УДК 517.5

В. С. Романюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПРИБЛИЖЕНИЕ В СРЕДНЕМ С ВЕСОМ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ И КОНЕЧНОМЕРНЫМИ ПОДПРОСТРАНСТВАМИ

We establish estimates of classic approximative values for sets from the functional spaces (the classes of functions analytic in Jordan domains) and values of the best polynomial approximation and the Kolmogorov widths.

Встановлено оцінки класичних апроксимаційних величин для множин із функціональних просторів (класів аналітичних в жорданових областях функцій) — величини найкращого поліноміального наближення і колмогоровських поперечників.

В настоящей работе проводятся исследования, связанные с приближением функций, представимых в односвязной области G комплексной плоскости $\mathbb{C}$ интегралами типа Коши, с плотностями из классов $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$ (их определение см. в [1, 2]) вдоль замкнутой спрямляемой жордановой кривой (з. с. ж. к.) Γ — границы области G.

Пусть $\tilde{L}_p(\Gamma)$, $1 \le p < \infty$, — пространство функций, определенных и измеримых на Γ, для которых

$$\|f\|_{\Gamma,p} \overset{\text{df}}{=} \left(\int\limits_{\Gamma} |f(\zeta)|^p |\Phi'(\zeta)|\,|d\zeta|\right)^{1/p} = \left(\int\limits_0^{2\pi} |f(\Psi(e^{it}))|^p\, dt\right)^{1/p} < \infty$$

и $\tilde{B}_p(\Gamma) = \{f \in \tilde{L}_p(\Gamma) \colon \|f\|_{\Gamma,p} \le 1\}$. Здесь $\Phi(\cdot)$ — функция, конформно и однолистно отображающая внешность области $\overline{G} = G \cup \Gamma$ на внешность единичного круга $\overline{D}$ $(D = \{z : |z| < 1\})$, причем

$$\lim_{z \to \infty} z^{-1}\Phi(z) = \alpha > 0; \qquad \Phi(\infty) = \infty,$$

а $\Psi(\cdot)$ — функция, обратная к $\Phi(\cdot)$.

В дальнейшем $L^{\psi}_{\beta,p}(\Gamma) \overset{\text{df}}{=} L^{\psi}_{\beta}\tilde{B}_p(\Gamma)$ и

$$L^{\psi}_{\beta,p}(G) \overset{\text{df}}{=} \left\{\mathcal{K} f \colon\ \mathcal{K} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \quad z \in G, \quad f \in L^{\psi}_{\beta,p}(\Gamma)\right\}.$$

Через $\tilde{A}_p(\overline{G})$, $1 \le p < \infty$, обозначим пространство функций $f(\cdot)$, аналитических в G и имеющих почти всюду на Γ угловые граничные значения, образующие функции $\tilde{f}(\cdot)$, принадлежащие пространству $\tilde{L}_p(\Gamma)$. Норму в пространстве $\tilde{A}_p(\overline{G})$ определим соотношением $\|f\|_{\tilde{A}_p(\overline{G})} \overset{\text{df}}{=} \|\tilde{f}\|_{\Gamma,p}$.

Пусть далее Γ — з. с. ж. к. и $\omega(\cdot)$ — почти всюду конечная, положительная, измеримая на Γ функция (вес на Γ); $\theta_z(r) = \{\zeta \colon \zeta \in B(z\,;r) \cap \Gamma\}$, где $B(z\,;r)$ — круг с центром в точке z радиуса r.

Обозначим через $A_p(\Gamma\,;c)$ множество весовых функций $\omega(\cdot)$ на Γ, для которых

$$\sup_{z\in\Gamma}\sup_{r>0}\left(\frac{1}{\mu(\theta_z(r))}\int_{\theta_z(r)}\omega(\zeta)\,|d\zeta|\right)\left(\frac{1}{\mu(\theta_z(r))}\int_{\theta_z(r)}\omega(\zeta)^{-1/(p-1)}|d\zeta|\right)^{p-1}\leq c \quad (1)$$

при $1<p<\infty$, и

$$\sup_{z\in\Gamma}\sup_{r>0}\left(\frac{1}{\mu(\theta_z(r))}\int_{\theta_z(r)}\omega(\zeta)\,|d\zeta|\right)\operatorname*{ess\,sup}_{\zeta\in\Gamma}\frac{1}{\omega(\zeta)}\leq c \quad \text{при} \quad p=1,$$

где c — постоянная, зависящая от Γ, $\mu(A)$ — мера Лебега множества A на Γ.

Условие (1) — аналог известного условия Маккенхаупта для весов, определенных на з. с. ж. к. Γ [3].

Положим

$$A_p(\Gamma)=\bigcup\nolimits_{c>0}A_p(\Gamma;c).$$

Будем писать $\Gamma\in RA_p$, если

1) Γ — регулярная кривая, т. е. $\sup\limits_{z\in\Gamma}\sup\limits_{r>0}\dfrac{\theta_z(r)}{r}\leq C_0$, где C_0 — постоянная, зависящая от Γ;

2) $|\Phi'|\in A_p(\Gamma)$, где $\Phi'(\cdot)$ — производная отбражающей функции $\Phi(\cdot)$.

В работе получены порядковые оценки колмогоровских поперечников классов $L^{\psi}_{\beta,p}(G)$ в пространстве $\tilde{A}_q(\overline{G})$, оценки наилучших приближений классов $L^{\psi}_{\beta}\tilde{L}_p(G)$ с помощью алгебраических полиномов в пространстве $\tilde{A}_q(\overline{G})$, $1<p$, $q<\infty$, а также точные по порядку оценки верхних граней таких приближений по множеству $L^{\psi}_{\beta,p}(G)$.

Рассмотрены различные случаи ограничений на последовательность $\{\psi(k),\ k\in\mathbb{N}\}$, определяющую класс $L^{\psi}_{\beta}\tilde{L}_p(G)$, граничные свойства элементов которого существенным образом зависят от свойств этой последовательности. При этом предполагается, что область G ограничена кривой Γ, принадлежащей множеству RA_q.

Излагаемые ниже утверждения дополняют, а в определенных ситуациях и обобщают известные результаты о приближении функций из классов Смирнова $E_p(G)$, $1<p<\infty$, и являются, в определенной степени, аналогами соответствующих результатов для периодических функций из классов $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ (см. [4], а также [5, 6]).

Кроме вводимых по ходу изложения обозначений и определений, в работе используются также обозначения из [1, 2].

Мы пишем $\alpha(n)<<\beta(n)$, если существует $C>0$ такое, что для каждого $n\in\mathbb{N}$: $\alpha(n)/\beta(n)\leq C$. Запись $\alpha(n)\asymp\beta(n)$ означает, что $\alpha(n)<<\beta(n)$ и $\alpha(n)>>\beta(n)$. Через C, $C^{(1)}$, $C^{(2)}_{p,q}$, K_p и т. п. обозначаются положительные постоянные, возможно зависящие от указанных параметров; $a_+=\max\{a;0\}$, $a\in\mathbb{R}$.

Основные результаты. *Наилучшие полиномиальные приближения.* Пусть $\mathcal{K}^+f(\cdot)$ — угловые граничные значения интеграла типа Коши $\mathcal{K}f(\cdot)$ изнутри области G, т. е.

$$\mathcal{K}^+ f(\zeta) = \lim_{\substack{z \to \zeta, \\ z \in G}} \mathcal{K} f(z), \qquad \zeta \in \Gamma.$$

Известно [7], что если Γ — спрямляемая кривая, то $\mathcal{K}^+ f(\zeta)$ существует почти для всех точек $\zeta \in \Gamma$ для любой функции $f \in L(\Gamma)$.

Введем обозначения: $\rho_n(\mathcal{K}f; z) = |\mathcal{K} f(z) - S_{n-1}^F(\mathcal{K} f; z)|$ — уклонение частной суммы Фабера порядка n от функции $\mathcal{K}f(\cdot)$ в точке $z \in G$;

$$\mathcal{E}_n(W)_{\Gamma,q} = \sup_{f \in W} \|\rho_n(\mathcal{K}^+ f; \cdot)\|_{\Gamma,q}, \qquad W \subset L(\Gamma);$$

$$E_n(\mathcal{K}f)_{\Gamma,q} = \inf_{P_n \in \mathcal{P}_n} \|\mathcal{K}^+ f(\cdot) - P_n(\cdot)\|_{\Gamma,q},$$

где $\mathcal{P}_n$ — пространство алгебраических полиномов степени не выше $n-1$;

$$E_n(W)_{\Gamma,q} = \sup_{f \in W} E_n(\mathcal{K} f)_{\Gamma,q}, \qquad W \subset L(\Gamma).$$

Напомним, что $S_n^F(\mathcal{K} f; z) = \sum_{k=0}^{n} a_k(f) F_k(z)$, где $a_k(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} f(\Psi(w))\, w^{-k-1}\, dw$, $k = 0, 1, \ldots$, — коэффициенты Фабера функции $\mathcal{K}f(\cdot)$, а $F_k(z)$ — многочлен Фабера порядка k для области G (см., например, [8, с. 350]).

Будем говорить, что при фиксированном $\alpha \geq 0$ последовательность $\{\psi(k), k \in \mathbb{N}\}$ принадлежит множеству P_α [4, с. 207], если величины

$$\nu_\alpha(\psi) = \sup_k |\psi(k)|\, k^\alpha,$$

$$\sigma_\alpha(\psi) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\psi(k+1)(k+1)^\alpha - \psi(k) k^\alpha|$$

конечны.

Например, это верно, если $\{\psi(k), k \in \mathbb{N}\}$ — последовательность положительных чисел — такова, что $\{\psi(k) k^\alpha, k \in \mathbb{N}\}$ не возрастает. В дальнейшем множество таких последовательностей будем обозначать через I_α.

При каждом фиксированном $\alpha \geq 0$ через $P_\alpha^{(n)}$ обозначим подмножество последовательностей $\{\psi(k), k \in \mathbb{N}\}$ из P_α, для которых выполняются соотношения

$$\sigma_\alpha(\psi_n) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\psi_n(k+1)(k+1)^\alpha - \psi_n(k) k^\alpha| \leq \mathcal{K} \nu(n) n^\alpha,$$

где

$$\psi_n(k) = \begin{cases} 0, & k < n; \\ \psi(k), & k \geq n, \end{cases}$$

$$\nu(n) = \nu(\psi; n) = \sup_{k \geq n} |\psi(k)|.$$

Понятно, что при $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \geq 0$ $I_\alpha \subset P_\alpha^{(n)}$ (в этом случае $\nu(n) = \psi(n)$).

Теорема 1. *Пусть* $\Gamma \in RA_q$, $1 < p, q < \infty$, $\alpha = (1/p - 1/q)_+$ *и* $\psi \in P_\alpha^{(n)}$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тогда для* $f \in L_\beta^\psi \tilde{L}_p(\Gamma)$ *имеем*

$$E_n(\mathcal{K}f)_{\Gamma,q} \asymp \|\rho_n(\mathcal{K}^+ f; \cdot)\|_{\Gamma,q} \ll \nu(n) n^\alpha E_n(F_\beta^\psi)_p. \tag{2}$$

Теорема 1′. *Пусть* $\Gamma \in RA_q$, $1 < p, q < \infty$, $\alpha = (1/p - 1/q)_+$ *и* $\psi \in P_\alpha^{(n)}$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тогда*

$$E_n(L_{\beta,p}^\psi(G))_{\Gamma,q} \asymp \mathcal{E}_n(L_{\beta,p}^\psi(G))_{\Gamma,q} \ll \nu(n) n^\alpha. \tag{3}$$

В случае $1 < q \leq p < \infty$ оценка (3) является точной по порядку, т. е. справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $\Gamma \in RA_q$, $1 < q \leq p < \infty$ *и* $\psi \in P_0^{(n)}$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тогда*

$$E_n(L_{\beta,p}^\psi(G))_{\Gamma,q} \asymp \mathcal{E}_n(L_{\beta,p}^\psi(G))_{\Gamma,q} \asymp \nu(n). \tag{4}$$

Далее, обозначим через $P_{0,C}$ множество положительных последовательностей $\{\psi(k), k \in \mathbb{N}\}$ таких, что при $n \in \mathbb{N}$ существует постоянная K, не зависящая от n, для которой

$$\max_{n \leq k \leq 2n} \frac{\nu(n)}{\psi(k)} \leq K$$

и

$$\sup_{r \geq 0} \sum_{k=2^r}^{2^{r+1}} |h(k+1) - h(k)| \leq K,$$

где

$$h(k) = h(k; n) = \begin{cases} 0, & 0 \leq k \leq n-1, \ k > 2n; \\ \dfrac{\nu(n)}{\psi(k)}, & n \leq k \leq 2n. \end{cases}$$

Теорема 3. *Пусть* $\Gamma \in RA_q$, $1 < p < q < \infty$, $\alpha = 1/p - 1/q$ *и* $\psi \in P_\alpha^{(n)} \cap P_{0,C}$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тогда*

$$E_n(L_{\beta,p}^\psi(G))_{\Gamma,q} \asymp \mathcal{E}_n(L_{\beta,p}^\psi(G))_{\Gamma,q} \asymp \nu(n) n^\alpha. \tag{5}$$

Теоремы 1 – 3 являются аналогами соответствующих результатов, установленных А. И. Степанцом (см. [4], гл. V), о наилучших приближениях 2π-периодических функций из классов $L_\beta^\psi L_p$ в пространстве $L_q(0; 2\pi)$ с помощью тригонометрических полиномов и в случае, когда Γ — единичная окружность, существенно дополняют некоторые утверждения из [9, 10].

Колмогоровские поперечники. Пусть X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$, $\mathfrak{A}$ — центрально-симметричное множество в X и L_n — произвольное n-мерное подпространство в X.

Величина

$$d_n(\mathfrak{A}\,;X) = \inf_{L_n \in X} \sup_{x \in \mathfrak{A}} \inf_{y \in L_n} \|x - y\|_X$$

называется n-мерным поперечником по Колмогорову множества $\mathfrak{A}$ в пространстве X.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть* $\Gamma \in RA_q$ *и* ε *— произвольное сколь угодно малое положительное число. Тогда*

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(G); \tilde{A}_q(\overline{G})) \asymp$$

$$\asymp \begin{cases} \psi(n), & \left[\begin{array}{l} 1 < q \le p < \infty, \quad \psi \in I_0 \cap P_{0,C}; \\ 2 \le p \le q < \infty, \quad \psi \in I_{1/2+\varepsilon} \cap P_{0,C}; \end{array}\right. \\ \psi(n)\, n^{1/p-1/2}, & 1 < p \le 2 \le q < \infty, \quad \psi \in I_{1/p+\varepsilon} \cap P_{0,C}; \\ \psi(n)\, n^{1/p-1/q}, & 1 < p \le q \le 2, \quad \psi \in I_{1/p-1/q} \cap P_{0,C}. \end{cases}$$

Это утверждение дополняет и обобщает результат С. Б. Вакарчука [11] об оценке величин $d_n(W^r E_p(\Omega); E_q(\Omega))$, где $E_q(\Omega)$ — пространство Смирнова аналитических в Ω функций, а $W^r E_p(\Omega) = \{ f \in E_p \colon \|f^{(r)}\|_{E_p} \le 1 \}$; Ω — область, ограниченная кривой γ, принадлежащей классу Ляпунова $\Lambda(1)$.

Доказательство теорем 1 – 3. ***1. Вспомогательные факты и утверждения.*** Обозначим через $L_p(\Gamma; \omega)$, $1 \le p < \infty$, банахово пространство, состоящее из всех измеримых по Лебегу на Γ функций таких, что функция $\omega(\zeta)\,|f(\zeta)|^p$ (ω — вес на Γ) суммируема на Γ, и норма в нем определена соотношением

$$\|f\|_{L_p(\Gamma;\omega)} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \left(\int_{\Gamma} |f(\zeta)|^p\, \omega(\zeta)\, |d\zeta| \right)^{1/p}.$$

Далее, для функции $f \in L(\Gamma)$ особый интеграл Коши определим по формуле

$$Sf(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma \setminus \Gamma_{\varepsilon,z}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

где $z \in \Gamma$, а $\Gamma_{\varepsilon,z}$ — часть кривой Γ длины 2ε, которая содержит точку z и делится ею пополам (по длине). Особый интеграл, рассматриваемый в качестве оператора на подмножестве функций из $L(\Gamma)$, будем обозначать через S.

Как было отмечено ранее, $Sf(z)$ существует почти для всех $z \in \Gamma$ для любой функции $f \in L(\Gamma)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема А. *Оператор* S, *действующий из* $L_p(\Gamma)$ *в* $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, *ограничен тогда и только тогда, когда* Γ *— регулярная кривая.*

Этот результат содержится в более общем утверждении, установленном Г. Давидом [12].

Обобщением теоремы А на случай пространства $L_p(\Gamma; \omega)$ является следующее утверждение [13].

Теорема В. *Пусть* Γ *— регулярная кривая,* $1 < p < \infty$ *и* ω *— вес на* Γ. *Оценка*

$$\| Sf \|_{L_p(\Gamma;\,\omega)} \le K_p \| f \|_{L_p(\Gamma;\,\omega)} \tag{6}$$

справедлива тогда и только тогда, когда $\omega \in A_p(\Gamma)$.

Рассматривая в качестве весовой функции $\omega(\cdot)$ функцию $|\Phi'(\cdot)|$ и используя теорему И. И. Привалова о граничных значениях интеграла типа Коши (см., например, [14, с. 190]), убеждаемся, что если $\Gamma \in RA_p$, $1 < p < \infty$, то

$$\| \mathcal{K}^+ f \|_{\Gamma, p} \le K_p^{(1)} \| f \|_{\Gamma, p} \qquad \forall f \in \tilde{L}_p(\Gamma). \tag{7}$$

Далее, заметим, что если Γ — з. с. ж. к., то при условиях теорем 1 и 1$'$ справедливо вложение $L^{\psi}_{\beta} \tilde{L}_p(\Gamma) \subset \tilde{L}_q(\Gamma)$ [4, с. 208]. Это с учетом соотношения (7) позволяет заключить, что рассматриваемые в теоремах 1, 1$'$ и 2 аппроксимационные величины имеют смысл (т. е. конечны).

2. ***Оценки сверху в теоремах* 1 – 3.** Оценки сверху автоматически следуют из оценок сверху соответствующих величин для 2π-периодических функций, принадлежащих множествам $L^{\psi}_{\beta, p}$ (см. [4], гл. V), если учесть следующее.

Воспользовавшись интегральным представлением многочленов Фабера:

$$F_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Phi^k(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \qquad z \in G, \quad k = 0, 1, \ldots$$

(см., например, [8, с. 358]), с последующим применением соотношения (7) и теоремы об ограниченности оператора Фурье, действующего в $L_p(0; 2\pi)$, можно показать, что при условии $\Gamma \in RA_p$, $1 < p < \infty$, для любой функции $f \in \tilde{L}_p(\Gamma)$ и $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполняется неравенство

$$\| S_n^F(\mathcal{K}^+ f; \cdot) \|_{\Gamma, p} \le K_p^{(2)} \| f \|_{\Gamma, p}. \tag{8}$$

Аналогичные рассуждения позволяют установить, что, с одной стороны, для $f \in \tilde{L}_p(\Gamma)$ и $n \in \mathbb{N}$

$$\| \rho_n(\mathcal{K} f; \cdot) \|_{\Gamma, p} \le K_p^{(3)} \| \rho_n(F; \cdot) \|_p, \tag{9}$$

где $\rho_n(F; t) \overset{\mathrm{df}}{=} F(t) - S_{n-1}(F; t)$, $t \in \mathbb{R}$, а $S_n(F; t) = \sum_{k=0}^{n} a_k(F)\, e^{ikt}$, $a_k(F)$ — коэффициенты Фурье функции $F(t) = f(\Psi(e^{it}))$.

С другой стороны, если $\Gamma \in RA_p$, $1 < p < \infty$, то для $f \in L_p(\Gamma)$ и $n \in \mathbb{N}$

$$E_n(\mathcal{K} f)_{\Gamma, q} \asymp \| \rho_n(\mathcal{K} f; \cdot) \|_{\Gamma, p}.$$

В самом деле, неравенство $E_n(\mathcal{K} f)_{\Gamma, p} \ll \| \rho_n(\mathcal{K} f; \cdot) \|_{\Gamma, p}$ очевидно. А так как для любого полинома p_{n-1} степени $n - 1$ справедливо соотношение $S_{n-1}^F(p_{n-1}; \cdot) = p_{n-1}(\cdot)$, которое является следствием леммы 3 [15, с. 54], то, если p_{n-1}^* — полином наилучшего приближения степени $n - 1$ функции $\mathcal{K} f(\cdot)$ в пространстве $\tilde{A}_p(\overline{G})$, получаем

$$\| \rho_n(\mathcal{K} f; \cdot) \|_{\Gamma, p} = \| \mathcal{K} f(\cdot) - p_{n-1}^*(\cdot) - S_{n-1}^F(\mathcal{K} f - p_{n-1}^*; \cdot) \|_{\Gamma, p} \le$$

$$\leq \|\mathcal{K} f(\cdot) - p_{n-1}^*(\cdot)\|_{\Gamma,p} + \|S_{n-1}^F(\mathcal{K} f - p_{n-1}^*;\cdot)\|_{\Gamma,p} << E_n(\mathcal{K}f)_{\Gamma,p}.$$

3. ***Оценки снизу в теореме* 2.** Пусть для последовательности $\{\psi(k),\ k \in \mathbb{N}\}$ и $n \in \mathbb{N}$ найдется число $k_n \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\nu(n) = \sup_{k \geq n} |\psi(k)| = |\psi(k_n)|. \tag{10}$$

Рассмотрим функцию

$$f_n(\zeta) = a_{k_n}^{-1}\psi(k_n)\Phi^{k_n}(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma; \quad a_{k_n} = (2\pi)^{(q-p)/pq}\|\Phi^{k_n}\|_{\Gamma,q}. \tag{11}$$

Поскольку $[f_n]_\beta^\psi(\zeta) = e^{i\beta\pi/2}a_{k_n}^{-1}\Phi^{k_n}(\zeta)$, то $\|[f_n]_\beta^\psi\|_{\Gamma,p} = a_{k_n}^{-1}\|\Phi^{k_n}(\zeta)\|_{\Gamma,p} \leq 1$, а значит, $f_n \in L_{\beta,p}^\psi(\Gamma) \subset \tilde{L}_q(\Gamma)$.

Далее, учитывая, что $\mathcal{K} f_n(z) = a_{k_n}^{-1}\psi(k_n)F_{k_n}(z)$, $z \in G$, и $\|F_{k_n}\|_{\Gamma,q} \geq C$ (см. (18)), в силу соотношения (10) имеем

$$\|\rho_n(\mathcal{K}f_n; z)\|_{\Gamma,q} = \|f_n^*(\zeta)\|_{\Gamma,q} =$$
$$= a_{k_n}^{-1}|\psi(k_n)|\|F_{k_n}(\zeta)\|_{\Gamma,q} >> \nu(n).$$

Отсюда получаем оценку снизу в (4).

Если же для последовательности $\{\psi(k),\ k \in \mathbb{N}\}$ и $n \in \mathbb{N}$ нет такого $k_n \in \mathbb{N}$, при котором выполняется (10), то вследствие ограниченности множества $\{|\psi(k)|\}$ будем иметь

$$\nu(n) = \sup_{k \geq n} |\psi(k)| = \sup_{k \geq n}\{\psi(k)\} \overset{\text{df}}{=} g_n.$$

В этом случае существует последовательность k_{n_j}, $j \in \mathbb{N}$, такая, что $k_{n_j} \geq n$ и числа $|\psi(k_{n_j})|$, не убывая, стремятся к g_n при $j \to \infty$.

Положим

$$f_{n_j}(\zeta) = a_{k_{n_j}}^{-1}\psi(k_{n_j})\Phi_{k_{n_j}}(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma; \quad a_{k_{n_j}} = (2\pi)^{(q-p)/pq}\|\Phi_{k_{n_j}}\|_{\Gamma,q}$$

и рассмотрим множество $\Phi_n = \bigcup_j f_{n_j}(\cdot)$. Как и для функции $f(\cdot)$, легко проверить, что для $j \in \mathbb{N}$ $f_{n_j} \in L_{\beta,p}^\psi(\Gamma)$. Следовательно, $\Phi_n \subset L_{\beta,p}^\psi(\Gamma)$, и так как $\|\rho_n(\mathcal{K}f_{n_j}; z)\|_{\Gamma,p} >> |\psi(k_{n_j})|$, то

$$E_n(L_{\beta,p}^\psi(G))_{\Gamma,q} \geq \sup_{f\in\Phi_n}\|\rho_n(\mathcal{K} f; z)\|_{\Gamma,q} >> \sup_{j\in\mathbb{N}}|\psi(k_{n_j})| >> \nu(n),$$

т. е. и в этом случае оценка снизу в (4) верна.

4. ***Оценка снизу в теореме* 3.** Достаточно для каждого $n \in \mathbb{N}$ построить функцию $f_n^* \in L_{\beta,p}^\psi(\Gamma)$, для которой

$$E_n(\mathcal{K} f_n^*)_{\Gamma,q} >> \nu(n)n^\alpha, \quad \alpha = 1/p - 1/q. \tag{12}$$

С этой целью положим

$$g_n(\zeta) = \nu(n)t_{2n}(\zeta), \quad t_{2n}(\zeta) = \frac{1}{2}\sum_{n\leq|k|\leq 2n}\Phi^k(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma.$$

Тогда, очевидно,

$$[g]_\beta^\psi(\zeta) = \nu(n) \sum_{n \le |k| \le 2n} e^{i\beta\pi \operatorname{sgn} k/2} \frac{1}{\psi(|k|)} \Phi^k(\zeta). \tag{13}$$

Полагая $\zeta = \Psi(e^{it})$, имеем

$$T_{2n}(t) \overset{\text{df}}{=} t_{2n}(\Psi(e^{it})) = \sum_{k=n}^{2n} \cos kt,$$

и если $G_n(t) \overset{\text{df}}{=} g_n(\Psi(e^{it}))$, то в силу определения (ψ, β)-производной функции $g_n(\cdot)$ (см. [1]) $[g_n]_\beta^\psi(\Psi(e^{it})) = [G_n]_\beta^\psi(t)$. Далее заметим, что функции $G_n(t)$, $T_{2n}(t)$ и $[G_n]_\beta^\psi(t)$ совпадают соответственно с функциями $f_n(t)$, $d_{2n}(t)$ и $[f_n]_\beta^\psi(t)$, определенными в [5] соотношениями (42) и (43). Поэтому на основании неравенств (45) из [5] имеем

$$\|[g_n]_\beta^\psi\|_{\Gamma,p} = \|[G_n]_\beta^\psi\|_p \le C_p \|T_{2n}\|_p = \|d_{2n}\|_p. \tag{14}$$

Но, согласно лемме 3 из [5], для каждого s, $1 < s < \infty$, выполняется неравенство

$$\|d_{2n}\|_s \asymp n^{(s-1)/s}. \tag{15}$$

Значит, из (14) и (15) получаем

$$\|[g_n]_\beta^\psi\|_{\Gamma,p} \le C_p n^{(p-1)/p}$$

и, следовательно, функция $f_n^*(\zeta) = C_p^{-1} n^{(1-p)/p} g_n(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$, принадлежит классу $L_{\beta,p}^\psi(\Gamma) \subset \tilde{L}_q(\Gamma)$. Поэтому

$$E_n(\mathcal{K} f_n^*)_{\Gamma,q} \ge C_q \|\rho_n(\mathcal{K} f^*; z)\|_{\Gamma,q} = C_q \|Q_{2n}\|_{\Gamma,q}, \tag{16}$$

где

$$Q_{2n}(z) = \frac{1}{2} C_p^{-1} \nu(n) n^{(1-p)/p} \sum_{k=n}^{2n} F_k(\zeta). \tag{17}$$

Положим, далее,

$$q_n(w) \overset{\text{df}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{\sum_{k=n}^{2n} F_k(\Psi(\tau))}{\tau - w} d\tau, \qquad w \in D.$$

Тогда $q_n(w) = \sum_{k=n}^{2n} w^k$, $w \in D$, (см., например, [15, с. 59]) и поэтому в силу неравенства (7)

$$\|q_n(w)\|_{T,q} \le C_q^{(1)} \left\| \sum_{k=n}^{2n} F_k(\Psi(\tau)) \right\|_{T,q} = C_q^{(1)} \left\| \sum_{k=n}^{2n} F_k(\zeta) \right\|_{\Gamma,q} \tag{18}$$

($T = \{z : |z| = 1\}$). С другой стороны, если обозначить через $\tilde{d}_{2n}(\cdot)$ функцию, тригонометрически сопряженную к $d_{2n}(\cdot)$, то

$$\| q_n(e^{i\theta}) \|_q = \left\| \sum_{k=n}^{2n} e^{ik\theta} \right\|_q = \|d_{2n}(\theta) + i\tilde{d}_{2n}(\theta)\|_q =$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} |d_{2n}(\theta) + i\tilde{d}_{2n}(\theta)|^q \, d\theta \right)^{1/q} \geq \left(\int_0^{2\pi} |d_{2n}(\theta)|^q \, d\theta \right)^{1/q} =$$

$$= \| d_{2n} \|_q \geq C_q^{(2)} n^{(q-1)/q} \tag{19}$$

(мы воспользовались соотношением $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq \max\{|a|, |b|\}$, $a, b \in \mathbb{R}$).

Сопоставив соотношения (18) и (19), получаем

$$\left\| \sum_{k=n}^{2n} F_k(\zeta) \right\|_{\Gamma, q} \geq C_q^{(2)} n^{(q-1)/q},$$

откуда с учетом (16) и (17) следует

$$E_n(\mathcal{K} f_n^*)_{\Gamma, q} \geq \frac{1}{2} C_q C_p^{-1} C_q^{(2)} \nu(n) n^{1/p - 1/q} = C_{p,q} \nu(n) n^{\alpha},$$

т. е. имеем требуемую оценку.

Доказательство теоремы 4.

1. ***Вспомогательные утверждения.*** Обозначим через $\tilde{P}$ множество последовательностей $\{\psi(k),\ k \in \mathbb{N}\}$, для которых при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняются условия

$$\sup_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\tilde{\psi}_n^{-1}(k+1) - \tilde{\psi}_n^{-1}(k)| \leq \mathcal{K} \lambda^{-1}(n),$$

где

$$\tilde{\psi}_n(k) = \begin{cases} \psi(k), & 1 \leq k \leq n; \\ \psi(n), & k > n, \end{cases}$$

$$\lambda(n) = \lambda(\psi; n) = \inf_{k \leq n} |\psi(k)|.$$

Отметим, что $\tilde{P} \supset I_0$. В самом деле, если $\psi \in I_0$, то $\lambda(n) = \inf\limits_{k \leq n} |\psi(k)| = \psi(n)$ и

$$\sup_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\tilde{\psi}_n^{-1}(k+1) - \tilde{\psi}_n^{-1}(k)| =$$

$$= \sup_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}:\, 2^m \leq n} \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\psi^{-1}(k+1) - \psi^{-1}(k)| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n-1} [\psi^{-1}(k+1) - \psi^{-1}(k)] = \psi^{-1}(n) - \psi^{-1}(1) <$$

$$< \psi^{-1}(n) = \lambda^{-1}(n).$$

Пусть, далее, $\mathcal{P}_m = \left\{ P_m : P_m(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k \right\}$ — пространство алгебраических полиномов степени не выше m.

Лемма 1. *Пусть* $\Gamma \in RA_p$, $1 < p < \infty$ *и* $\psi \in \tilde{P}$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тогда для* $P_n \in \mathcal{P}_n$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$\| [P_n]_\beta^\psi \|_{\Gamma, p} \leq C_p \lambda^{-1}(n) \| P_n \|_{\Gamma, p}. \tag{20}$$

Доказательство. Пусть $T_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ik\theta}$ — произвольный тригонометрический полином порядка n. В [16, c. 21] показано, что при условии $\psi \in \tilde{P}$ выполняется неравенство

$$\| [T_n]_\beta^\psi \|_p \leq C_p \lambda^{-1}(n) \| T_n \|_p. \tag{21}$$

Поэтому в случае, когда Γ — единичная окружность $|z| = 1$, неравенство (20) очевидным образом вытекает из (21).

Если Γ — произвольная з. с. ж. к., принадлежащая множеству RA_p, то поступаем следующим образом. Разложим $P_n(z)$ по многочленам Фабера, определяемым областью G:

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} d_k F_k(z), \tag{22}$$

где d_k — коэффициенты Фабера функции $P_n(z)$, $z \in \overline{G}$. Тогда для $w \in D$

$$\varphi(w) \overset{\text{df}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{P_n(\Psi(\tau))}{\tau - w} d\tau = \sum_{k=0}^{n} d_k w^k. \tag{23}$$

Положим $\| P_n(z) \|_{\Gamma, p} = V$. Это равносильно тому, что

$$\| P_n(\Psi(\tau)) \|_{T, p} = \| P_n(\Psi(e^{i\theta})) \|_p = V. \tag{24}$$

Из соотношений (23) и (24) в силу неравенства (7) получаем $\| \varphi \|_{T, p} \leq C_1 V$, и поскольку для окружности лемма верна, то

$$\| \varphi_\beta^\psi \|_{T, p} \leq C_2 \lambda^{-1}(n) V = C_2 \lambda^{-1}(n) \| P_n \|_{\Gamma, p}. \tag{25}$$

С другой стороны,

$$[P_n]_\beta^\psi(z) = \sum_{k=1}^{n} e^{i\beta\pi/2} \psi(k) d_k F_k(z)$$

и так как $F_k(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\Gamma \frac{\Phi^k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, $z \in G$, то

$$[P_n]_\beta^\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi_\beta^\psi(\Phi(\zeta))}{\zeta - z}\,d\zeta .$$

Далее согласно неравенству (7)

$$\|[P_n]_\beta^\psi\|_{\Gamma,p} \le C_3\,\|\varphi_\beta^\psi(\Phi(\zeta))\|_{\Gamma,p} = C_3\,\|\varphi_\beta^\psi\|_{T,p}. \tag{26}$$

Из соотношений (25) и (26) получаем требуемое неравенство (20).

В дальнейшем нам понадобятся также следующие важные утверждения.

Теорема о проекторе [17, с. 207]. *Пусть X — нормированное пространство, L — подпространство, $W \subset L$ и $P: X \to L$ — непрерывный линейный проектор. Тогда*

$$d_n(W;X) \le d_n(W;L) \le \|P\|\,d_n(W;X),$$

где $\|P\|$ — норма оператора P.

Теорема М [18, с. 49]. *Пусть $p_m \in \mathcal{P}_m$ и $1 < s < \infty$. Тогда*

$$\|p_m\|_{H_s} \asymp \left\{\frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}\left|p_m\left[\exp\left(i\,\frac{2\pi j}{m+1}\right)\right]\right|^s\right\}^{1/s}. \tag{27}$$

Здесь H_s, $1 < s < \infty$, — пространство Харди [19, с. 431].

2. *Оценки снизу в теореме* 4. Пусть $\psi \in I_{(1/p-1/q)_+} \cap P_{0,C}$. Очевидно, что при $m \ge n$

$$d_n(L_{\beta,p}^\psi(G); \tilde{A}_q(\overline{G})) \ge d_n(L_{\beta,p}^\psi(G)\cap\mathcal{P}_m; \tilde{A}_q(\overline{G})). \tag{28}$$

Возьмем в качестве подпространства L в теореме о проекторе пространство $\mathcal{P}_m$, а в качестве P оператор S_m^F. В силу неравенства (8) и леммы 3 [15, с. 54], оператор S_m^F является линейным непрерывным проектором из $\tilde{A}_q(\overline{G})$ в $\mathcal{P}_m$. Поэтому

$$d_n(L_{\beta,p}^\psi(G)\cap\mathcal{P}_m; \tilde{A}_q(\overline{G})) \ge \|S_m^F\|^{-1} d_n(L_{\beta,p}^\psi(G)\cap\mathcal{P}_m; \tilde{A}_q(\overline{G})\cap\mathcal{P}_m). \tag{29}$$

Сопоставив (28) и (29), получим

$$d_n(L_{\beta,p}^\psi(G); \tilde{A}_q(\overline{G})) >> d_n(L_{\beta,p}^\psi(G)\cap\mathcal{P}_m; \tilde{A}_q(\overline{G})\cap\mathcal{P}_m). \tag{30}$$

Положим теперь

$$(\mathcal{P}_m)_{\beta,p}^\psi = \{p_m \in \mathcal{P}_m : \|[p_m]_\beta^\psi\|_{\Gamma,p} \le 1\}.$$

Тогда согласно неравенству (7)

$$L_{\beta,p}^\psi(G)\cap\mathcal{P}_m \supset K_q(\mathcal{P}_m)_{\beta,p}^\psi,$$

где K_q — положительная постоянная, зависящая от q, $1 < q < \infty$ (вложение понимается в смысле соответствующего соотношения между нормами элементов обоих множеств в пространстве $\tilde{A}_q(\overline{G})$).

В свою очередь, вследствие леммы 1 справедливо вложение

$$(\mathcal{P}_m)_{\beta,p}^\psi \supset C_p^{-1}\psi(m)\,\tilde{B}_p^m(\Gamma),$$

где $\tilde{B}_p^m(\Gamma) = \{p_m \in \mathcal{P}_m\colon \|p_m\|_{\Gamma,p} \le 1\}$ — единичный шар в пространстве $\tilde{A}_p(\overline{G}) \cap \mathcal{P}_m$.

Таким образом,

$$L^{\psi}_{\beta,p}(G) \cap \mathcal{P}_m \supset C_{p,q}\,\psi(m)\,\tilde{B}_p^m(\Gamma),$$

а значит, с учетом соотношения (30) имеем

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(G); \tilde{A}_q(\overline{G})) \gg \psi(m)\, d_n(\tilde{B}_p^m(\Gamma); \tilde{A}_q(\overline{G}) \cap \mathcal{P}_m). \qquad (31)$$

Теперь рассмотрим операторы $\mathcal{F}_G$ и $\mathcal{F}^G$, действующие посредством равенств

$$\mathcal{F}_G[f](z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\Phi(\zeta))}{\zeta - z}\, d\zeta, \qquad z \in G,$$

и

$$\mathcal{F}^G[g](w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1} \frac{g(\Psi(\tau))}{\tau - w}\, d\tau, \qquad w \in D,$$

определенных соответственно на множествах (линейных пространствах) $\tilde{A}_q(\overline{D}) \cap \mathcal{P}_m$ и $\tilde{A}_q(\overline{G}) \cap \mathcal{P}_m$.

При исходных условиях на Γ операторы $\mathcal{F}_G$ и $\mathcal{F}^G$ являются взаимно обратными и непрерывными (см. неравенство (7)), причем если

$$f(w) = \sum_{k=0}^{m} a_k w^k,$$

то

$$\mathcal{F}_G[f](z) = \sum_{k=0}^{m} a_k F_k(z).$$

Поэтому, согласно свойствам поперечника, получаем

$$d_n(\tilde{B}_p^m(\Gamma); \tilde{A}_q(\overline{G}) \cap \mathcal{P}_m) \ge \|\mathcal{F}_G\|^{-1} d_n(\tilde{B}_p^m(T); \tilde{A}_q(\overline{D}) \cap \mathcal{P}_m). \qquad (32)$$

Но, очевидно, пространство $\tilde{A}_q(\overline{D})$ совпадает с пространством Харди H_q, а поэтому соотношение (32) с учетом (31) примет вид

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(G); \tilde{A}_q(\overline{G})) \gg \psi(m)\, d_n(BH_p \cap \mathcal{P}_m; H_q \cap \mathcal{P}_m), \qquad (33)$$

где $BH_p = \{f \in H_p\colon \|f\|_{H_p} \le 1\}$.

Рассмотрим теперь оператор

$$A\colon \mathcal{P}_m \ni p_m(\cdot) \to Ap_m = \overline{p}_m = (p_m(\tau_1) \ldots p_m(\tau_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1}),$$

где $\tau_j = i\dfrac{2\pi j}{m+1}$, $j = 1, 2, \ldots, m+1$, и введем обозначение l_q^s для банахова пространства векторов $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_s) \in \mathbb{R}^s$ с нормой

$$\|\xi\|_{l_q^s} = \left(\sum_{r=1}^{s} |\xi_r|^q \right)^{1/q}.$$

Понятно, что оператор A осуществляет взаимно однозначное соответствие между линейными пространствами $\mathcal{P}_m$ и $\mathbb{R}^{m+1}$ и, согласно теореме M, является гомеоморфизмом между банаховыми пространствами $H_q \cap \mathcal{P}_m$ и l_q^{m+1}. При отображении A компакту $BH_p \cap \mathcal{P}_m$ соответствует компакт

$$K_p^m = \{\sigma \in l_p^{m+1} \colon \|\sigma\|_{l_p^{m+1}} \asymp (m+1)^{1/p}\}.$$

Поэтому, учитывая, что при $p_m \in \mathcal{P}_m$

$$\|p_m\|_{H_q} \asymp (m+1)^{-1/q} \|\bar{p}_m\|_{l_q^{m+1}}, \tag{34}$$

неравенство (33) приводим к виду

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(G); \tilde{A}_q(\overline{G})) >> \psi(m)(m+1)^{1/p-1/q} d_n(B_p^{m+1}; l_q^{m+1}),$$

где $B_p^s = \{\sigma \in l_p^s \colon \|\sigma\|_{l_p^s} \le 1\}$.

Отсюда на основании результатов об оценке поперечников $d_n(B_p^s; l_q^s)$, $n < s$, $1 < p, q < \infty$, (см., например, [17, с. 210] и ссылки в ней на оригинальные работы), полагая $m = 2n - 1$ и учитывая, что $\psi \in P_{0,C}$, получаем требуемые оценки снизу.

3. ***Оценки сверху в теореме* 4.** В случаях $1 < p \le q \le 2$ и $1 < q \le p < \infty$ оценки поперечников $d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(G); \tilde{A}_q(\overline{G}))$ вытекают из теорем 2 и 3 соответственно.

Пусть теперь $1 < p \le 2 \le q < \infty$ и $\psi \in I_{1/p+\varepsilon}$, где ε — сколь угодно малое положительное число. Для любой функции $f \in L^{\psi}_{\beta,p}(\Gamma)$ и $z \in G$ положим

$$\varphi_0(z) = S_0^F(\mathcal{K} f; z),$$

$$\varphi_k(z) = S^F_{2^k-1}(\mathcal{K} f; z) - S^F_{2^{k-1}-1}(\mathcal{K} f; z), \quad k \in \mathbb{N},$$

где, напомним, $S_n^F(\mathcal{K} f; z) = \sum_{k=0}^{n} a_k(\mathcal{K} f) F_k(z)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, — частная сумма порядка n ряда Фабера функции $\mathcal{K} f(\cdot)$. Тогда для каждого $k \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение

$$\|\varphi_k\|_{\Gamma,p} << \psi(2^k). \tag{35}$$

В самом деле, учитывая, что $I_{1/p+\varepsilon} \subset P_{\alpha}^{(n)}$ при любом $\varepsilon > 0$, согласно теореме 3, имеем

$$\|\varphi_k\|_{\Gamma,p} \le \|S^F_{2^k-1}(\mathcal{K} f; \cdot) - \mathcal{K} f(\cdot)\|_{\Gamma,p} +$$

$$+ \|S^F_{2^{k-1}-1}(\mathcal{K} f; \cdot) - \mathcal{K} f(\cdot)\|_{\Gamma,p} << \psi(2^k) + \psi(2^{k-1}) << \psi(2^k).$$

Последнее неравенство следует из условия принадлежности последовательности $\{\psi(k),\ k\in\mathbb{N}\}$ множеству $P_{0,C}$, элементы которого удовлетворяют соотношению $\psi(n) \ll \psi(2n)$, $n\in\mathbb{N}$.

Далее, так как согласно теореме 3

$$\lim_{l\to\infty}\left\|\mathcal{K} f(z)-\sum_{k=0}^{l}\varphi_k(z)\right\|_{\Gamma,p} = \lim_{l\to\infty}\|\mathcal{K} f(z)-S^F_{2^l-1}(\mathcal{K} f;z)\|_{\Gamma,p} = 0,$$

то

$$\mathcal{K} f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(z), \qquad z\in G \tag{36}$$

(сходимость понимается в смысле нормы в пространстве $\tilde{A}_p(\overline{G})$).

Таким образом, исходя из (35) и (36) заключаем, что справедливо вложение

$$L^{\psi}_{\beta,p}(G)\subset\left(C\bigcup_{k=0}^{\infty}Q^p_k\right)\cup\{\text{const}\}, \tag{37}$$

где $Q^p_k = \{f\in\mathcal{P}_{2^k-1}\colon \|f\|_{\Gamma,p}\le\psi(2^k)\}$, а C — постоянная, возможно зависящая от p и Γ.

Пусть, далее, $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательность целых неотрицательных чисел такая, что $\sum_{k=1}^{\infty} m_k\le m-1$, $m\in\mathbb{N}$, — фиксировано. Тогда на основании одной леммы В. Е. Майорова [20] и вложения (37) имеем

$$d_m(L^{\psi}_{\beta,p}(G);\tilde{A}_q(\overline{G})) \ll \sum_{j=0}^{\infty} d_{m_j}(Q^p_j;\tilde{A}_q(\overline{G}))\le$$

$$\le\sum_{j=0}^{\infty}\psi(2^j)\,d_{m_j}(\tilde{B}^{2^j-1}_p(\Gamma);\tilde{A}_q(\overline{G})). \tag{38}$$

Как и в случае оценок снизу, пользуясь взаимной обратимостью и непрерывностью операторов $\mathcal{F}^G$ и $\mathcal{F}_G$, определенных соответственно на банаховых пространствах $\tilde{A}_q(\overline{G})\cap\mathcal{P}_s$ и $\tilde{A}_q(\overline{D})\cap\mathcal{P}_s$, с учетом изометричности пространств $\tilde{A}_q(\overline{D})$ и H_q можем записать

$$d_{m_j}(\tilde{B}^{2^j-1}_p(\Gamma);\tilde{A}_q(\overline{G}))\le d_{m_j}(\tilde{B}^{2^j-1}_p(\Gamma);\tilde{A}_q(\overline{G})\cap\mathcal{P}_{2^j-1})\le$$
$$\le\|\mathcal{F}^G\|^{-1}d_{m_j}(BH_p\cap\mathcal{P}_{2^j-1};H_q\cap\mathcal{P}_{2^j-1}) =$$
$$=\|\mathcal{F}^G\|^{-1}d_{m_j}(\tilde{B}^{2^j-1}_p(T);H_q\cap\mathcal{P}_{2^j-1}).$$

Теперь, воспользовавшись „неравенством разных метрик" С. М. Никольского [21, с. 169]

$$\|t_s\|_{H_r}\ll s^{1/p-1/r}\|t_s\|_{H_p}, \qquad 1\le p\le r\le\infty, \quad t_s\in\mathcal{P}_s,$$

согласно которому

$$\tilde{B}^{2^j-1}_p(T)\subset C\,2^{j(1/p-1/2)}\,\tilde{B}^{2^j-1}_p(T),$$

получим

$$d_{m_j}(\tilde{B}_p^{2^j-1}(\Gamma); \tilde{A}_q(\overline{G})) \le 2^{j(1/p-1/2)} d_{m_j}(\tilde{B}_2^{2^j-1}(T); H_q \cap \mathcal{P}_{2^j-1}). \qquad (39)$$

Сопоставляя соотношения (38) и (39), будем иметь

$$d_m(L^{\psi}_{\beta,p}(G); \tilde{A}_q(\overline{G})) << \sum_{j=0}^{\infty} \psi(2^j) 2^{j(1/p-1/2)} d_{m_j}(\tilde{B}_2^{2^j-1}(T); H_q \cap \mathcal{P}_{2^j-1}),$$

откуда, принимая во внимание (34), получаем неравенство

$$d_m(L^{\psi}_{\beta,p}(G); \tilde{A}_q(\overline{G})) << \sum_{j=0}^{\infty} \psi(2^j) 2^{j(1/p-1/q)} d_{m_j}(B_2^{2^j}; l_q^{2^j}). \qquad (40)$$

Положим теперь для любого $n \ge 2$

$$m_j = \begin{cases} 2^j, & 0 \le j < [\log_2 n]; \\ [2^{-j\delta} n^{1+\delta}], & [\log_2 n] \le j \le [(1+\delta^{-1}) \log_2 n]; \\ 0, & j > [(1+\delta^{-1}) \log_2 n]. \end{cases}$$

Здесь $[x]$ — целая часть числа $x \in \mathbb{R}$, а δ — некоторое положительное число (выбор которого будет уточнен позже), зависящее от p, q и ε.

Покажем, что $\sum_{j=0}^{\infty} m_j \le C_\delta n$. Итак,

$$\sum_{j=0}^{\infty} m_j = \sum_{j=0}^{[\log_2 n]-1} 2^j + \sum_{j=[\log_2 n]}^{[(1+\delta^{-1})\log_2 n]} [2^{-j\delta} n^{1+\delta}] \le$$

$$\le (2^{\log_2 n} - 1) + n^{1+\delta} \sum_{j=[\log_2 n]}^{\infty} 2^{-j\delta} = (n-1) + n^{1+\delta} \frac{2^{-(\log_2 n - 1)\delta}}{1-2^{-\delta}} <$$

$$< n + n^{1+\delta} n^{-\delta} \frac{2^{\delta}}{1-2^{-\delta}} = C_\delta n.$$

Полагая теперь $m = [C_\delta + 1] n$, $n \ge 2$, получаем $\sum_{j=0}^{\infty} m_j \le m$.

Далее, известно (см., например, [17, с. 210]), что если $2 \le p \le q < \infty$, $n < m$ и $\alpha = (1/p - 1/q)/(1 - 2/q)$, то

$$d_n(B_p^m; l_q^m) \asymp \min\{1; m^{2\alpha/q} n^{-\alpha}\},$$

а значит,

$$d_n(B_2^m; l_q^m) \asymp m^{1/q} n^{-1/2}.$$

Это позволяет записать

$$d_{m_j}(B_2^{2^j}; l_q^{2^j}) = 0, \quad 0 \le j < [\log_2 n],$$

и

$$d_{m_j}(B_2^{2^j}; l_q^{2^j}) \asymp \begin{cases} (m_j)^{-1/2} 2^{j/q}, & [\log_2 n] \le j \le [(1+\delta^{-1}) \log_2 n]; \\ 1, & j > [(1+\delta^{-1}) \log_2 n]. \end{cases}$$

В результате, возвращаясь к неравенству (40), будем иметь

$$d_m(L^{\psi}_{\beta,p}(G);\tilde{A}_q(\overline{G})) \ll$$

$$\ll \sum_{j=[\log_2 n]}^{[(1+\delta^{-1})\log_2 n]} \psi(2^j)\, 2^{j/p}(m_j)^{-1/2} +$$

$$+ \sum_{j=[(1+\delta^{-1})\log_2 n]+1}^{\infty} \psi(2^j) 2^{j(1/p-1/q)} \le$$

$$\le \sum_{j=[\log_2 n]}^{[(1+\delta^{-1})\log_2 n]} \psi(2^j)\, 2^{j(1/p+\delta/2)}\, n^{-(1+\delta)/2} +$$

$$+ \sum_{j=[(1+\delta^{-1})\log_2 n]+1}^{\infty} \psi(2^j) 2^{j(1/p-1/q)} = S_1 + S_2. \qquad (41)$$

Проведем оценку каждого слагаемого в (41). Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку, согласно условию, последовательность $\{\psi(n)n^{1/p+\varepsilon},\ n \in \mathbb{N}\}$ не возрастает, то для $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $k \in \mathbb{N}$ выполняется соотношение $\psi(2^{j+k})2^{(j+k)(1/p+\varepsilon)}/\psi(2^j)2^{j(1/p+\varepsilon)} \le 1$, из которого следует $\psi(2^{j+k}) \le \le \psi(2^j)2^{-k(1/p+\varepsilon)}$, а значит, $\psi(2^{j+k})2^{(j+k)(1/p+\delta/2)} \le \psi(2^j)2^{j(1/p+\delta/2)} \times \times 2^{k(1/p+\delta/2)}2^{-k(1/p+\varepsilon)} = \psi(2^j)2^{j(1/p+\delta/2)}2^{-k(-\delta/2+\varepsilon)}$.

Поэтому если $\delta < 2\varepsilon$, то

$$S_1 = \sum_{j=[\log_2 n]}^{[(1+\delta^{-1})\log_2 n]} \psi(2^j) 2^{j(1/p+\delta/2)}\, n^{-(1+\delta)/2} \ll$$

$$\ll n^{-(1+\delta)/2}\psi(n/2)\, n^{1/p+\delta/2} \sum_{m=0}^{[\delta^{-1}\log_2 n]+1} 2^{-m(-\delta/2+\varepsilon)} \ll$$

$$\ll \psi(n)\, n^{1/p-1/2} \qquad (42)$$

(в последнем неравенстве учтено, что для $\psi \in P_{0,C}$: $\psi(n) \le C\psi(2n)$, $n \in \mathbb{N}$).

Оценим слагаемое S_2. Аналогично предыдущему, вначале устанавливаем, что

$$\psi(2^{j+k})2^{(j+k)(1/p-1/q)} \le \psi(2^j)2^{j(1/p-1/q)}\, 2^{-k(1/q+\varepsilon)}.$$

Следовательно,

$$S_2 = \sum_{j=[(1+\delta^{-1})\log_2 n]+1}^{\infty} \psi(2^j) 2^{j(1/p-1/q)} \ll$$

$$\ll \psi(2^{[(1+\delta^{-1})\log_2 n]+1})\, 2^{([(1+\delta^{-1})\log_2 n]+1)(1/p-1/q)} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(1/q+\varepsilon)} \ll$$

$$\ll \psi(n^{1+\delta^{-1}})\, n^{(1+\delta^{-1})(1/p-1/q)} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(1/q+\varepsilon)} \ll$$

$$<< \psi(n^{1+\delta^{-1}})\, n^{(1+\delta^{-1})(1/p+\varepsilon)}\, n^{-(1+\delta^{-1})(1/q+\varepsilon)} \le$$

$$\le \psi(n)\, n^{1/p+\varepsilon}\, n^{-(1+\delta^{-1})(1/q+\varepsilon)} = \psi(n)\, n^{1/p-1/2}\, n^{-(1+\delta^{-1})(1/q+\varepsilon)}\, n^{1/2+\varepsilon}$$

(оценивая S_2, предполагаем, что последовательность $\{\psi(k),\ k\in\mathbb{N}\}$ продолжена непрерывным образом на $\mathbb{R}$ до функции $\psi(v)$, $v \ge 1$, например, путем последовательного соединения точек $(k, \psi(k))$ отрезками прямой).

Теперь, выбирая $\delta > 0$ так, чтобы $(1+\delta^{-1})(1/q+\varepsilon) > 1/2+\varepsilon$, т. е. $\delta < (1/q+\varepsilon)/(1/2-1/q)$, окончательно получаем

$$S_2 << \psi(n)\, n^{1/p-1/2}. \tag{43}$$

Таким образом, при заданных ε, p и q и $0 < \delta < \min\{2\varepsilon;\, (1/q+\varepsilon)/(1/2 - 1/q)\}$ выполняются оба соотношения (42) и (43), из которых с учетом (41) следует

$$d_m(L^{\psi}_{\beta,p}(G); \tilde{A}_q(\overline{G})) << \psi(n)\, n^{1/p-1/2}.$$

Учитывая, что $m = [C^*_\delta]\, n$, где $C^*_\delta > 1$, и $\psi \in P_{0,C}$, имеем

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(G); \tilde{A}_q(\overline{G})) << \psi([C^*_\delta]^{-1} n)\, n^{1/p-1/2} <<$$

$$<< \psi(n)\, n^{1/p-1/2}.$$

Оценки сверху в теореме 4 в случае $1 < p \le 2 \le q < \infty$ установлены.

Оценка сверху величин $d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(G); \tilde{A}_q(\overline{G}))$ в случае $2 \le p \le q < \infty$ следует из таковой для случая $1 < p \le 2 \le q < \infty$. В самом деле, при $2 \le p \le q < \infty$

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(G); \tilde{A}_q(\overline{G})) \le d_n(L^{\psi}_{\beta,2}(G); \tilde{A}_q(\overline{G})) << \psi(n)$$

(достаточно заметить, что $L^{\psi}_{\beta,p}(G) \subset L^{\psi}_{\beta,2}(G)$).

Теорема доказана.

Замечания. **1.** В случае $1 < p = q < \infty$ точные по порядку оценки поперечников $d_m(L^{\psi}_{\beta,p}(G); \tilde{A}_q(\overline{G}))$ можно получить с помощью метода, который базируется на применении теоремы В. М. Тихомирова о поперечнике шара и леммы 1 (для оценки снизу) с использованием теоремы 1′ (для оценки сверху) для $\psi \in P_0^{(n)}$ (в частности, $\psi \in I_0$).

2. Оценки снизу в теореме 4 остаются справедливыми и в предположении, что $\psi \in P_\alpha^{(n)} \cap P_{0,C}$, где $\alpha = (1/p - 1/q)_+$, $1 < p, q < \infty$.

1. *Степанец А. И., Романюк В. С.* Классы (ψ, β)-дифференцируемых функций комплексного переменного и приближение линейными средними их рядов Фабера // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 11. – С. 1556–1570.
2. *Романюк В. С.* Приближение классов аналитических функций алгебраическими многочленами и колмогоровские поперечники // Там же. – 1996. – **48**, № 2. – С. 236–250.
3. *Muckenhoupt B.* Weighted norm inequalities for the Hardy maximal functions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – **165**, № 1. – P. 207–226.
4. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
5. *Степанец А. И., Кушпель А. К.* Скорость сходимости рядов Фурье и наилучшие приближения в пространстве L_q // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 4. – С. 483–492.

6. *Кушпель А. К.* Поперечники классов гладких функций в пространстве L_q. – Киев, 1987. – 58 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.44).
7. *Calderon A. P.* Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators // Proc. Nat. Acad. USA. – 1977. – № 4. – P. 1324–1327.
8. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
9. *Тайков Л. В.* Поперечники некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки. – 1977. – **22**, № 2. – С. 285–295.
10. *Фарков Ю. А.* О поперечниках некоторых классов аналитических функций // Успехи мат. наук. – 1984. – **39**, № 1. – С. 161–162.
11. *Вакарчук С. Б.* О поперечниках некоторых классов аналитических функций. I // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 3. – С. 324–333.
12. *David G.* Opérateurs intégraux singuliers sur certaines curbes du plan complexe // Ann. sci. Ecole norm. supér. – 1984. – **7**. – P. 157–189.
13. *Дынькин Е. М., Осиленкер Б. П.* Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения // Итоги науки и техники. Мат. анализ. – 1983. – **21**. – С. 42–128.
14. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. – М.: Гостехтеориздат, 1950. – 336 с.
15. *Гайер Д.* Лекции по теории аппроксимации в комплексной плоскости. – М.: Мир, 1986. – 216 с.
16. *Степанец А. И., Кушпель А. К.* Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций. – Киев, 1984. – 41 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.15).
17. *Тихомиров В. М.* Теория приближений // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Фундам. направления. – 1987. – **14**. – С. 105–260.
18. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. – М.: Мир, 1965. – Т. 2. – 537 с.
19. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.
20. *Майоров В. Е.* О наилучшем приближении классов $W_1^r(I^s)$ в пространстве $L_\infty(I^s)$ // Мат. заметки. – 1976. – **19**, № 5. – С. 699–706.
21. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.

Получено 26.05.97,
после доработки — 21.07.98