УДК 517.63, 519.47

Ю. И. Черский (Одес. акад. строительства и архитектуры)

ОБ АНАЛИТИЧНОСТИ ФУРЬЕ-ОРИГИНАЛА И ФУРЬЕ-ОБРАЗА ВНУТРИ ПРОТИВОЛЕЖАЩИХ УГЛОВ

We prove that the Fourier image is an analytic function inside two alternate angles if the Fourier original possesses a similar property.

Доведено, що образ Фур'є є аналітичною функцією всередині двох протилежних кутів, якщо оригінал Фур'є має аналогічну властивість.

Одним из важных свойств образа Фурье

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{izt}\, dt \tag{1}$$

является его аналитичность, если выполнены определенные условия, которые так или иначе нейтрализуют возможный рост экспоненты $\exp(izt)$. До сих пор при формулировке таких условий исходили из представления $z = x + iy$, которое может привести к аналитичности $F(z)$ в верхней или нижней полуплоскости (подобно одностороннему преобразованию Лапласа), либо в горизонтальной полосе (при экспоненциальном убывании $|f(t)|$), либо во всей комплексной плоскости (при еще более быстром убывании $|f(t)|$, $t \to \pm\infty$).

Ниже используется иное представление: $z = x\exp(i\varphi)$, где x и φ — вещественны. Для ограниченности модуля экспоненты $\exp(izt)$ переменную интегрирования t следует взять в виде $t = s\exp(-i\varphi)$, $-\infty < s < \infty$. При этом оригинал Фурье следует составить из двух функций, каждая из которых аналитична в одной из угловых областей:

$$\{\zeta \mid \arg\zeta \in (\alpha, \beta)\}, \tag{2}$$

$$\{\zeta \mid \arg(-\zeta) \in (\alpha, \beta)\}. \tag{3}$$

Здесь и далее вещественные числа α и β таковы, что $-\pi \le \alpha < 0 < \beta \le \pi$ и $\beta - \alpha \le \pi$. Совокупность областей (2) и (3) обозначим через $D_{\alpha\beta}$ и будем говорить, что функция $f(\zeta)$ аналитична в $D_{\alpha\beta}$.

В итоге вместо (1) получим следующее представление для образа Фурье:

$$F(z) \stackrel{\mathrm{df}}{=} e^{-i\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(se^{-i\varphi})\, e^{ixs}\, ds, \qquad z = xe^{i\varphi}. \tag{4}$$

Ниже доказано, что из аналитичности оригинала Фурье $f(\zeta)$ в $D_{\alpha\beta}$ следует аналитичность образа Фурье $F(z)$ в $D_{-\beta-\alpha}$,

$$D_{-\beta-\alpha} = \{z \mid \arg z \in (-\beta, -\alpha)\} \cup \{z \mid \arg(-z) \in (-\beta, -\alpha)\}. \tag{5}$$

1. Формулировка теорем.

Теорема 1. *Пусть функция $f(\zeta)$ определена на вещественной оси и аналитична в $D_{\alpha\beta}$. Пусть при целом числе $m \ge -3$ для любого отрезка $[\alpha_1, \beta_1]$, лежащего в (α, β), существует постоянная C такая, что при любом Θ из $[\alpha_1, \beta_1]$*

$$|f(s\,e^{i\theta})| < C(|s|+1)^m, \quad -\infty < s < \infty,$$

$$\left|\frac{d}{ds} f(se^{i\theta})\right| < C(|s|+1)^m \quad \textit{при} \quad s>0 \quad \textit{и} \quad s<0$$

(функция $f(s)$ может иметь разрыв в точке $s = 0$). Тогда ее образ Фурье $F(z)$ аналитичен в $D_{-\beta-\alpha}$.

Доказательство опирается на утверждения следующей теоремы и дано в п. 3.

Теорема 2. *Пусть функция $\psi(\zeta)$ определена и аналитична в угловой области* (2), *причем для любого отрезка $[\alpha_1, \beta_1] \subset (\alpha, \beta)$ существует постоянная C такая, что при $s>0$ и $\Theta \in [\alpha_1, \beta_1]$*

$$|\psi(s\,e^{i\theta})| < C|s+1|^{-3}, \tag{6}$$

$$\left|\frac{d}{ds}\psi(se^{i\theta})\right| < C|s+1|^{-3}. \tag{7}$$

Кроме того, пусть

$$\Psi(x, \varphi) = e^{-i\varphi}\int_0^\infty \psi(se^{-i\varphi})\,e^{ixs}\,ds, \quad x \in \mathbb{R}^1, \ -\beta < \varphi < -\alpha. \tag{8}$$

Тогда равенство $\Psi(z) = \Psi(x, \varphi)$, где $z = x\,e^{i\varphi}$, определяет функцию $\Psi(z)$, аналитическую в $D_{-\beta-\alpha}$.

2. *Доказательство теоремы* 2. Пусть Π — такой прямоугольник

$$\Pi = \{(x, \varphi) \mid x_0 \le x \le x_1, \ \varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1\}, \tag{9}$$

что все точки $z = x\,e^{i\varphi}$ находятся в $D_{-\beta-\alpha}$. Докажем, что в прямоугольнике Π функция $\Psi(x, \varphi)$ удовлетворяет уравнению Коши–Римана в полярных координатах

$$\frac{\partial\Psi(x, \varphi)}{\partial\varphi} = ix\frac{\partial\Psi(x, \varphi)}{\partial x}. \tag{10}$$

Формула дифференцирования по x

$$\frac{\partial\Psi(x, \varphi)}{\partial x} = ie^{-i\varphi}\int_0^\infty se^{ixs}\psi(se^{-i\varphi})\,ds \tag{11}$$

обоснована, например, в [1, с. 122].

Докажем равномерную непрерывность функции $\partial\Psi/\partial x$ по совокупности переменных (x, φ) в Π. Зададим $\varepsilon > 0$ и пусть $(x, \varphi) \in \Pi$, $(\tilde{x}, \tilde{\varphi}) \in \Pi$. Используя неравенство (6), получаем

$$I_1 = \left|\frac{\partial\Psi(x, \varphi)}{\partial x} - \frac{\partial\Psi(\tilde{x}, \varphi)}{\partial x}\right| =$$

$$= \left|\int_0^\infty s\psi(se^{-i\varphi})\,[e^{ixs} - e^{i\tilde{x}s}]\,ds\right| \le C\int_0^\infty |e^{ixs} - e^{i\tilde{x}s}|\,\frac{ds}{s^2+1}.$$

Фиксируем $N > 0$ так, чтобы

$$C\int_N^\infty |e^{ixs} - e^{i\tilde{x}s}|\,\frac{ds}{s^2+1} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Тогда при $|x - \tilde{x}| < \delta_1$ и достаточно малом δ_1 имеем

$$I_1 \le \frac{\varepsilon}{4} + C \int_0^N |e^{ixs} - e^{i\tilde{x}s}| \frac{ds}{s^2+1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Осталось оценить модуль разности

$$I_2 = \left| \frac{\partial \Psi(\tilde{x}, \varphi)}{\partial x} - \frac{\partial \Psi(\tilde{x}, \tilde{\varphi})}{\partial x} \right| \le$$

$$\le \int_0^\infty |se^{-i\varphi}\psi(se^{-i\varphi}) - se^{-i\tilde{\varphi}}\psi(se^{-i\tilde{\varphi}})|\, ds = \int_0^\sigma + \int_\sigma^N + \int_N^\infty .$$

Фиксируем числа σ и N так, чтобы интегралы с пределами интегрирования 0, σ и N, ∞ не превышали $\varepsilon/6$. Оценим интеграл

$$\int_\sigma^N |se^{-i\varphi}\psi(se^{-i\varphi}) - se^{-i\tilde{\varphi}}\psi(se^{-i\tilde{\varphi}})|\, ds. \tag{12}$$

На компакте $\sigma \le s \le N$, $\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1$ функция $\zeta\psi(\zeta)$, $\zeta = se^{i\varphi}$, в силу аналитичности в каждой точке, непрерывна; согласно теореме Гейне [2] она и равномерно непрерывна. Отсюда следует существование постоянной δ_2 такой, что при $|\varphi - \tilde{\varphi}| < \delta_2$ на компакте выполняется неравенство

$$|se^{-i\varphi}\psi(se^{-i\varphi}) - se^{-i\tilde{\varphi}}\psi(se^{-i\tilde{\varphi}})| < \frac{\varepsilon}{6N},$$

поэтому величина интеграла (12) станет меньше, чем $\varepsilon/6$. Таким образом, $I_2 < \varepsilon/2$ и при $|x - \tilde{x}| < \delta_1$ и $|\varphi - \tilde{\varphi}| < \delta_2$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{\partial \Psi(x, \varphi)}{\partial x} - \frac{\partial \Psi(\tilde{x}, \tilde{\varphi})}{\partial x} \right| \le I_1 + I_2 < \varepsilon.$$

Равномерная непрерывность установлена.

Вопрос о дифференцировании по φ функции $\Psi(x, \varphi)$ сводится к дифференцированию по параметру φ интеграла

$$\int_0^\infty \psi(se^{-i\varphi})\, e^{ixs}\, ds, \qquad \varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1,$$

где x — фиксировано. Рассмотрим сначала интеграл

$$\int_0^1 \psi(se^{-i\varphi})\, e^{ixs}\, ds$$

и покажем, что выполнено известное [2, с. 381] условие, обеспечивающее дифференцируемость интеграла по параметру, а именно — равномерная по совокупности переменных s и φ непрерывность производной по φ:

$$\omega(s, \varphi) = -ise^{-i\varphi}\psi'(se^{-i\varphi})e^{ixs} \tag{13}$$

в прямоугольнике $0 \le s \le 1$, $\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1$.

Зададим $\varepsilon > 0$. Вследствие (7) справедливо неравенство $|\omega(s, \varphi)| \le Cs$. Заключаем, что в полосе $0 \le s \le \varepsilon/4C$, $\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1$ модуль разности значений функции $\omega(s, \varphi)$ не превышает $\varepsilon/2$:

$$|\omega(s,\varphi) - \omega(\tilde{s},\tilde{\varphi})| \le \frac{\varepsilon}{2}. \tag{14}$$

В оставшемся прямоугольнике

$$\frac{\varepsilon}{4C} \le s \le 1, \quad \varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1 \tag{15}$$

функция $\omega(s,\varphi)\exp(-ixs) = -i\zeta\psi'(\zeta)$ согласно теореме Гейне равномерно непрерывна по совокупности (s,φ); вместе с ней будет равномерно непрерывна в прямоугольнике (15) и функция $\omega(s,\varphi)$. Значит, существует число $\delta > 0$ такое, что если $|s-\tilde{s}| < \delta$ и $|\varphi - \tilde{\varphi}| < \delta$, где s, $\tilde{s}$, φ, $\tilde{\varphi}$ взяты из прямоугольника (15), то

$$|\omega(s,\varphi) - \omega(\tilde{s},\tilde{\varphi})| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Сопоставляя это неравенство с (14), видим, что в прямоугольнике $0 \le s \le 1$, $\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1$ при $|s-\tilde{s}| < \delta$ и $|\varphi - \tilde{\varphi}| < \delta$ справедливо неравенство

$$|\omega(s,\varphi) - \omega(\tilde{s},\tilde{\varphi})| < \varepsilon,$$

что и означает равномерную непрерывность. Итак,

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\int_0^1 \psi(se^{-i\varphi})\, e^{ixs}\, ds = -ie^{-i\varphi}\int_0^1 s\psi'(se^{-i\varphi})\, e^{ixs}\, ds. \tag{16}$$

Для интеграла

$$\int_1^\infty \psi(se^{-i\varphi})\, e^{ixs}\, ds, \quad \varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1, \tag{17}$$

проверим выполнение условий теоремы [2, с. 486] о дифференцировании несобственного интеграла. Действительно, во-первых, интеграл (17) сходится, что следует из предположения (6). Во-вторых, функция (13) равномерно непрерывна по совокупности переменных s и φ в прямоугольнике (при любом $h > 0$): $1 \le s \le 1+h$, $\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1$. В-третьих, несобственный интеграл

$$\int_1^\infty \frac{\partial}{\partial\varphi}\psi(se^{-i\varphi})\, e^{ixs}\, ds = -i\int_1^\infty e^{-i\varphi} s\psi'(se^{-i\varphi})\, e^{ixs}\, ds$$

равномерно сходится по $\varphi \in [\varphi_0, \varphi_1]$, что следует из предположения (7). Согласно указанной теореме допустимо дифференцирование по φ под знаком интеграла (17), которое вместе с равенством (16) приводит к результату

$$\frac{\partial\Psi(x,\varphi)}{\partial\varphi} = -ie^{-i\varphi}\int_0^\infty \psi(se^{-i\varphi})\, e^{ixs}\, ds -$$

$$- ie^{-2i\varphi}\int_0^\infty s\psi'(se^{-i\varphi})\, e^{ixs}\, ds, \quad (x,\varphi) \in \Pi. \tag{18}$$

Проверим выполнение условия Коши – Римана. Покажем, что тождество (10) имеет место в прямоугольнике (9). С помощью равенств (11) и (18) приводим тождество (10) к равносильному тождеству

$$\int_0^\infty s e^{ixs} \frac{\partial}{\partial s} \psi(s e^{-i\varphi})\, ds = -\int_0^\infty \psi(s e^{-i\varphi}) \frac{\partial}{\partial s}(s e^{ixs})\, ds.$$

Однако последнее тождество — формула интегрирования по частям, причем выполнены условия ее применимости [2, с. 467]. В частности, существуют пределы

$$\lim_{s \to 0} s e^{ixs} \psi(s e^{-i\varphi}) = 0, \qquad \lim_{s \to \infty} s e^{ixs} \psi(s e^{-i\varphi}) = 0.$$

Поскольку уравнение Коши – Римана тождественно выполняется в прямоугольнике Π, то в Π производная $\partial\Psi/\partial\varphi$ будет непрерывной вследствие непрерывности функции $\partial\Psi/\partial x$, а функция $\Psi(z) = \Psi(x, \varphi)$ — аналитической на той части комплексной плоскости, которая соответствует Π. Ввиду произвольности выбора Π функция $\Psi(z)$ будет аналитической в $D_{-\beta-\alpha}$. Теорема 2 доказана.

3. ***Доказательство теоремы*** **1.** Функции

$$\psi(\zeta) = f(\zeta)(\zeta + 1)^{-3-m}, \qquad \arg\zeta \in (\alpha, \beta),$$

$$\psi_1(\zeta) = f(-\zeta)(-\zeta - 1)^{-3-m}, \qquad \arg\zeta \in (\alpha, \beta),$$

удовлетворяют всем условиям теоремы 2, так что их Фурье-образы $\Psi(z)$ и $\Psi_1(z)$ аналитичны в $D_{-\beta-\alpha}$. Выразим Фурье-оригинал $f(x)$ через $\psi(x)$ и $\psi_1(x)$ на вещественной оси следующим образом:

$$f(x) = \frac{1 + \operatorname{sgn} x}{2} \psi(x)(x+1)^{3+m} + \frac{1 - \operatorname{sgn} x}{2} \psi_1(-x)(x-1)^{3+m}.$$

В случае $-3 \le m \le -1$ квадрат функции $f(x)$ суммируем на оси и можно использовать L^2-теорию [1], а при $m \ge 0$ — пробразование Фурье обобщенных функций. В обоих случаях получим соотношение

$$F(x) = \left(-i\frac{d}{dx} + 1\right)^{3+m} \Psi(x) + \left(-i\frac{d}{dx} - 1\right)^{3+m} \Psi_1(-x). \tag{19}$$

Точка $x = 0$ может оказаться сингулярной для функции (19) при $m \ge 0$. Однако это будет единственная сингулярная точка. Все остальные точки вещественной оси как в случае $-3 \le m \le -1$, так и при $m \ge 0$ — точки аналитичности функции (19). Более того, тождество (19) позволяет аналитически продолжить Фурье-образ $F(x)$ на обе угловые области (5), что и требовалось доказать.

В заключение отметим, что равенство Парсеваля, примененное к функциям из формулы (4), дает определенные количественные соотношения между оригиналом и образом Фурье по различным радиальным направлениям.

1. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. – М.; Л.: Гос. изд-во техн. лит., 1948. – 479 с.
2. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Функции одного переменного. Ч. 1, 2. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

Получено 07.04.97