УДК 517.9

А. Л. Лапшин (Киев. нац. эконом. ун-т)

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВТОРЫХ МОМЕНТОВ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПОЛУМАРКОВСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И СЛУЧАЙНЫМ ВХОДОМ

We derive equations which determine second moments of a random solution of system of the Ito linear differential equations with coefficients depending on a finite-valued random semi-Markov process. We obtain necessary and sufficient conditions of the asymptotic stability of solutions in mean square by using moment equations and the Lyapunov stochastic functions.

Виведено рівняння, що визначають другі моменти випадкового розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь Іто з коефіцієнтами, залежними від скінченнозначного випадкового напівмарковського процесу. Одержано необхідні та достатні умови асимптотичної стійкості розв'язків у середньому квадратичному з допомогою моментних рівнянь і стохастичних функцій Ляпунова.

1. Постановка задачи. Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(\zeta(t))\,X(t) + B(\zeta(t))\,\dot{W}(t), \qquad \dim X(t) = m, \tag{1}$$

где $\zeta(t)$ — полумарковский случайный процесс, принимающий конечное число значений $\theta_1, \ldots, \theta_n$ с вероятностями

$$p_k(t) = P\{\zeta(t) = \theta_k\}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Предполагаем, что полумарковский процесс определяется интенсивностями $q_{ks}(t)$, $k, s = 1, \ldots, n$, перехода из состояния θ_s в состояние θ_k [1, 2].

Пусть полумарковский процесс скачком меняет свое состояние в последовательные моменты t_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, $t_0 = 0$.

Для полумарковского процесса $\zeta(t)$ выполнено уравнение

$$P(t_j + t) = \Phi(t)\,P(t_j), \qquad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

в котором матрица переходных вероятностей $\Phi(t)$ определяется системой интегральных уравнений [3]

$$\Phi(t) = \Psi(t) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\,Q(\tau)\,dt, \qquad \Phi(0) = E.$$

Здесь обозначено

$$Q(t) = \begin{pmatrix} q_{11}(t) & q_{12}(t) & \ldots & q_{1n}(t) \\ q_{21}(t) & q_{22}(t) & \ldots & q_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1}(t) & q_{n2}(t) & \ldots & q_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

причем при $t \geq 0$ выполнены условия

© А. Л. ЛАПШИН, 1999

$$q_{ks}(t) \geq 0, \qquad \int\limits_0^\infty q_s(t)\,dt = 1, \qquad q_s(t) \equiv \sum_{k=1}^n q_{ks}(t), \qquad k, s = 1, \ldots, n.$$

Диагональная матрица $\Psi(t)$ имеет вид

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \psi_2(t) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \psi_n(t) \end{pmatrix}, \qquad \psi_s(t) = \int\limits_t^\infty q_s(\tau)\,d\tau.$$

Предполагается, что марковский процесс $\zeta(t_j)$, вложенный в полумарковский процесс $\zeta(t)$, является эргодическим, т. е. марковская цепь, определяемая системой уравнений

$$P(t_{j+1}) = \Pi P(t_j), \qquad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \ldots & \pi_{1n} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \ldots & \pi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{n1} & \pi_{n2} & \ldots & \pi_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \pi_{ks} \equiv \int\limits_0^\infty q_{ks}(t)\,dt, \qquad k, s = 1, \ldots, n,$$

является эргодической [2].

Вектор белых шумов $\dot{W}(t)$ удовлетворяет условиям

$$\langle \dot{W}(t) \rangle \equiv 0, \qquad \langle \dot{W}(t)\dot{W}^*(\tau) \rangle = C\delta(t-\tau), \qquad C^* = C \geq 0.$$

Случай, когда на вход линейной системы поступает стационарный случайный процесс с дробно-рациональной спектральной частью, можно свести к системе уравнений вида (11).

Наша задача — определить матрицы вторых моментов

$$D(t) = \langle X(t)X^*(t) \rangle.$$

2. Вывод операторных уравнений для частных плотностей. Пусть случайный процесс $(X(t), \zeta(t))$ имеет плотность распределения

$$f(t, X, \zeta) = \sum_{k=1}^n f_k(t, X)\,\delta(\zeta - \theta_k), \tag{2}$$

где $\delta(\zeta)$ — дельта-функция Дирака. В работе [3] показано, что

$$F(t_j + t, X) = L(t)F(t_j, X), \qquad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

или в скалярном виде при $j = 0$

$$f_k(t, X) = \sum_{s=1}^n L_{ks}(t)\,f_s(0, X), \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Оператор $L(t)$ является решением интегральных операторных уравнений

$$L(t) = \Psi(t)R(t) + \int\limits_0^t \Psi(\tau)R(\tau)U(t-\tau)\,dt, \tag{3}$$

$$U(t) = Q(t)R(t) + \int_0^t Q(t-\tau)\,R(t-\tau)\,U(\tau)\,dt. \tag{4}$$

Здесь $R(t)$ — диагональная матрица,

$$R(t) = \begin{pmatrix} R_1(t) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & R_2(t) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & R_n(t) \end{pmatrix},$$

где $R_k(t)$ — стохастический оператор, преобразующий плотности распределения случайного решения $X(t)$ на интервале $[0, t)$ при $\zeta(t) = \theta_k$.

Введем векторы

$$F(t, X) = L(t)F(0, X); \qquad H(t, X) = U(t)F(0, X),$$

где обозначено

$$F(t, X) = \begin{pmatrix} f_1(t, X) \\ \vdots \\ f_n(t, X) \end{pmatrix}, \qquad H(t, X) = \begin{pmatrix} h_1(t, X) \\ \vdots \\ h_n(t, X) \end{pmatrix}.$$

Умножая операторные уравнения (3), (4) справа на $F(0, X)$, получаем систему уравнений

$$\begin{gathered} f_k(t, X) = \psi_k(t)\,R_k(t)\,f_k(0, X) + \int_0^t \psi_k(t-\tau)\,R_k(t-\tau)\,h_k(\tau, X)\,d\tau, \\ h_k(t, X) = \sum_{s=1}^n q_{ks}(t)\,R_s(t)\,f_s(0, X) + \int_0^t \sum_{s=1}^n q_{ks}(t-\tau)\,R(t-\tau)\,h_s(\tau, X)\,dt, \\ k = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{5}$$

Умножим каждое уравнение системы (2) на матрицу XX^* и проинтегрируем уравнения по всему пространству E_m, $X \in E_m$. Введем матрицы частных моментов второго порядка

$$D_k(t) = \int_{E_m} XX^* f_k(t, X)\,dX, \qquad dX \equiv dx_1 \ldots dx_m, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

и вспомогательные матрицы

$$\begin{gathered} V_k(t) = \int_{E_m} XX^* h_k(t, X)\,dX, \\ Y_k(t) = \int_{E_m} XX^* R_k(t)\,f_k(0, X)\,dX, \\ Z_k(t, \tau) = \int_{E_m} XX^* R_k(t-\tau)\,h_k(\tau, X)\,dX, \\ dX \equiv dx_1 \ldots dx_m, \qquad k = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{7}$$

Из системы уравнений (5) получим систему матричных уравнений

$$D_k(t) = \psi_k(t)\, Y_k(t) + \int_0^t \psi_k(t-\tau)\, Z_k(t,\tau)\, d\tau,$$

$$V_k(t) = \sum_{s=1}^n q_{ks}(t)\, Y_s(t) + \int_0^t \sum_{s=1}^n q_{ks}(t-\tau)\, Z_s(t,\tau)\, d\tau,$$

$$k = 1, \ldots, n.$$

3. Вычисление матриц $Y_k(t)$. Матрица $Y_k(t)$ определяется случайным решением системы линейных дифференциальных уравнений (1) при $\zeta(t) \equiv \theta_k$

$$\frac{dX(t)}{dt} = A_k X(t) + B_k \dot{W}(t), \quad A_k = A(\theta_k), \quad B_k = B(\theta_k). \tag{8}$$

Введем обозначение $\varphi_k(t, X) = R_k(t) f_k(0, X)$, $k = 1, \ldots, n$. Поскольку $R_k(t)$ — стохастический оператор, то

$$\int_{E_m} \varphi_k(t, X)\, dX = \int_{E_m} f_k(0, X)\, dX = p_k(0), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Функция $\varphi_k(t, X)\, p_k^{-1}(0)$ является плотностью распределения случайного решения системы уравнений (8)

$$X(t) = e^{A_k t} X(0) + \int_0^t e^{A_k (t-\tau)} B_k \dot{W}(\tau)\, d\tau,$$

откуда получаем

$$\langle X(t) X^*(t) \rangle = e^{A_k t} \langle X(0)\, X^*(0) \rangle e^{A_k^* t} + \int_0^t e^{A_k (t-\tau)} B_k C B_k^* e^{A_k^* (t-\tau)} d\tau. \tag{9}$$

Поскольку $D_k(0) = \langle X(0) X^*(0) \rangle p_k(0) = Y_k(0)$, то матрица

$$Y_k(t) = \langle X(t) X^*(t) \rangle p_k(0)$$

определяется матричным уравнением

$$Y_k(t) = e^{A_k t} D_k(0)\, e^{A_k^*} + p_k(0) \int_0^t e^{A_k \tau} B_k C B_k^* e^{A_k^* \tau} d\tau, \quad k = 1, \ldots, n.$$

4. Вычисление матриц $Z_k(t, \tau)$. Стохастический оператор $R_k(t)$, $k = 1, \ldots, n$, преобразует произвольную плотность распределения $f(X)$ снова в плотность распределения $\varphi_k(t, X) = R_k(t) f(X)$. При этом из условий $f(X) \geq 0$, $X \in E_m$, $\int_{E_m} f(X)\, dX = 1$ вытекает выполнение условий $\varphi_k(t, X) \geq 0$, $X \in E_m$, $\int_{E_m} \varphi_k(t, X)\, dX \equiv 1$.

Смысл оператора $R_k(t)$ состоит в преобразовании плотности распределения $f(X)$ начального вектора X в момент $t = 0$ в плотность распределения $\varphi_k(t, X)$ в силу системы линейных дифференциальных уравнений (8).

Из второй системы интегральных уравнений (5) видно, что функции $h_k(t, X)$ будут неотрицательными при $t \geq 0$, так как интенсивность $q_{ks}(t) \geq 0$, $k, s =$

$= 1, \dots, n$, и функция $R_s(t) f_s(0, X) \geq 0$, $X \in E_m$. Функции $h_k(t, X)$, $k = 1, \dots$ $\dots, n$, могут быть найдены методом последовательных приближений.

В явном виде операторы $R_s(t)$, $s = 1, \dots, n$, трудно получить, так как они определены решениями системы линейных дифференциальных уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова, которые описывают плотность распределения случайных решений системы (8). Поэтому мы используем формулу (9), которая описывает изменение вторых моментов случайного решения системы (8).

Введем обозначения

$$h_k(t) = \int_{E_m} h_k(t, X)\, dX, \qquad k = 1, \dots, n.$$

Функции $h_k(\tau, X)\ (h_k(\tau))^{-1}$, $k = 1, \dots, n$, можно рассматривать как плотности распределения некоторого случайного вектора. Согласно формуле (9) получим равенство

$$\langle X(t) X^*(t) \rangle = e^{A_k(t-\tau)} \langle X(\tau) X^*(\tau) \rangle e^{A_k^*(t-\tau)} + \int_\tau^t e^{A_k(t-s)} B_k C B_k^* e^{A_k^*(t-s)}\, ds,$$

которое определяет матрицу $Z_k(t, \tau)$

$$Z_k(t, \tau) = e^{A_k(t-\tau)} Z_k(\tau, \tau) e^{A_k^*(t-\tau)} + h_k(\tau) \int_\tau^t e^{A_k(t-s)} B_k C B_k^* e^{A_k^*(t-s)}\, ds,$$

$$k = 1, \dots, n.$$

Из формул (6), (7) находим

$$Z_k(\tau, \tau) = V_k(\tau), \qquad k = 1, \dots, n.$$

Из системы уравнений (5) получим систему матричных интегральных уравнений для матриц $D_k(t)$, $V_k(t)$, $k = 1, \dots, n$:

$$D_k(t) = \psi_k(t) \left(e^{A_k t} D_k(0) e^{A_k^* t} + p_k(0) \int_0^t e^{A_k \tau} B_k C B_k^* e^{A_k^* \tau}\, d\tau \right) + \int_0^t \psi_k(t-\tau) \left(e^{A_k(t-\tau)} V_k(\tau) e^{A_k^*(t-\tau)} + h_k(\tau) \int_\tau^t e^{A_k(t-s)} B_k C B_k^* e^{A_k^*(t-s)}\, ds \right) d\tau, \qquad k = 1, \dots, n, \tag{10}$$

$$V_k(t) = \sum_{s=1}^n q_{ks}(t) \left(e^{A_s t} D_s(0) e^{A_s^* t} + p_s(0) \int_0^t e^{A_s \tau} B_s C B_s^* e^{A_s^* \tau}\, d\tau \right) + \int_0^t \sum_{s=1}^n q_{ks}(t-\tau) \left(e^{A_s(t-\tau)} V_s(\tau) e^{A_s^*(t-\tau)} + h_s(\tau) \int_\tau^t e^{A_s(t-\vartheta)} B_s C B_s^* e^{A_s^*(t-\vartheta)}\, d\vartheta \right) d\tau, \qquad k = 1, \dots, n. \tag{11}$$

В систему уравнений (10), (11) входят неизвестные функции $h_k(\tau)$. После интегрирования системы уравнений (5) по X получаем систему интегральных уравнений для функций $h_k(\tau)$:

$$h_k(t) = \sum_{s=1}^{n} q_{ks}(t)\, p_s(0) + \int_0^t \sum_{s=1}^{n} q_{ks}(t-\tau)\, h_s(\tau)\, d\tau, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{12}$$

5. Система уравнений для предельного значения матрицы вторых моментов. Пусть в системе уравнений (1) $B(\zeta(t)) \equiv 0$. При этом получим систему моментных уравнений

$$\begin{aligned} D_k(t) &= \psi_k(t)\, e^{A_k t} D(0)\, e^{A_k^* t} + \int_0^t \psi_k(t-\tau)\, e^{A_k(t-\tau)} V_k(\tau)\, e^{A_k^*(t-\tau)}\, dt, \\ V_k(t) &= \sum_{s=1}^{n} q_{ks}(t)\, e^{A_s t} D_s(0)\, e^{A_s^* t} + \int_0^t q_{ks}(t-\tau)\, e^{A_s(t-\tau)} V_s(\tau)\, e^{A_s^*(t-\tau)}\, d\tau \end{aligned} \tag{13}$$

для решений системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(\zeta(t))\, X(t). \tag{14}$$

Если нулевое решение системы (14) асимптотически устойчиво в среднем квадратичном, то из системы уравнений (13) вытекает справедливость соотношений

$$\lim_{t\to+\infty} \psi_k(t)\, e^{A_k t} D_k(0)\, e^{A_k^*} = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} q_{ks}(t)\, e^{A_s t} D_s(0)\, e^{A_s^*} = 0,$$
$$k, s = 1, \ldots, n.$$

Пусть для системы интегральных уравнений (10), (11), (12) существуют пределы

$$D_k = \lim_{t\to+\infty} D_k(t), \qquad V_k = \lim_{t\to+\infty} V_k(t), \qquad h_k = \lim_{t\to+\infty} h_k(t),$$
$$p_k = \lim_{t\to+\infty} p_k(t), \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Система интегральных уравнений (10), (11) принимает вид

$$\begin{aligned} D_k &= \int_0^\infty \psi_k(\varphi) \left[e^{A_k \varphi} V_k\, e^{A_k^* \varphi} + h_k \int_0^\varphi e^{A_k \tau} B_k C B_k^*\, e^{A_k^* \tau}\, d\tau \right] d\varphi, \\ V_k &= \sum_{s=1}^{n} \int_0^\infty q_{ks}(\varphi) \left[e^{A_s \varphi} V_s\, e^{A_s^* \varphi} + h_s \int_0^\varphi e^{A_s \tau} B_s C B_s^*\, e^{A_s^* \tau}\, d\tau \right] d\varphi, \end{aligned} \tag{15}$$
$$k = 1, \ldots, n.$$

Если изменить порядок интегрирования в уравнениях (15), то их можно записать в виде

$$\begin{aligned} D_k &= \int_0^\infty e^{A_k \varphi} \left[\psi_k(\varphi)\, V_k + B_k C B_k^* h_k \int_\varphi^\infty \psi_k(s)\, ds \right] e^{A_k^* \varphi}\, d\varphi, \\ V_k &= \sum_{s=1}^{n} \int_0^\infty e^{A_s \varphi} \left[q_{ks}(\varphi)\, V_s + B_s C B_s^* h_s \int_\varphi^\infty q_{ks}(s)\, ds \right] e^{A_s^* \varphi}\, d\varphi, \end{aligned} \tag{16}$$
$$k = 1, \ldots, n.$$

Будем считать, что полумарковский процесс $\zeta(t)$ может находиться в каждом состоянии конечное время, не превышающее величину T. При этом соблюдаются равенства

$$\psi_k(t) \equiv 0, \quad q_{ks}(t) \equiv 0, \quad t > T, \quad k = 1, \ldots, n,$$

и система интегральных уравнений (16) принимает вид

$$D_k = \int_0^T e^{A_k \varphi} \left[\psi_k(\varphi) V_k + B_k C B_k^* h_k \int_\varphi^T \psi_k(s)\, ds \right] e^{A_k^* \varphi}\, d\varphi,$$

$$V_k = \sum_{s=1}^n \int_0^T e^{A_s \varphi} \left[q_{ks}(\varphi) V_s + B_s C B_s^* h_s \int_\varphi^T q_{ks}(s)\, ds \right] e^{A_s^* \varphi}\, d\varphi,$$

$$k = 1, \ldots, n.$$

6. Случай марковского процесса. В общем случае для полумарковского процесса уравнения (16) трудны для решения и исследования. Рассмотрим случай, когда полумарковский процесс совпадает с конечнозначным марковским процессом, определяемым системой линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \sum_{s=1}^n \alpha_{ks}\, p_s(t), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{17}$$

При этом имеем интенсивности перехода

$$q_{ks}(t) = \alpha_{ks} e^{\alpha_{ss} t}, \quad k \neq s, \quad q_{ss}(t) \equiv 0,$$

$$\psi_k(t) = e^{\alpha_{kk} t}, \quad \alpha_{kk} < 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Система уравнений (16) примет вид

$$\begin{gathered} D_k = \int_0^\infty e^{A_k \varphi} \left[e^{\alpha_{kk} \varphi} V_k + B_k C B_k^* h_k \frac{-1}{\alpha_{kk}} e^{\alpha_{kk} \varphi} \right] e^{A_k^* \varphi}\, d\varphi, \\ V_k = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^n \int_0^\infty e^{A_s \varphi} \left[\alpha_{ks} e^{\alpha_{ss} \varphi} V_s + B_s C B_s^* h_s \frac{-\alpha_{ks}}{\alpha_{ss}} e^{\alpha_{ss} \varphi} \right] e^{A_s^* \varphi}\, d\varphi. \end{gathered} \tag{18}$$

Из уравнений (18) следует, что справедливы формулы

$$V_k = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^n \alpha_{ks} D_s, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Систему уравнений для матриц D_k (18) можно записать в алгебраическом виде

$$(A_k + E\alpha_{kk}) D_k + D_k A_k^* + V_k - \frac{h_k}{\alpha_{kk}} B_k C B_k^* = 0,$$

или, что равносильно,

$$A_k D_k + D_k A_k^* + \sum_{s=1}^n \alpha_{ks} D_s - \frac{h_k}{\alpha_{kk}} B_k C B_k^* = 0. \tag{19}$$

Найдем соотношения между $p_k(t)$, $k = 1, \ldots, n$, — решениями системы уравнений (17) — и $h_k(t)$, $k = 1, \ldots, n$, — решениями системы интегральных уравнений (12). Положим

$$\gamma_k(p) = \int_0^\infty p(t)\, e^{-pt}\, dt, \qquad \delta_k(p) = \int_0^\infty h_k(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

Из системы уравнений (17) находим систему уравнений

$$p\,\gamma_k(p) - p_k(0) = \sum_{s=1}^{n} \alpha_{ks}\,\gamma_s(p), \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{20}$$

Из системы уравнений (12) находим систему уравнений для изображений $\delta_k(p)$:

$$\delta_k(p) = \sum_{\substack{s=1\\ s\neq k}}^{n} \alpha_{ks}\,\frac{p_s(0)}{p-\alpha_{ss}} + \sum_{\substack{s=1\\ s\neq k}}^{n} \frac{\alpha_{ks}}{p-\alpha_{ss}}\,\delta_s(p), \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{21}$$

Системы уравнений (20) и (21) будут совпадать, если положить

$$\gamma_k(p) = \frac{p_k(0) + \delta_k(p)}{p - \alpha_{kk}}, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{22}$$

Отсюда, в частности, вытекают формулы

$$p_k(t) = e^{\alpha_{kk}}\, p_k(0) + \int_0^\infty e^{\alpha_{kk}(t-\tau)}\, h_k(\tau)\, d\tau,$$

$$h_k(t) = -\frac{dp_k(t)}{dt} - \alpha_{kk}\, p_k(t) - p_k(0), \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Из формулы (22) находим предельные соотношения

$$p_k = \lim_{t\to+\infty} p_k(t) = \lim_{p\to 0} p\,\gamma_k(p) = \lim_{p\to 0} \frac{p\left(p_k(0) + \delta_k(p)\right)}{p-\alpha_{kk}} =$$

$$= -\frac{1}{\alpha_{kk}} \lim_{p\to 0} p\,\delta_k(p) = -\frac{1}{\alpha_{kk}} \lim_{t\to\infty} h_k(t) = -\frac{h_k}{\alpha_{kk}}$$

и система моментных уравнений (19) принимает вид

$$A_k D_k + D_k A_k^* + \sum_{s=1}^{n} \alpha_{ks} D_s + p_k B_k C B_k^* = 0, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Эта система уравнений была получена ранее для системы линейных дифференциальных уравнений (1) с марковскими коэффициентами [4].

1. *Королюк В. С., Свищук А. В.* Полумарковские случайные эволюции. – Киев: Наук. думка, 1992. – 256 с.
2. *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.
3. *Валеев К. Г., Карелова О. Л., Горелов В. И.* Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами. – М.: Изд-во Рос. ун-та дружбы народов, 1996. – 260 с.
4. *Валеев К. Г., Лапшин А. Л.* Новая форма моментных уравнений для неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений с марковскими коэффициентами. – Киев, 1996. – 8 с. – Деп. в УкрИНТЭИ, № 151-Ук96.

Получено 23.03.98