)} - \frac{R_{sB^{-2}}(\beta B)}{R_{sB^{-2}}(B)}\right] \times$$

$$\times \left(1 - \frac{R_{sB^{-2}}(\beta B)}{R_{sB^{-2}}(B)}\right)^{-1} = \left[\frac{\operatorname{sh}(1-\beta)\sqrt{2s}\sigma^{-1} + \operatorname{sh}\beta\sqrt{2s}\sigma^{-1}}{\operatorname{sh}\sqrt{2s}\sigma^{-1}} - \frac{\operatorname{sh}\beta\sqrt{2s}\sigma^{-1}}{\operatorname{sh}\sqrt{2s}\sigma^{-1}}\right] \times$$

$$\times \left(1 - \frac{\operatorname{sh}\beta\sqrt{2s}\sigma^{-1}}{\operatorname{sh}\sqrt{2s}\sigma^{-1}}\right)^{-1} = \frac{\operatorname{sh}(1-\beta)\sqrt{2s}\sigma^{-1}}{\operatorname{sh}\sqrt{2s}\sigma^{-1} - \operatorname{sh}\beta\sqrt{2s}\sigma^{-1}}.$$

Таким чином, співвідношення (15) доведено.

3. Нехай $m < 0$. Зауважимо, що з точки зору теорії страхування цей випадок не є цікавим. Ми розглянемо його для повноти викладу і відмітимо, що в цьому випадку, згідно з результатами [2, 3],

$$\lim_{B\to\infty} Q^B(s,u) = \lim_{B\to\infty} \mathrm{E}[e^{-s\tau_B(u)},\ \tau^+(u) < \tau^-(-u)] = 0,$$

$$\lim_{B\to\infty} \mathrm{E}e^{-s\tau_B(u)} = \mathrm{E}e^{-s\tau^-(-u)}, \quad u \ge 0.$$

На основі співвідношення

$$\mathrm{E}e^{-sT_u^B} = (\mathrm{E}e^{-s\tau_B(u)} - Q^B(s,u))(1 - Q^B(s,u))^{-1}$$

та останніх двох граничних співвідношень встановлюється справедливість формули (16). Теорему 2 доведено.

Нехай $S_v^+(0) = 0$, а при $n > 0$

$$S_v^+(n) = \sum_{k=0}^{n} \tau_k^+(v), \qquad \tau_k^+(v) = \tau^+(v).$$

Позначимо функцію відновлення для $S_v^+(n)$ через

$$H_v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}\left\{S_v^+(n) < t\right\}$$

і сформулюємо наступне твердження.

**Теорема 3.** *При $m > 0$ середнє значення $X_{B,u}(t)$ визначається співвідношенням*

$$\mathrm{E}X_{B,u}(t) = v(H_v(t) - 1), \qquad \mathrm{E}X_{B,u}(t) \approx tm,\ t\to\infty. \tag{17}$$

***Доведення.*** Оскільки число відновлень $n(\theta_s)$ має геометричний розподіл

$$\mathrm{P}\{n(\theta_s) = k\} = (1 - q_v(s))\, q_v^k(s), \qquad k \ge 0,$$

$$q_v(s) = e^{-vp(s)} = p\{\xi^+(\theta_s) > v\}, \qquad s > 0,\ v = B - u > 0,$$

то

$$\mathrm{E}X_{B,u}(\theta_s) = v e^{-\rho(s)v}(1 - e^{-v\rho(s)})^{-1} =$$

$$= v\mathrm{P}\{\xi^+(\theta_s) > v\} \sum_{k=0}^{\infty} (\mathrm{E}e^{-s\tau^+(v)})^k =$$

$$= v\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}e^{-sS_v^+(n)} - 1\right).$$

Отже, після обернення відносно $s$ матимемо перше співвідношення в (17).

Згідно з теоремою відновлення при $t \to \infty$

$$H_v(t) \approx \frac{t}{\mathrm{E}\tau^+(v)} = \frac{t}{v\rho'(0)}. \tag{18}$$

Тому з (17) та (18) випливає, що при $t \to \infty$

$$\mathrm{E}X_{B,u}(t) \sim \frac{t}{\rho'(0)} = mt.$$

Згідно з результатами [4, с. 318]

$$H_v(t) = \frac{t}{\mathrm{E}\tau^+(v)} + \frac{\mathrm{E}\gamma_v^+(t)}{\mathrm{E}\tau^+(v)},$$

де

$$\gamma_v^+(t) = S_v^+(\eta_t^+) - t, \quad \eta_t^+ = \min\{n: S_v^+(n) \ge t\}.$$

З теореми 4.9 (див. [5, с. 292]) випливає

$$\mathrm{E}e^{-\nu\gamma_v^+(\theta_\mu)}u^{\tau_v^+(\theta_\mu)} = \frac{\mu u}{\mu - \nu}\frac{\mathrm{E}e^{-\nu\tau^+(v)} - \mathrm{E}e^{-\mu\tau^+(v)}}{1 - u\mathrm{E}e^{-\mu\tau^+(v)}}.$$

Отже, твірна функція $\gamma_v^+(\theta_\mu)$ має вигляд

$$g(\nu;\mu,v) = \mathrm{E}e^{-\nu\gamma_v^+(\theta_\mu)} = \frac{\mu u}{\mu - \nu}\frac{\mathrm{E}e^{-\nu\tau^+(v)} - \mathrm{E}e^{-\mu\tau^+(v)}}{1 - \mathrm{E}e^{-\mu\tau^+(v)}} =$$

$$= \frac{\mu}{\mu - \nu}\frac{e^{-v\rho(\nu)} - e^{-v\rho(\mu)}}{1 - e^{-v\rho(\mu)}}.$$

При $\mathrm{E}\xi(1) > 0$, $\rho(\mu) \to 0$ при $\mu \to 0$, $\frac{\rho(\mu)}{\mu} \underset{\mu\to 0}{\to} \rho'(0) > 0$,

$$\mathrm{E}e^{-\nu\gamma_v^+(\infty)} = \frac{1 - e^{-v\rho(\nu)}}{v\nu\rho'(0)}.$$

Знайдемо $\mathrm{E}\gamma_v^+(\theta_\mu)$, скориставшись похідною $g'_\nu = \frac{\partial g}{\partial \nu}$,

$$g'_\nu(\nu;\mu,v) = \frac{\mu}{(\mu-\nu)^2}\frac{e^{-v\rho(\nu)} - e^{-v\rho(\mu)}}{1 - e^{-v\rho(\mu)}} -$$

$$- \frac{\mu}{\mu - \nu}v\rho'(\nu)\frac{e^{-v\rho(\nu)}}{1 - e^{-v\rho(\mu)}},$$

$$\mathrm{E}\gamma_v^+(\theta_\mu) = -g'_\nu(0;\mu,v) = \frac{v\rho'(0)}{1 - e^{-v\rho(\mu)}} - \frac{1}{\mu},$$

$$\mathrm{E}\gamma_v^+(\theta_\mu) = \frac{v\rho'(0)}{\mathrm{P}\{\xi^+(\theta_\mu) \le v\}} - \frac{1}{\mu}.$$

Після обернення відносно $\mu$ маємо

$$\mathrm{E}\gamma_v^+(t) = \frac{\mathrm{E}\,\tau^+(v)}{\mathrm{P}\{\xi^+(\theta_\mu) \le v\}} - t,$$

отже, при $m > 0$

$$H_v(t) = \frac{1}{P\{\xi^+(t) \le v\}},$$

і для скінченних $v > 0$ з (18) знаходимо

$$\mathrm{P}\{\xi^+(t) \le v\} \approx \frac{v}{mt}, \qquad t \to \infty.$$


1. *Гусак Д. В.* Про одну модель осцилюючого випадкового блукання, що описує процес ризику //Допов. НАН України. – 1998. – №4. – С. 7 – 11.
2. *Братийчук Н. С., Гусак Д. В.* Граничные задачи для процессов с независимыми приращениями. – Киев: Наук. думка, 1990. – 264 с.
3. *Королюк В. С., Братийчук Н. С., Пирджанов Б.* Граничные задачи для случайных блужданий. – Ашхабад: Ылым, 1987 . – 256 с.
4. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. – М.: Наука, 1972. – 368 с.
5. *Гусак Д. В.* Граничні задачі для процесів з незалежними приростами на скінченних ланцюгах Маркова та для напівмарковських процесів. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – 320 с.


Одержано 14.07.98