УДК 517.5

А. И. Степанец (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

НЕСКОЛЬКО УТВЕРЖДЕНИЙ ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

For the set $\mathfrak{M}$ of convex downwards functions $\psi(\cdot)$ vanishing at infinity, we present its decomposition into subsets with respect to the behavior of special characteristics $\eta(\psi;\cdot)$ and $\mu(\psi;\cdot)$ of these functions. We study geometric and analytical properties of elements of subsets obtained, which are necessary when considering problems of the approximation theory for classes of convolutions.

Наведено розбиття множини $\mathfrak{M}$ опуклих донизу функцій $\psi(\cdot)$, що зникають на нескінченності, на підмножини за поведінкою їх спеціальних характеристик $\eta(\psi;\cdot)$ та $\mu(\psi;\cdot)$. Вивчаються геометричні та аналітичні властивості елементів цих підмножин, які потрібні при розгляді задач теорії наближень для класів згорток.

1. Вводные замечания. Начиная с 1983 г. в работах автора и его последователей изучаются аппроксимативные свойства 2π-периодических функций из множества $L^{\overline{\psi}}$, которые определяются следующим образом [1, с. 1069]. Пусть L — пространство 2π-периодических интегрируемых функций, $f \in L$ и

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f)$$

— ряд Фурье функции f. Пусть $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ — пара произвольных фиксированных систем чисел $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$, $k = 0, 1, \ldots$, $\psi_1(0) = 1$, $\psi_2(0) = 0$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\psi_1(k)\, A_k(f;x) + \psi_2(k)\, \tilde{A}_k(f;x)\right),$$

$$\tilde{A}_k(f;x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx.$$

Если для данной функции f и пары $\overline{\psi}$ этот ряд является рядом Фурье некоторой функции $F \in L$, то F назовем интегралом функции f, порожденным парой $\overline{\psi}$, или просто $\overline{\psi}$-интегралом функции f. Множество $\overline{\psi}$-интегралов всех функций $f \in L$ обозначается через $L^{\overline{\psi}}$. Если $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из L, то $L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ — множество $\overline{\psi}$-интегралов функций $f \in \mathfrak{N}$.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество выпуклых вниз и исчезающих на бесконечности последовательностей положительных чисел $\psi(k)$:

$$\mathfrak{M} = \Big\{\psi\colon\ \psi(k) > 0,\ \Delta_2\psi(k) =$$

$$= \psi(k) - 2\psi(k+1) + \psi(k+2) \geq 0,\ \lim_{k\to\infty}\psi(k) = 0\Big\}.$$

В [1, с. 1076] показано, что справедливы равенства

$$\bigcup_{\psi_1,\psi_2 \in \mathfrak{M}} L^{\overline{\psi}} = L, \qquad \bigcap_{\psi_1,\psi_2 \in \mathfrak{M}} L^{\overline{\psi}} = \mathcal{F},$$

где $\mathcal{F}$ — множество всех тригонометрических полиномов. Первое из этих равенств означает, что множества $L^{\overline{\psi}}$ при $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}$ полностью исчерпывают все множество L, второе — что при разбиении множества L на классы $L^{\overline{\Psi}}$ при $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}$ неразличимыми остаются только тригонометрические полиномы.

Поэтому при рассмотрении различных задач теории приближений для функций из множеств $L^{\overline{\Psi}}$ в центре внимания находится именно тот случай, когда последовательности $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, выбираются из множества $\mathfrak{M}$. В этом случае уже создан аппарат исследования, позволяющий получать результаты для классов $L^{\overline{\Psi}}\mathfrak{N}$ практически в той же полноте и завершенности, в которой они были известны ранее для классов функций, определяющихся производными в смысле Вейля.

Одним из важнейших элементов этого аппарата являются некоторые специальные свойства выпуклых функций. Ряд таких свойств был установлен в различных работах автора.

Цель настоящей работы — систематизация известных, а также установление новых фактов для выпуклых функций, нужных для дальнейшего усовершенствования и развития методов исследования различных аппроксимационных характеристик классов $L^{\overline{\Psi}}$. Наверное, ряд фактов, приведенных в данной работе, может составлять и самостоятельный интерес.

2. Множества $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_\infty$ и $\mathfrak{M}_C$. Не умаляя общности будем считать, что последовательности $\psi(k)$ из множества $\mathfrak{M}$ являются сужениями на множестве натуральных чисел некоторых положительных непрерывных выпуклых вниз и исчезающих на бесконечности функций $\psi(t)$ непрерывного аргумента $t \geq 1$. Множество таких функций по-прежнему будем обозначать через $\mathfrak{M}$. Итак, в дальнейшем,

$$\mathfrak{M} = \Big\{\psi(t):\ \psi(t) > 0,$$

$$\psi(t_1) - 2\psi\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) + \psi(t_2) \geq 0 \quad \forall t_1, t_2 \in [1, \infty), \quad \lim_{t \to \infty} \psi(t) = 0\Big\}.$$

Множество $\mathfrak{M}$ весьма не однородно по скорости стремления к нулю при $t \to \infty$ его элементов: функции $\psi(t)$ могут убывать как сколь угодно медленно, так и сколь угодно быстро. При этом оказывается, что форма результатов по приближениям функций из множеств $L^{\overline{\Psi}}$, их содержание, а также методы их получения существенно зависят от этой скорости. Поэтому возникает необходимость разбиения множества $\mathfrak{M}$ на подмножества, объединяющие функции $\psi \in \mathfrak{M}$, которые в определенном смысле имеют одинаковый характер стремления к нулю.

В качестве характеристики, с учетом которой оказывается удобно проводить такое разбиение, является пара функций $\eta(t) = \eta(\psi; t)$ и $\mu(t) = \mu(\psi; t)$, определяемых следующим образом. Пусть $\psi \in \mathfrak{M}$, тогда через $\eta(t) = \eta(\psi; t)$ обозначим функцию, связанную с ψ равенством

$$\psi(\eta(t)) = \frac{1}{2}\psi(t), \qquad t \geq 1. \tag{1}$$

В силу строгой монотонности функции ψ функция $\eta(t)$ для всех $t \geq 1$ из (1) определяется однозначно:

$$\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right). \tag{2}$$

Функция $\mu(t)$ определяется равенством

$$\mu(t) = \mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t) - t}. \tag{3}$$

Величина $\eta(t) - t$, как следует из (1), — длина промежутка $[t, \eta(t)]$, на котором значения функции ψ уменьшаются ровно в два раза. В связи с этим функция $\mu(\psi; t)$ названа в [2] модулем полураспада функции ψ.

Если $\psi_1(t) = t^{-r}$, $r > 0$, то $\mu(\psi_1; t) = (2^{1/r} - 1)^{-1}$; если $\psi_2(t) = 1/\ln(t + a)$, $a > e$, то $\mu(\psi_2; t) = t/((t+a)^2 + a - t)$; если же $\psi_3(t) = e^{-t}$, то $\mu(\psi_3; t) = t/\ln 2$. Эти примеры показывают, что величина $\mu(\psi; t)$ может быть ограничена сверху и снизу некоторыми положительными числами, стремиться к нулю при $t \to \infty$ и быть неограниченной сверху. Именно по этим признакам сначала выделим из множества $\mathfrak{M}$ следующие подмножества:

$$\mathfrak{M}_0 = \{\psi \in \mathfrak{M}:\ 0 < \mu(\psi; t) \le K \quad \forall\, t \ge 1\}, \tag{4}$$

$$\mathfrak{M}_\infty = \{\psi \in \mathfrak{M}:\ 0 \le K \le \mu(\psi; t) \quad \forall\, t \ge 1\}, \tag{5}$$

$$\mathfrak{M}_C = \{\psi \in \mathfrak{M}:\ 0 \le K_1 \le \mu(\psi; t) \le K_2 \quad \forall\, t \ge 1\}. \tag{6}$$

Здесь и в дальнейшем K, $K_1, \ldots$ — некоторые положительные постоянные, не зависящие от величин, которые являются в данном рассмотрении параметрами (в рассматриваемом случае — от переменной t).

Далее, через $\mathfrak{M}_0^+$ обозначим подмножество функций $\psi \in \mathfrak{M}_0$, для которых величина $\mu(\psi; t)$ при $t \to \infty$ монотонно стремится к нулю:

$$\mathfrak{M}_0^+ = \{\psi \in \mathfrak{M}:\ \mu(\psi; t) \downarrow 0\}, \tag{7}$$

а через $\mathfrak{M}_\infty^+$ — подмножество функций $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, если $\mu(\psi; t)$ монотонно и неограниченно возрастает при $t \to \infty$:

$$\mathfrak{M}_\infty^+ = \{\psi \in \mathfrak{M}:\ \mu(\psi; t) \uparrow \infty\}. \tag{8}$$

Отметим, что естественными примерами множества $\mathfrak{M}_C$ являются функции t^{-r}, $r > 0$, $t^{-r}\ln^{\varepsilon}(t + e)$, $\varepsilon \in R^1$, и др., множества $\mathfrak{M}_0^+$ — функции $\ln^{\varepsilon}(t + e)$ при $\varepsilon < 0$; множеству $\mathfrak{M}_\infty^+$ принадлежат функции $\exp(-\alpha t^r)$ при любых $\alpha > 0$ и $r > 0$. В этом легко убедиться с помощью следующего утверждения.

Теорема 1. *Функция $\psi \in \mathfrak{M}$ принадлежит к $\mathfrak{M}_0$ тогда и только тогда, когда величина*

$$\alpha(t) = \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}, \qquad \psi'(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \psi'(t+0), \tag{9}$$

удовлетворяет условию

$$\alpha(t) \ge K > 0 \quad \forall\, t \ge 1; \tag{10}$$

$\psi \in \mathfrak{M}$ принадлежит к $\mathfrak{M}_\infty$ тогда и только тогда, когда

$$\alpha(t) \le K \quad \forall\, t \ge 1; \tag{11}$$

$\psi \in \mathfrak{M}$ принадлежит к $\mathfrak{M}_C$ тогда и только тогда, когда

$$0 < K_1 \le \alpha(t) \le K_2 \quad \forall\, t \ge 1. \tag{12}$$

Если функция $\alpha(t)$ не убывает и

$$\lim_{t \to \infty} \alpha(t) = \infty, \tag{13}$$

то $\psi \in \mathfrak{M}_0^+$. *Если же* $\alpha(t)$ *не возрастает и*

$$\lim_{t \to \infty} \alpha(t) = 0, \tag{14}$$

то $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$.

Доказательство. Учитывая равенство (9) при $t \geq 1$, имеем

$$\psi(\eta(t)) \int_t^{\eta(t)} \frac{d\tau}{\tau\alpha(\tau)} \leq \int_t^{\eta(t)} |\psi'(\tau)|\, d\tau = \int_t^{\eta(t)} \frac{\psi(\tau)d\tau}{\tau\alpha(\tau)} \leq \psi(t) \int_t^{\eta(t)} \frac{d\tau}{\tau\alpha(\tau)}$$

или с учетом (2)

$$\frac{\psi(t)}{2} \int_t^{\eta(t)} \frac{d\tau}{\tau\alpha(\tau)} \leq \frac{\psi(t)}{2} \leq \psi(t) \int_t^{\eta(t)} \frac{d\tau}{\tau\alpha(\tau)},$$

т. е. при $t \geq 1$

$$\frac{1}{2} \leq \int_t^{\eta(t)} \frac{d\tau}{\tau\alpha(\tau)} \leq 1. \tag{15}$$

Если выполнено (10), то отсюда находим

$$\frac{K}{2} \leq \int_t^{\eta(t)} \frac{d\tau}{\tau} = \ln\frac{\eta(t)}{t} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{\mu(\psi;t)}\right).$$

Таким образом, в этом случае

$$\mu(\psi;t) \geq (e^{K/2} - 1)^{-1},$$

т. е. $\psi \in \mathfrak{M}_0$.

Если выполнено условие (11), то из (15) аналогично находим

$$\ln\left(1 + \frac{1}{\mu(\psi;t)}\right) \leq K,$$

откуда сразу следует $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$. Таким же образом убеждаемся, что при выполнении (12) функция ψ принадлежит к множеству $\mathfrak{M}_C$.

Если $\alpha(t)$ не убывает и выполняется (13), в силу (15) при $t \geq 1$ имеем

$$\alpha(t) \leq 2\ln\left(1 + \frac{1}{\mu(\psi;t)}\right). \tag{16}$$

Отсюда с учетом (13) заключаем, что

$$\lim_{t \to \infty} \mu(\psi;t) = 0. \tag{17}$$

Убедимся, что функция $\mu(\psi;t)$ монотонно убывает. Рассматривая функцию $\frac{1}{\mu(t)} = \frac{\eta(t)}{t} - 1$ заключаем, что это возможно тогда и только тогда, когда

$$t\eta'(t) - \eta(t) \geq 0. \tag{18}$$

Согласно (1) и (9)

$$\frac{1}{2}\psi(t) = \psi(\eta(t)) = -\eta(t)\psi'(\eta(t))\,\alpha(\eta(t)).$$

Объединяя это равенство с (9) и замечая, что вследствие (2) для каждой $\psi \in \mathfrak{M}$

$$\eta'(t) = \frac{\psi'(t)}{2\psi'(\eta(t))}, \tag{19}$$

в рассматриваемом случае получаем

$$\frac{t\eta'(t)\,\alpha(t)}{\eta(t)\,\alpha(\eta(t))} = 1 \tag{20}$$

или

$$t\eta'(t) = \eta(t)\frac{\alpha(\eta(t))}{\alpha(t)} \geq \eta(t),$$

т. е. соотношение (18) действительно справедливо. Тем самым доказано, что если $\alpha(t)$ не убывает и выполнено (13), то $\psi \in \mathfrak{M}_0^+$. Аналогично убеждаемся в том, что если $\alpha(t)$ не возрастает и выполняется (14), то $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$.

Остается показать, что при $\psi \in \mathfrak{M}_0$ выполняется условие (10); для каждой $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$ — условие (11) и для любой $\psi \in \mathfrak{M}_C$ — условие (12).

Для каждой функции $\psi \in \mathfrak{M}$ обозначим через $\overline{\eta}(t) = \overline{\eta}(\psi; t)$ функцию, обратную к $\eta(t)$. В силу (19) при любом $t \geq 1$ справедливо неравенство $\eta'(t) > 1/2$, из которого следует строгая монотонность функции $\eta(t)$. Поэтому функция $\overline{\eta}(t)$ на множестве $t \geq \eta(1)$ определяется однозначно и при каждом $t \geq \eta(1)$ справедливо соотношение

$$\psi(t) = -\int\limits_{\overline{\eta}(t)}^{t} \psi'(\tau)\,d\tau \geq |\psi'(t)|(t - \overline{\eta}(t)) \tag{21}$$

или

$$\frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|} \geq \frac{t - \overline{\eta}(t)}{t}. \tag{22}$$

Предположим теперь, что функция $\psi \in \mathfrak{M}$ такова, что

$$\mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t) - t} \leq K \quad \forall\, t \geq 1 \tag{23}$$

(т. е. $\psi \in \mathfrak{M}_0$). Тогда, полагая $z = \overline{\eta}(t)$, находим

$$\frac{t}{t - \overline{\eta}(t)} = \frac{\eta(z)}{\eta(z) - z} = 1 + \frac{z}{\eta(z) - z} \leq K + 1$$

или

$$\frac{t - \overline{\eta}(t)}{t} \geq \frac{1}{K+1}.$$

Подставляя эту оценку в (22), заключаем, что при выполнении (23) при всех $t \geq \eta(1)$

$$\frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|} \geq K_1 \geq 0.$$

Ясно, что такое же неравенство справедливо и при $t \in [1, \eta(1)]$. Этим доказано, что если $\psi \in \mathfrak{M}_0$, то условие (10) выполняется, а также то, что для функции $\psi \in \mathfrak{M}_C$ справедлива левая часть соотношения (12).

Для каждой функции $\psi \in \mathfrak{M}$ при любом $t \geq 1$ имеем

$$|\psi'(\eta(t))|(\eta(t) - t) = \frac{1}{2}\psi(t) = -\int_t^{\eta(t)} \psi'(\tau)\,d\tau \leq |\psi'(t)|(\eta(t) - t). \quad (24)$$

Отсюда

$$\frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|} \leq 2\,\frac{\eta(t) - t}{t}.$$

Если $\psi \in \mathfrak{M}$ такова, что

$$\mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t) - t} \geq K \qquad \forall\, t \geq 1,$$

т. е. $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, то

$$\frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|} \leq \frac{2}{K}.$$

Таким образом, если $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, то условие (11) выполняется, а если $\psi \in \mathfrak{M}_C$, то справедлива и правая часть соотношения (12). Теорема доказана.

Записывая равенство (9) в виде

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = -\frac{1}{t\alpha(t)}$$

и интегрируя последнее соотношение по промежутку $[1, t]$, $t > 1$, получаем

$$\psi(t) = \psi(1)\exp\left(-\int_1^t \frac{d\tau}{\tau\alpha(\tau)}\right).$$

Анализируя это равенство, приходим к такому утверждению.

***Следствие* 1.** *Если* $\psi \in \mathfrak{M}_0$, *то можно указать такое* $r_1 > 0$, *что при всех* $t \geq 1$ *будет*

$$\psi(t) \geq K t^{-r_1},$$

если $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, *то существует* $r_2 > 0$ *такое, что при всех* $t \geq 1$

$$\psi(t) \leq K t^{-r_2};$$

если же $\psi \in \mathfrak{M}_C$, *то существуют* $r_1, r_2 > 0$ *такие, что при всех* $t \geq 1$

$$K_1 t^{-r_1} \leq \psi(t) \leq K_2 t^{-r_2}.$$

3. Множество F. Дальнейшие исследования функций $\psi \in \mathfrak{M}$ связаны с поведением величины $\eta'(t) = \eta(\psi; t)$, для которой, как уже отмечалось, справедливо равенство (19), из которого следует, что $2\eta'(t)$ — число, показывающее во сколько раз изменяется значение $\psi'(\tau)$, когда τ пробегает отрезок $[t, \eta(t)]$. Уже отмечалось, что при $\psi \in \mathfrak{M}$

$$\eta'(t) \geq \frac{1}{2}, \qquad t \geq 1. \tag{25}$$

Примеры функций $\psi(t) = t^{-r}$, $r > 0$, и $\psi(t) = \ln^{-\varepsilon}(t+e)$, $\varepsilon > 0$, показывают, что эта величина для различных функций $\psi \in \mathfrak{M}$ может быть как ограниченной сверху, так и неограниченной. В связи с этим положим

$$F = \{\psi \in \mathfrak{M} \colon \eta'(\psi; t) \leq K\}. \tag{26}$$

Множество F имеет ряд специфических свойств. Сначала установим следующее утверждение.

Теорема 2. *Справедливо включение*

$$\mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}_\infty^+ \subseteq F. \tag{27}$$

Доказательство. Наряду с соотношениями (21) и (24) рассмотрим еще их аналог для промежутка $[\eta(t), \eta(\eta(t))]$:

$$|\psi'(\eta(\eta(t)))|(\eta(\eta(t)) - \eta(t)) \leq \frac{1}{4}\psi(t) \leq$$
$$\leq |\psi'(\eta(t))|(\eta(\eta(t)) - \eta(t)). \tag{28}$$

Объединяя соотношения (21) и (28), при $\psi \in \mathfrak{M}$ и произвольном $t \geq \eta(1)$, находим

$$\eta'(t) = \frac{\psi'(t)}{2\psi'(\eta(t))}\,\frac{t - \overline{\eta}(t)}{\eta(\eta(t)) - \eta(t)}\,\frac{\eta(\eta(t)) - \eta(t)}{t - \overline{\eta}(t)} \leq$$
$$\leq 2\,\frac{\eta(\eta(t)) - \eta(t)}{t - \overline{\eta}(t)} = 2\,\frac{\eta(\eta(t)) - \eta(t)}{\eta(t)}\,\frac{t}{t - \overline{\eta}(t)}\,\frac{\eta(t)}{t}. \tag{29}$$

Если $\psi \in \mathfrak{M}_C$, то из (6) следует, что каждая дробь в последнем выражении ограничена сверху. Поэтому для каждой $\psi \in \mathfrak{M}_C$ при любом $t \geq \eta(1)$ величина $\eta'(t)$ также ограничена. Ясно, что это справедливо и при $t \in [1, \eta(1)]$. Таким образом, $\mathfrak{M}_C \subset F$.

Если $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, то в силу (8) выполняется равенство

$$\eta(t) = t(1 + \gamma(t)), \tag{30}$$

в котором $\gamma(t)$ — функция, монотонно стремящаяся к нулю при $t \to \infty$. Поэтому $\eta'(t)) \leq 1 + \gamma(t)$ и, следовательно, $\mathfrak{M}_\infty^+ \subset F$.

Установим несколько критериев принадлежности функции $\psi \in \mathfrak{M}$ к множеству F.

Теорема 3. *Для того чтобы функция $\psi \in \mathfrak{M}$ принадлежала к F, необходимо и достаточно, чтобы при всех $t \geq 1$ выполнялось соотношение*

$$K_1\,|\psi'(t)|(\eta(t) - t) \leq \psi(t) \leq$$
$$\leq K_2\,|\psi'(\eta(t))|(\eta(t) - t), \qquad \eta(t) = \eta(\psi; t). \tag{31}$$

Действительно, если $\psi \in F$, то (31) следует из (24), (25), (19) и (26). В этом случае

$$|\psi'(\eta(t))| \leq |\psi'(t)| \leq 2K\,|\psi'(\eta(t))|. \tag{32}$$

Если же выполнено (31), то, разделив его на $|\psi'(\eta(t))|(\eta(t) - t)$, получим $\eta'(t) \leq K_2/2K_1$, т. е. действительно $\psi \in F$.

***Замечание* 1.** Если положить

$$\lambda(t) = \frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|},$$

то из (31) следует, что

$$K_1(\eta(t) - t) \le \lambda(t) \le K_2(\eta(t) - t) \qquad \forall\, \psi \in F.$$

Теорема 4. *Для того чтобы функция $\psi \in \mathfrak{M}$ принадлежала к F, необходимо и достаточно, чтобы при всех $t \ge 1$ выполнялось неравенство*

$$\frac{\eta(\eta(t)) - \eta(t)}{\eta(t) - t} \le K, \qquad \eta(t) = \eta(\psi; t). \tag{33}$$

Доказательство. Пусть $\psi \in F$ и $K_0 > 1/2$ таково, что $\eta'(t) \le K_0$ при любом $t \ge 1$. Тогда

$$\eta(\eta(t)) - \eta(t) = \int\limits_t^{\eta(t)} \eta'(\tau)\, d\tau \le K_0(\eta(t) - t), \tag{34}$$

откуда следует (33) при $K = K_0$.

Пусть теперь выполняется (33). Тогда вследствие (21) и (28) при всех $t \ge \eta(1)$ находим

$$\eta'(t) = \frac{\psi'(t)}{2\psi'(\eta(t))} \le 2\,\frac{\eta(\eta(t)) - \eta(t)}{t - \bar{\eta}(t)}\,\frac{\eta(t) - t}{\eta(t) - t} \le 2K^2.$$

Таким образом, при $t \ge \eta(1)$ величина $\eta'(t)$ ограничена. Понятно, что такой же она является и при $t \in [1, \eta(1)]$.

***Замечание* 2.** Поскольку при $\psi \in \mathfrak{M}$ справедлива оценка $\eta'(t) \ge 1/2$, то, оценивая интеграл в (34) снизу, приходим к заключению, что при $t \ge 1$

$$\frac{\eta(\eta(t)) - \eta(t)}{\eta(t) - t} \ge \frac{1}{2} \qquad \forall\, \psi \in \mathfrak{M}. \tag{35}$$

Таким образом, согласно (33) и (35) при всех $t \ge 1$

$$2(\eta(t) - t) \le \eta(\eta(t)) - \eta(t) \le K(\eta(t) - t) \qquad \forall\, \psi \in F. \tag{36}$$

Теорема 5. *Для того чтобы для данной функции $\psi \in \mathfrak{M}$ при всех $t \ge 1$ выполнялось соотношение*

$$K_1\psi(t) \le \int\limits_{\eta(t)}^{\infty} \frac{\psi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau \le K_2\psi(t), \qquad \eta(t) = \eta(\psi; t), \tag{37}$$

необходимо и достаточно, чтобы ψ принадлежала к F.

Если $\psi \in F$, то при $t \ge 1$

$$\int\limits_t^{\eta(t)} \frac{\psi(\tau) - \psi(t)}{\tau - t}\, d\tau \le K\psi(t), \tag{38}$$

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{\psi(\tau)}{\tau}\, d\tau \le K. \tag{39}$$

Доказательство. Поскольку

$$\int\limits_{\eta(t)}^{\infty} \frac{\psi(\tau)}{\tau - t} d\tau > \int\limits_{\eta(t)}^{\eta(\eta(t))} \frac{\psi(\tau)}{\tau - t} d\tau >$$

$$> \frac{\psi(t)}{4} \int\limits_{\eta(t)}^{\eta(\eta(t))} \frac{d\tau}{\tau - t} = \frac{\psi(t)}{4} \ln\left(1 + \frac{\eta(\eta(t)) - \eta(t)}{\eta(t) - t}\right), \tag{40}$$

то оценка сверху интеграла в (37) возможна только при условии (33). Таким образом, включение $\psi \in F$ необходимо для выполнения (37). Если же $\psi \in F$, то в силу (24) и (33)

$$\int\limits_{\eta(t)}^{\infty} \frac{\psi(\tau)}{\tau - t} d\tau \le 2 \int\limits_{\eta(t)}^{\infty} |\psi'(\tau)| \frac{\eta(\tau) - \tau}{\tau - \overline{\eta}(\tau)} d\tau \le K\psi(t);$$

оценка снизу в (37) следует из (40) и (35).

Учитывая (31), получаем оценку (38):

$$\int\limits_{t}^{\eta(t)} \frac{\psi(\tau) - \psi(t)}{\tau - t} d\tau \le |\psi'(t)|(\eta(t) - t) \le K\psi(t).$$

Чтобы доказать (39), сначала заметим, что при $\psi \in F$ и $t \ge \eta(t)$

$$\eta(t) - t = \int\limits_{\overline{\eta}(t)}^{t} \eta'(\tau)\, d\tau \le K(t - \overline{\eta}(t)) < Kt. \tag{41}$$

Отсюда следует

$$\mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t) - t} \ge K_1 > 0 \quad \forall \psi \in F, \quad \forall t \ge 1. \tag{42}$$

Пользуясь соотношением (24) и оценкой (42), находим

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\psi(\tau)}{\tau} d\tau \le 2 \int\limits_{1}^{\infty} |\psi'(\tau)| \frac{\eta(\tau) - \tau}{\tau} d\tau \le K.$$

Теорема доказана.

4. Два контрпримера. Соотношение (42) означает справедливость включения $F \subseteq \mathfrak{M}_\infty$. Таким образом, с учетом теоремы 2 имеем

$$\mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}_\infty^+ \subseteq F \subseteq \mathfrak{M}_\infty. \tag{43}$$

На самом деле оба включения в этом соотношении строгие, поскольку справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. *Множество* $\mathfrak{M}_\infty \backslash F$ *не пусто. В нем, в частности, есть функции* ψ, *для которых*

$$\eta(\psi; t) - t < 2. \tag{44}$$

Множество $F \backslash (\mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}_\infty^+)$ *также не пустое и в нем также есть функции* ψ, *удовлетворяющие условию* (44).

Доказательство. Докажем сначала первую часть теоремы. Это утверждение будет доказанным, если укажем функцию $\psi^* \in \mathfrak{M}$, удовлетворяющую условию (44), для которой $\psi(1) = 1$ и величина $\eta'(t)$, или же в силу теоремы 4, величина

$$R(\psi;t) = \frac{\eta(\eta(t)) - \eta(t)}{\eta(t) - t} \tag{45}$$

будет неограниченной на множестве $t \geq 1$. Полагая $\psi(t) = 2x$, имеем

$$\eta(t) - t = \psi^{-1}(x) - \psi^{-1}(2x), \tag{46}$$

$$R(\psi;t) = \frac{\psi^{-1}(x/2) - \psi^{-1}(x)}{\psi^{-1}(x) - \psi^{-1}(2x)}, \quad x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]. \tag{47}$$

Отсюда заключаем, что для получения требуемого утверждения достаточно указать функцию $g(x)$, выпуклую вниз, на промежутке $(0, 1]$, для которой

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \infty, \tag{48}$$

$$g(x) - g(2x) < 2 \tag{49}$$

и величина

$$G(x) = \frac{g(x/2) - g(x)}{g(x) - g(2x)} \tag{50}$$

является неограниченной на $(0, 1/2)$. В таком случае функция $\psi^* = g^{-1}(t)$ будет искомой. В самом деле, $g^{-1}(t)$ как обратная к выпуклой вниз, будет также выпуклой вниз при всех $t \geq 1$ и в силу (48) исчезает на бесконечности, т. е. $\psi^* \in \mathfrak{M}$; соотношение (44) будет следовать из (49) (значит, $\psi^* \in \mathfrak{M}_\infty$), и так как $R(\psi^*;t) = G(x)$ при $x = \psi^*(t)/2$, то из факта неограниченности $g(x)$ в окрестности нуля будет следовать неограниченность $R(\psi^*;t)$ на бесконечности.

Пусть a_k, $k = 0, 1, \ldots$, — произвольная монотонно убывающая к нулю последовательность действительных чисел, $a_0 = 1$, и при любом $k \in N$ выполняются условия

$$a_{k+1} \leq \frac{a_k}{2} < a_k < 2a_k < a_{k-1}. \tag{51}$$

Пусть далее c_k, $k = 0, 1, \ldots$, — произвольная неубывающая последовательность положительных чисел и $\varphi(t)$ — функция, заданная условиями

$$\varphi(t) = c_k, \quad a_{k+1} \leq t \leq a_k, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{52}$$

Тогда положим

$$g(x) = 1 + \int_x^1 \varphi(t)\,dt. \tag{53}$$

Легко видеть, что при любом $k = 1, 2, \ldots$

$$g(a_k) = 1 + \sum_{i=0}^{k-1} c_i h_i, \quad h_i = a_i - a_{i+1}, \tag{54}$$

и с учетом (51)

$$g(2a_k) = g(a_k) - c_{k-1}a_k, \tag{55}$$

$$g(a_k/2) = g(a_k) + c_k a_k/2. \tag{56}$$

Поэтому при $k \in N$

$$G(a_k) = \frac{g(a_k/2) - g(a_k)}{g(a_k) - g(2a_k)} = \frac{c_k}{2c_{k-1}}. \tag{57}$$

Убедимся, что можно подобрать числа a_k и c_k так, чтобы для $g(x)$ вместе с (51) выполнялись условия (48) и (49), а также, чтобы

$$\lim_{k\to\infty} \frac{c_k}{2c_{k-1}} = \infty. \tag{58}$$

Понятно, что тем самым требуемое будет доказано.

Из дальнейшего видно, что эти числа можно выбрать многими способами. Пусть, например, $a_k = 2^{-k^2}$ и $c_k = 2^{k^2}$, $k = 0, 1, \ldots$. Тогда

$$h_k = a_k - a_{k+1} = 2^{-k^2}(1 - 2^{-(2k+1)}), \tag{59}$$

$$\frac{1}{2}a_k = 2^{-(k^2+1)} > 2^{-(k+1)^2} = a_{k+1} \tag{60}$$

и

$$2a_k = 2^{-k^2+1} < 2^{-(k-1)^2} = a_{k-1}, \tag{61}$$

т. е. для выбранной последовательности a_k условия (51) выполняются. В то же время

$$\lim_{k\to\infty} \frac{c_k}{2c_{k-1}} = \lim_{k\to\infty} 2^{2(k-1)} = \infty$$

и нам остается проверить условия (48) и (49). Пусть при некотором $k \geq 1$ $x \in [a_{k+1}, a_k]$. Тогда в силу (53), (54) и (59) $g(x) \geq g(a_k) \geq k$, откуда сразу получаем равенство (48).

Кроме того, в этом случае согласно (61) $2x \leq 2a_k \leq a_{k-1}$. Поэтому с учетом (54) и (59) находим

$$g(x) - g(2x) \leq g(a_{k+1}) - g(a_{k-1}) = c_{k-1}h_{k-1} + c_k h_k < 2.$$

Первая часть теоремы доказана.

Чтобы доказать и вторую ее часть, будем по-прежнему пользоваться конструкцией построенной выше функции $g(x)$, только на этот раз положим $a_k = 2^{-Nk}$ и $c_k = 2^{Nk}$, $k = 0, 1, \ldots$, где N — любое число, больше чем 4. В этом случае

$$h_k = a_k - a_{k+1} = 2^{-Nk}(1 - 2^{-N}), \tag{62}$$

$$\frac{1}{2}a_k = 2^{-(Nk+1)} > 2^{-N(k+1)} = a_{k+1}$$

и

$$2a_k = 2^{-Nk+1} < 2^{-N(k-1)} = a_{k-1},$$

т. е. условия (51) для выбранных значений выполняются и, следовательно, формулы (54) – (56) остаются в силе. Покажем, что в данном случае величина $G(x)$, определяемая формулой (50), является ограниченной на промежутке

$(0, 1/2)$. Пусть x — любая точка из $(0, 1/2)$ и пусть, конкретнее, $x \in [a_{k+1}, a_k]$, $k \geq 1$. Тогда, учитывая соотношения (51) и (54) – (56), находим

$$G(x) = \frac{g(x/2) - g(x)}{g(x) - g(2x)} \leq$$

$$\leq \frac{g(a_{k+2}) - g(a_k)}{g(a_k) - g(a_{k-1})} = \frac{c_{k+1} h_{k+1} + c_k h_k}{c_k h_k} = 1 + \frac{c_{k+1} h_{k+1}}{c_k h_k}.$$

Отсюда с учетом (62) заключаем, что $G(x) \leq 2$ при любых $x \in (0, 1/2)$. Следовательно, для функции $\psi^*(t)$, обратной к $g(x)$, которая, очевидно, принадлежит к $\mathfrak{M}$, величина $R(\psi^*; t)$ будет ограниченной при всех $t \geq 1$, что в свою очередь в силу теоремы 4 означает, что $\psi^* \in F$. Далее, так как в силу (62)

$$g(x) - g(2x) \leq g(a_{k+1}) - g(a_{k-1}) = c_{k-1} h_{k-1} + c_k a_k \leq 2,$$

то для функции ψ^* условие (44) выполняется и для завершения доказательства теоремы остается показать, что величина $\mu(\psi^*; t)$ не является монотонной или, что то же самое, не является монотонной на $(0, 1/2)$ функция $f(x) = g(x)/g(2x)$. Заметим, что $f(x)$ является непрерывно дифференцируемой всюду на $(0, 1/2)$, за исключением точек a_k и $a_k/2$, $k = 1, 2, \ldots$. Поэтому наше утверждение будет доказанным, если укажем промежутки непрерывной дифференцируемости функции $f(x)$, на которых выражение $\varphi(x) = g'(x)g(2x) - 2g(x)g'(2x)$ будет иметь противоположные знаки.

Пусть сначала $x \in I_k \subset (a_k/2, a_k)$. Тогда $2x \in (a_k, 2a_k)$ и в силу (53) $g'(x) = -c_k$, $g'(2x) = -c_{k-1}$; $g(2x) > g(2a_k) > g(a_{k-1}) g(x) < g(a_k/2)$. Поэтому $\varphi(x) < 2c_{k-1} g(a_k/2) - c_k g(2a_k) = 2^{Nk}(2^{1-N}(g(a_k) + 1/2) - g(a_k) + 2^{-N})$. Проведя элементарные преобразования, увидим, что при всех $N \geq 2$ $\varphi(x) < 0$. Пусть теперь $x \in I'_k \subset (a_k/4, a_k/2)$. Поскольку при $N \geq 2$ $a_k/4 = 2^{-Nk-2} \geq 2^{-N(k+1)} = a_{k+1}$, то в этом случае $g'(x) = g'(2x) = -c_k$. Следовательно, выполняется равенство $\varphi(x) = -c_k(g(2x) - 2g(x))$ и так как $g(x)$ убывает, то $\varphi(x) > 0$, что и завершает доказательство теоремы.

5. Функция $\eta_a(t)$ и определяемые ею множества. Заменим в равенстве (1) константу $1/2$ произвольной константой $a \in (0, 1)$, а определяющуюся при этом функцию η обозначим через η_a:

$$\psi(\eta_a(t)) = a\psi(t), \qquad t \geq 1. \tag{63}$$

Такое определение корректно в том смысле, что для любой $\psi \in \mathfrak{M}$ при всех $t \geq 1$ значение $\eta_a(t)$ определяется однозначно равенством

$$\eta_a(t) = \eta_a(\psi; t) = \psi^{-1}(a\psi(t)) \tag{64}$$

и

$$\eta_{1/2}(t) = \eta(t). \tag{65}$$

Полагая далее

$$\mu_a(t) = \mu_a(\psi; t) = \frac{t}{\eta_a(t) - t}, \tag{66}$$

можно вводить аналоги множеств $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_\infty$ и $\mathfrak{M}_C$ и др.:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_0^{(a)} &= \{\psi \in \mathfrak{M}\colon 0 < \mu_a(\psi; t) \le K \quad \forall\, t \ge 1\}, \\ \mathfrak{M}_\infty^{(a)} &= \{\psi \in \mathfrak{M}\colon 0 < K \le \mu_a(\psi; t) < \infty \quad \forall\, t \ge 1\}, \\ \mathfrak{M}_C^{(a)} &= \{\psi \in \mathfrak{M}\colon 0 < K_1 \le \mu_a(\psi; t) \le K_2 \quad \forall\, t \ge 1\}, \\ \mathfrak{M}_0^{(a)+} &= \{\psi \in \mathfrak{M}\colon \mu_a(\psi; t) \downarrow 0\}, \qquad \mathfrak{M}_\infty^{(a)+} = \{\psi \in \mathfrak{M}\colon \mu_a(\psi; t) \uparrow \infty\}, \end{aligned} \tag{67}$$

а также аналог множества F:

$$F_a = \{\psi \in \mathfrak{M}\colon\ \eta_a'(\psi; t) \le K\}. \tag{68}$$

Нетрудно видеть, что теоремы $1-5$ остаются в силе и их доказательства практически не изменяются, если в соответствующих местах их формулировок и доказательств добавить индекс a. После таких же изменений справедлива и теорема 6. Ее доказательство также остается прежним с заменой в нужных местах числа $1/2$ на число a. Более содержательным в этом направлении есть следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть* a_1 *и* a_2 *— любые числа из промежутка* $(0; 1)$. *Тогда*

$$F_{a_1} = F_{a_2}. \tag{69}$$

Таким образом, все множества F_a *при* $a \in (0, 1)$ *равны между собой и, в частности,*

$$F_a = F_{1/2} = F \qquad \forall\, a \in (0, 1). \tag{70}$$

Доказательство. Пусть, к примеру, $\psi \in F_{a_1}$. Это означает, что найдется постоянная K_1, для которой

$$\eta_{a_1}'(t) = \frac{a_1 \psi'(t)}{\psi'(\eta_{a_1}(t))} \le K_1 \qquad \forall\, t \ge 1. \tag{71}$$

Нам следует показать, что в таком случае существует постоянная K_2 такая, что для каждого $t \ge 1$

$$\eta_{a_2}'(t) = \frac{a_2 \psi'(t)}{\psi'(\eta_{a_2}(t))} \le K_2. \tag{72}$$

Если $a_1 < a_2$, то $\eta_{a_2}(t) < \eta_{a_1}(t)$ и, следовательно, $|\psi'(\eta_{a_1}(t))| \le \le |\psi'(\eta_{a_2}(t))|$. Поэтому из (71) следует (72) при $K_2 = \dfrac{a_2}{a_1} K_1$. Если же $a_2 < < a_1$, то в этом случае положим $t = t_0$, $t_1 = \eta_{a_1}(t_0)$, $t_2 = \eta_{a_1}(t_1)$, $\ldots$, $t_{k+1} = = \eta_{a_1}(t_k)$, $\ldots$ и через n обозначим любое натуральное число такое, что $t_n \ge \ge \eta_{a_2}(t)$. На каждом промежутке $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots$, вследствие (71) значение производной $\psi'(\cdot)$ увеличивается не более, чем в K_1/a_1 раза. Значит, $|\psi'(t_n)| \ge (K_1/a_1)^{-n} |\psi'(t)|$. Однако $|\psi'(t_n)| \le |\psi'(\eta_{a_2}(t))|$. Поэтому

$$\eta_{a_2}' \le a_2 \left(\frac{K_1}{a_1}\right)^n$$

и тем самым теорема 7 доказана.

Теорема 8. *Для того чтобы для данной функции $\psi \in \mathfrak{M}$ при любых $a_1, a_2 \in (0, 1)$ и при всех $t \geq 1$ выполнялось соотношение*

$$K_1 \leq \frac{\eta_{a_1}(t) - t}{\eta_{a_2}(t) - t} \leq K_2, \quad \eta_{a_i}(t) = \eta_{a_i}(\psi; t), \quad i = 1, 2, \tag{73}$$

в котором константы K_1 и K_2 в общем могут зависеть от значений a_1 и a_2, необходимо и достаточно, чтобы $\psi \in F$.

Доказательство. Если выполнено соотношение (73), то, в частности, будет

$$K_1 \leq \frac{\eta_{1/4}(t) - t}{\eta_{1/2}(t) - t} \leq K_2.$$

Однако $\eta(\eta(t)) = \eta_{1/2}(\eta_{1/2}(t)) = \eta_{1/4}(t)$. Поэтому

$$R(\psi; t) = \frac{\eta(\eta(t)) - \eta(t)}{\eta(t) - t} = \frac{\eta_{1/4}(t) - t}{\eta_{1/2}(t) - t} - 1.$$

Следовательно, $R(\psi; t) \leq K_2 - 1$, что в силу теоремы 4 означает, что $\psi \in F$. Необходимость условий теоремы доказана.

Если $\psi \in F$, то в силу теоремы 7 $\psi \in F_{a_1}$ и $\psi \in F_{a_2}$. Поэтому с учетом аналога соотношения (31), записанного для множеств F_{a_1} и F_{a_2}, заключаем, что при любом $t \geq 1$

$$K_1 |\psi'(t)| (\eta_{a_i}(t) - t) \leq \psi(t) \leq K_2 |\psi'(t)| (\eta_{a_i}(t) - t), \quad i = 1, 2,$$

откуда и следует соотношение (73).

6. Множества B и $\mathfrak{M}_0$. Пусть c — некоторое число, удовлетворяющее условию $c > 1$. Тогда через B_c обозначим множество монотонно убывающих при всех $t \geq 1$ функций $\psi(t)$, для которых можно указать постоянную K такую, что при всех $t \geq 1$ выполняется неравенство

$$\frac{\psi(t)}{\psi(ct)} \leq K. \tag{74}$$

Если c и c_1 — любые числа, больше единицы, то

$$B_c = B_{c_1}. \tag{75}$$

Действительно, пусть $\psi \in B_c$. Тогда, если $c_1 \leq c$, то неравенство

$$\frac{\psi(t)}{\psi(c_1 t)} \leq K_1$$

следует из (74) при $K_1 = K$ в силу убывания функции ψ. Если же $c_1 > c$, то, обозначая через n любое из чисел, для которых $c^n \geq c_1$, имеем

$$\frac{\psi(t)}{\psi(c_1 t)} \leq \frac{\psi(t)}{\psi(c^n t)} \frac{\psi(c^{n-1} t)}{\psi(c^{n-1} t)} \cdots \frac{\psi(c^2 t)\, \psi(ct)}{\psi(c^2 t)\, \psi(ct)} \leq K^n.$$

Таким образом, все множества B_c, $c > 1$, совпадают и равны, к примеру, $B_2 \stackrel{\mathrm{df}}{=} B$.

Теорема 9. *Для того чтобы функция $\psi \in \mathfrak{M}$ принадлежала к $\mathfrak{M}_0$, необходимо и достаточно, чтобы она принадлежала к множеству B, т. е.*

$$\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M} \cap B. \tag{76}$$

Доказательство. Из определения множества $\mathfrak{M}_0$ следует, что если $\psi \in \mathfrak{M}_0$, то можно указать такое $\varepsilon > 0$, что для каждого $t \geq 1$ выполняется соотношение

$$\frac{\eta(\psi; t) - t}{t} \geq \varepsilon$$

или

$$\eta(\psi; t) \geq (1 + \varepsilon) t.$$

Поэтому если $\psi \in \mathfrak{M}_0$, то

$$\frac{\psi(t)}{\psi((1+\varepsilon)t)} \leq 2,$$

т. е. $\psi \in B_c$ при $c = (1 + \varepsilon)$ и, следовательно, $\psi \in \mathfrak{M} \cap B$. Пусть теперь $\psi \in \mathfrak{M} \cap B$. В силу (24) для каждого $\psi \in \mathfrak{M}$

$$\eta(\psi; t) - t \geq \frac{1}{2} \frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|}. \tag{77}$$

Если к тому же $\psi \in B$, то существует константа K такая, что для $t \geq 1$

$$K \geq \frac{\psi(t)}{\psi(2t)} = \frac{\psi(t) - \psi(2t)}{\psi(2t)} + 1 = \frac{|\psi'(\xi)| t}{\psi(2t)} + 1 \geq \frac{|\psi'(2t)|}{\psi(2t)} t + 1.$$

Отсюда при $t \geq 2$ имеем

$$\frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|} \geq \frac{t}{2(K-1)}.$$

Таким образом, можно указать $\varepsilon > 0$ такое, что для $t \geq 1$ будет

$$\frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|} \geq \varepsilon t.$$

Подставляя эту оценку в (77), убеждаемся, что $\psi \in \mathfrak{M}_0$.

1. *Степанец А. И.* Скорость сходимости рядов Фурье на классах $\overline{\psi}$-интегралов // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 8. – С. 1069–1113.
2. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.

Получено 25.12.98