УДК 517.9

Ю. В. Роговченко, канд. фіз.-мат. наук (Ін-т математики АН України, Київ)

ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЗКИ ІМПУЛЬСНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ СИСТЕМ З НЕОБМЕЖЕНИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

The conditions are obtained for existence and stability of periodic solutions of pulse evolutionary systems with right-hand sides unbounded in x.

Одержані умови існування та стійкості періодичних розв'язків імпульсних систем з необмеженими за змінною x операторами правих частин.

Різним аспектами якісної теорії імпульсних систем у евклідовому просторі, а також наближеним методам їх дослідження присвячена велика кількість робіт, серед яких слід виділити в першу чергу огляд [1] та монографію [2]. В подальшому ідеї робіт [1, 2] розвивались у напрямку застосування до нових об'єктів дослідження, у тому числі й до імпульсних еволюційних систем у просторі Банаха. В роботах [3–5] вивчалося питання існування та єдиності обмежених та періодичних розв'язків нелінійної імпульсної системи як з фіксованими моментами імпульсної дії, так і з імпульсною дією на гіперповерхнях за умови неперервності за змінною x правих частин f та g_i.

Нехай X — простір Банаха з нормою $\|x\|_X$, A — секторіальний оператор в X [7] та $\Re\sigma(A) > \gamma > 0$. Тоді для $\alpha > 0$ визначені дробові степені оператора A^α та простори $X^\alpha = D(A^\alpha)$ з нормою

$$\|x\|_{X^\alpha} = \|x\|_X + \|A^\alpha x\|_X.$$

Розглянемо імпульсну еволюційну систему

$$\frac{dx}{dt} + Ax = f(t, x, \varepsilon), \quad t \neq \tau_i, \tag{1}$$

$$\Delta x\Big|_{t=\tau_i} = g_i(x, \varepsilon), \tag{2}$$

де

$$\Delta x\Big|_{t=\tau_i} \equiv x(\tau_i + 0) - x(\tau_i - 0),$$

$$x \in U = \{x \in X^\alpha\colon \|x\|_{X^\alpha} \le \rho_0\},$$

$$t \in R, \ \varepsilon \in \Lambda = (0, \varepsilon_0], \ \ \varepsilon_0 > 0, \ \ i \in \Gamma \subset N.$$

В роботах [3–5] на оператори $f(t, x, \varepsilon)$ та $g_i(x, \varepsilon)$, що входять у праві частини імпульсної еволюційної системи (1), (2), накладалась умова неперервності за змінною x, а також передбачалось виконання умови Ліпшіца за змінною x з малою сталою Ліпшіца. Однак в деяких випадках такі умови сильно обмежують дослідження [8], хоча теорія дробових степенів операторів [7] дозволяє за певних припущень вивчати задачу Коші

$$x(0) = x_0, \ \ x_0 \in U \subset X^\alpha, \tag{3}$$

для імпульсної еволюційної системи (1), (2) також і для операторів $f(t, x, \varepsilon)$, $g_i(x, \varepsilon)$, не обмежених за змінною x.

Означення 1. *Розв'язком задачі Коші* $x(\tau) = x_0$ *для нелінійної імпульсної еволюційної системи* (1), (2) *на деякому інтервалі* $[\tau, \sigma)$ *будемо називати функцію* $x(t, \varepsilon)$, *кусково-неперервну на кожному інтервалі* $[\tau, t_{k+1})$, $[t_{k+1},$

$t_{k+2})$, ... , $[t_{k+s}, \sigma)$ *з розривами першого роду в точках* $t = t_i$, $i \in \Gamma$, *що задовольняє умови*:

α) *оператор* $f(t, x, \varepsilon)$: $[\tau, \sigma) \times U \times \Lambda \to X$ *кусково-неперервний*;

β) $x(t, \varepsilon) \in D(A)$ *для довільного* $\varepsilon \in \Lambda$;

γ) $x(t)$ *задовольняє при* $t \neq t_i$ *диференціальне рівняння* (1) *та при* $t = t_i$ — *різницеве рівняння* (2).

***Зауваження* 1.** Наведене нами означення трохи відрізняється від того, що використовувалось в [3, 4], а саме умови: 1) неперервність за Хельдером відображення $t \to f(t, x(t, \varepsilon), \varepsilon)$ для будь-якого $\varepsilon \in \Lambda$; 2)

$$\int_{\tau}^{\sigma} (t-s)^{-\alpha} \| f(s, x(s, \varepsilon), \varepsilon) \|_X \, ds \to 0 \quad \text{при } \sigma \to \tau + 0;$$

замінені вимогою кускової неперервності відображення f. Це пов'язано з прикладом роботи [9], у якому продемонстрована можливість існування за наведених вище умов 1, 2 кількох розв'язків абстрактного параболічного рівняння (1).

Означення 2. *Будемо називати імпульсну еволюційну систему* (1), (2) T-*періодичною, якщо існують таке дійсне число* $T > 0$ *та таке натуральне число* p, *що для всіх* $t \in R$, $\varepsilon \in \Lambda$, $i \in \Gamma$ *виконуються умови*

$$\tau_{i+p} = \tau_i, \;\; f(t+T, A^{-\alpha} y, \varepsilon) = f(t, A^{-\alpha} y, \varepsilon), \;\; g_{i+p}(A^{-\alpha} y, \varepsilon) = g_i(A^{-\alpha} y, \varepsilon).$$

Отже, припустимо, що виконані такі умови:

1° Оператор $f(t, A^{-\alpha} y, \varepsilon)$ неперервний за змінною t при кожному фіксованому $y \in X$, $\varepsilon \in \Lambda$, неперервний за змінною ε при кожному фіксованому $t \in R$, $y \in X$ та задовольняє умову

$$\| f(t_1, A^{-\alpha} y_1, \varepsilon) - f(t_2, A^{-\alpha} y_2, \varepsilon) \|_X \leq k(\rho_0, \varepsilon_0) \left[|t_1 - t_2|^{\Theta} + \| y_1 - y_2 \|_X \right],$$

де $k(\rho_0, \varepsilon_0)$ — неспадна функція змінних ρ_0 та ε_0 така, що $k(\rho_0, \varepsilon_0) \to 0$, якщо

$$\rho_0 \to 0, \; \varepsilon_0 \to 0, \; y_1, y_2 \in U.$$

2° Оператори g_i для кожного $i \in \Gamma$ неперервні за змінною ε при кожному фіксованому $y \in X$ та задовольняють умову

$$\| g_i(A^{-\alpha} y_1, \varepsilon) - g_i(A^{-\alpha} y_1, \varepsilon) \|_{X^{\alpha}} \leq k(\rho_0, \varepsilon_0) \| y_1 - y_2 \|_X,$$

де $y_1, y_2 \in U$, а функція $k(\rho_0, \varepsilon_0)$ має означені вище властивості.

3° Оператори f та g_i задовольняють при кожному фіксованому $t \in R$, $\varepsilon \in \Lambda$ та при довільному $i \in \Gamma$ умову

$$\| g_i(0, \varepsilon) \|_{X^{\alpha}} + \| f(t, 0, \varepsilon) \|_X \leq m(\varepsilon_0),$$

де $m(\varepsilon_0)$ — неспадна додатна функція змінної ε_0 така, що $m(\varepsilon_0) \to 0$ якщо $\varepsilon_0 \to 0$;

4° Послідовність моментів імпульсної дії $\{\tau_i\}$, $i \in \Gamma$, впорядкована за зростанням номерів $\tau_1 < \tau_2 < \ldots \tau_n < \ldots$ та не має скінченних граничних точок

$$\lim_{i \to \infty} \tau_i = +\infty.$$

Зауваження 2. Аналогічно [10] можна відмовитись від обмежень, що накладаються умовою 4° на структуру послідовності $\{\tau_i\}$, додавши нові обмеження на функції g_i [10]:

1° для деякого $\sigma \in (0, +\infty)$ ряд

$$\sum_{0<\tau_i\le\sigma} \|\sup g_i(A^{-\alpha}y, \varepsilon)\|_{X^\alpha}$$

є збіжним для кожного фіксованого $\varepsilon \in \Lambda$, $y \in U$;

2° для достатньо малого додатного μ

$$\sum_{\tau_i : |\tau_i - t| < \mu} \|\sup g_i(A^{-\alpha}y, \varepsilon)\|_{X^\alpha} = o(\mu).$$

Теорема 1. *Нехай виконуються припущення* 1 – 4. *Тоді існує єдиний обмежений на півосі* $t > 0$ *розв'язок* $y_*(t, \varepsilon)$ *інтегрального рівняння*

$$y(t, \varepsilon) = \exp(-At)A^\alpha x_0 + \int_0^t A^\alpha \exp(-A(t-s))\, f(s, A^{-\alpha}y(s, \varepsilon))\, ds +$$

$$+ \sum_{i\in\Gamma} A^\alpha \exp(-A(t-\tau_i))\, g_i(A^{-\alpha}y(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon). \tag{4}$$

Функція $x_*(t, \varepsilon) = A^{-\alpha} y_*(t, \varepsilon)$ *буде обмеженим на півосі розв'язком задачі Коші* (3) *для імпульсної еволюційної системи* (1), (2). *При цьому, якщо імпульсна еволюційна система* (1), (2) *буде* T*-періодичною, то і розв'язок* $x_*(t, \varepsilon)$ *буде періодичним за змінною* t *з тим самим періодом.*

Доведення. Неважко пересвідчитись, що в тому випадку, коли $y(t, \varepsilon)$ буде являти собою розв'язок інтегрального рівняння (4), функція $x(t, \varepsilon) = A^{-\alpha} y(t, \varepsilon)$ буде шуканим обмеженим на півосі розв'язком. Розв'язок інтегрального рівняння (4) будемо шукати методом послідовних наближень, вибравши за перше наближення $y_0 = A^\alpha x_0$ та визначивши m-е наближення за допомогою співвідношення

$$y_m(t, \varepsilon) = \exp(-At)A^\alpha x_0 + \int_0^t A^\alpha \exp(-A(t-s))\, f(s, A^{-\alpha}y_{m-1}(s, \varepsilon))\, ds +$$

$$+ \sum_{i\in\Gamma} A^\alpha \exp(-A(t-\tau_i))\, g_i(A^{-\alpha}y_{m-1}(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon). \tag{5}$$

Встановимо тепер за допомогою методу математичної індукції справедливість оцінок

$$|y_m(t, \varepsilon)|_X \le (C\rho_0 + Km(\varepsilon_0))(1 - Kk(\rho_0, \varepsilon_0))^{-1} + \rho_0(Kk(\rho_0, \varepsilon_0))^m, \tag{6}$$

$$|y_{m+1}(t, \varepsilon) - y_m(t, \varepsilon_0)|_X \le (Kk(\rho_0, \varepsilon_0))^m [\rho_0[C + k(\rho_0, \varepsilon_0) + 1] + Km(\varepsilon_0)], \tag{7}$$

де нами позначено

$$|y|_X \le \sup_{t\in R} \|y\|_X.$$

Зазначимо, що в наведених вище оцінках C — стала, як і в теоремі 1.3.4 [7], K — додатна стала з означення функції Гріна [3, 4], яка у розглядуваному випадку визначається умовою

$$\int_{-\infty}^{\infty} \| A^{\beta} \exp(-A(t-s)) \|_X \, ds +$$

$$+ \sum_{i \in \Gamma} \| A^{\beta} \exp(-A(t-\tau)) \|_X \leq K, \quad 0 \leq \beta \leq \alpha < 1.$$

Використовуючи представлення (5), одержуємо

$$| y_m(t, \varepsilon) |_X \leq \left| \exp(-At) A^{\alpha} x_0 \right|_X + \int_0^t \left| A^{\alpha} \exp(-A(t-s)) f(s, 0, \varepsilon) \right|_X ds +$$

$$+ \int_0^t \left| A^{\alpha} \exp(-A(t-s)) \left[f(s, 0, \varepsilon) - f(s, A^{-\alpha} y_{m-1}(s, \varepsilon)) \right] \right|_X ds +$$

$$+ \sum_{i \in \Gamma} \left| A^{\alpha} \exp(-A(t-\tau_i)) \, g_i(0, \varepsilon) \right|_X +$$

$$+ \sum_{i \in \Gamma} \left| A^{\alpha} \exp(-A(t-\tau_i)) \left[g_i(0, \varepsilon) - g_i(A^{-\alpha} y_{m-1}(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon) \right] \right|_X .$$

З останньої нерівності з урахуванням умов $1^{\circ} - 3^{\circ}$ одержуємо рекурентну оцінку

$$| y_m(t, \varepsilon) |_X \leq C\rho_0 + K[\, m(\varepsilon_0) + k(\rho_0, \varepsilon_0) \, | y_{m-1}(t, \varepsilon) |_X \,]. \tag{8}$$

Нехай тепер ε_0 вибране настільки малим, що для всіх $\varepsilon \in \boldsymbol{\lambda}$ виконується оцінка

$$Kk(\rho_0, \varepsilon_0) < 1. \tag{9}$$

Тоді з нерівності (8) одержуємо необхідну оцінку (6):

$$|y_m(t, \varepsilon)|_X \leq C\rho_0 + K\left[m(\varepsilon_0) + k(\rho_0, \varepsilon_0) \, | y_{m-1}(t, \varepsilon) |_X \right] \leq$$

$$\leq C\rho_0 + K\Big\{ m(\varepsilon_0) + k(\rho_0, \varepsilon_0) \times$$

$$\times [\, C\rho_0 + K\left[m(\varepsilon_0) + k(\rho_0, \varepsilon_0) \, | y_{m-2}(t, \varepsilon) |_X \right\} \leq \ldots$$

$$\ldots \leq (C\rho_0 + Km(\varepsilon_0)) \Big[1 + Kk(\rho_0, \varepsilon_0) +$$

$$+ (Kk(\rho_0, \varepsilon_0))^2 + \ldots + (Kk(\rho_0, \varepsilon_0))^{m-1} \Big] +$$

$$+ \rho_0 (Kk(\rho_0, \varepsilon_0))^m \leq (C\rho_0 + Km(\varepsilon_0)) \times$$

$$\times (1 - Kk(\rho_0, \varepsilon_0))^{-1} + \rho_0 (Kk(\rho_0, \varepsilon_0))^m .$$

Виберемо тепер $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ та $\rho_1 \leq \rho_0$ так, щоб для всіх $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ та $\rho \leq \rho_0$ виконувались нерівності

$$(C\rho + Km(\varepsilon))(1 - Kk(\rho, \varepsilon))^{-1} < \frac{1}{2}\rho_0, \quad (Kk(\rho, \varepsilon))^m < \frac{1}{2} \tag{10}$$

(цього завжди можна досягти за рахунок властивостей функцій $k(\rho, \varepsilon)$ та $m(\varepsilon)$). Виконання нерівностей (9) забезпечує можливість продовження ітераційного процесу (5), оскільки всі наближення будуть знаходитись в області U.

Встановимо тепер справедливість оцінки (7), для чого розглянемо норму різниці

$$|y_{m+1}(t,\varepsilon)-y_m(t,\varepsilon)|_X \le \int_0^t \Big| A^{\alpha}\exp(-A(t-s))\times$$

$$\times\Big[f(s,A^{-\alpha}y_m(s,\varepsilon),\varepsilon)-f(s,A^{-\alpha}y_{m-1}(s,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\Big|_X ds+$$

$$+\sum_{i\in\Gamma}\Big|A^{\alpha}\exp(-A(t-\tau_i))\Big[g_i(A^{-\alpha}y_m(\tau_i-0,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-g_i(A^{-\alpha}y_{m-1}(\tau_i-0,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\Big|_X.$$

З останньої оцінки одержуємо рекурентне співвідношення

$$|y_{m+1}(t,\varepsilon)-y_m(t,\varepsilon)|_X \le Kk(\rho_0,\varepsilon_0)\,|y_m(t,\varepsilon)-y_{m-1}(t,\varepsilon)|_X, \tag{11}$$

де стала K та функція $k(\rho,\varepsilon)$ такі ж, як вище. Але тоді з (11) випливає оцінка

$$|y_{m+1}(t,\varepsilon)-y_m(t,\varepsilon)|_X \le Kk(\rho_0,\varepsilon_0)\,|y_m(t,\varepsilon)-y_{m-1}(t,\varepsilon)|_X \le$$

$$\le (Kk(\rho_0,\varepsilon_0))^2\,|y_{m-1}(t,\varepsilon)-y_{m-2}(t,\varepsilon)|_X \le \ldots$$

$$\ldots \le (Kk(\rho_0,\varepsilon_0))^m\,|y_1(t,\varepsilon)-y_0(t,\varepsilon)|_X. \tag{12}$$

Оцінимо тепер окремо

$$|y_1(t,\varepsilon)-y_0(t,\varepsilon)|_X \le |y_1(t,\varepsilon)|_X+|y_0|_X \le$$

$$\le C\rho_0+K\Big[m(\varepsilon)+k(\rho_0,\varepsilon_0)\,|y_0|_X\Big]+|y_0|_X \le$$

$$\le \rho_0[C+k(\rho_0,\varepsilon_0)+1]+Km(\varepsilon_0).$$

Тоді за допомогою останньої нерівності з (12) маємо необхідну оцінку (7):

$$|y_{m+1}(t,\varepsilon)-y_m(t,\varepsilon)|_X \le (Kk(\rho_0,\varepsilon_0))^m\times$$

$$\times\Big[\rho_0[C+k(\rho_0,\varepsilon_0)+1]+Km(\varepsilon_0)\Big].$$

Нерівність (7) забезпечує збіжність ітераційного процесу (5), оскільки в силу нерівності (9) $(Kk(\rho_0,\varepsilon_0))^m \to 0$ якщо $m\to\infty$, а тому $y_m(t,\varepsilon)\to y_*(t,\varepsilon)$ в X рівномірно за $t\in R_+$ та $\varepsilon\in\Lambda_0\subset\Lambda$. При цьому очевидно, що гранична функція буде задовольняти інтегральне рівняння (4), а також оцінку

$$|y_*(t,\varepsilon)|_X \le l(\rho_0,\varepsilon_0),$$

де $l(\rho_0,\varepsilon_0)\to 0$ якщо $\rho_0\to 0$ $\varepsilon_0\to 0$ Єдиність граничної функції $y_*(t,\varepsilon)$ випливає з принципу стискаючих відображень Банаха, можливість застосування якого гарантують нерівності (6) та (7).

Аналогічно до [3, 4] можна безпосередньою перевіркою переконатись у тому, що функція $x_*(t,\varepsilon)=A^{-\alpha}y_*(t,\varepsilon)$ буде при $t\in(\tau_i,\tau_{i+1})$ задовольняти диференціальне рівняння

$$\frac{dx_*}{dt}+Ax_* = f(t,x_*,\varepsilon),$$

а при $t=\tau_i$ — різницеве рівняння

$$x_*(\tau_i+0,\varepsilon) = x_*(\tau_i-0,\varepsilon)+g_i(x_*(\tau_i-0,\varepsilon),\varepsilon).$$

У тому випадку, коли імпульсна еволюційна система (1), (2) буде T-періодичною, гранична функція $y_*(t, \varepsilon)$ також буде T-періодичною за змінною t, а це означає, що аналогічну властивість матиме і розв'язок $x_*(t, \varepsilon)$ імпульсної еволюційної системи (1), (2). Доведення теореми закінчене.

Дослідимо тепер питання стійкості одержаного періодичного розв'язку $x_*(t, \varepsilon)$ імпульсної системи (1), (2). Для цього нам буде потрібне узагальнення нерівності типу Гронуолла [7].

Лема [3]. *Нехай для деякої кусково-неперервної функції* $u(t)$, u: $[t_0, T] \to R$ *з розривами першого роду у точках* τ_i: $t_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_N < T$ *для всіх* $t \in [t_0, T)$ *виконується нерівність*

$$0 \le u(t) \le a + b \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha} u(s)\, ds + c \sum_{i=1}^{N} u(\tau_i - 0),$$

де a, b, c *— невід'ємні сталі,* $0 \le \alpha < 1$.

Припустимо, що послідовність величин η_i, *які визначаються співвідношенням*

$$\eta_i = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (t-s)^{-\alpha}\, ds, \quad \tau_i < \tau_{i+1} < t,$$

обмежена зверху сталою $Q > 0$. *Тоді знайдеться така додатна стала* $M = M(\alpha, b, \tau_i)$, *що для довільних* $t \in [t_0, T)$ *буде виконуватись нерівність*

$$0 \le u(t) \le aM(1 + bMQ + cM)^N. \tag{13}$$

Доведення леми проводиться за допомогою методу математичної індукції. При $k = 1$ нерівність (13) розглядається на інтервалі $[t_0, \tau_1)$ і має вигляд

$$0 \le u(t) \le a + b\int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha} u(s)\, ds, \tag{14}$$

тому в силу нерівності типу Гронуолла ([7], лема 7.1.1) для функції $u(t)$ справедлива оцінка $0 \le u(t) \le aM$ з деякою сталою $M = M(a, b, \tau_1 - t_0)$. Припустимо тепер, що оцінка (14) виконується для $k = i$, та встановимо її справедливість для $k = i + 1$. А саме: нехай $y \in [\tau_{i+1}, \tau_{i+2})$, тоді за припущенням індукції будемо мати

$$0 \le u(t) \le a + b \sum_{k=0}^{i} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (t-s)^{-\alpha} u(s)\, ds +$$

$$+ b \int_{\tau_{k+1}}^{t} (t-s)^{-\alpha} u(s)\, ds + c \sum_{k=1}^{i+1} u(\tau_i - 0) \le$$

$$\le a + b \sum_{k=0}^{i} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (t-s)^{-\alpha} aM(1 + bMQ + cM)^k\, ds +$$

$$+ b \int_{\tau_{k+1}}^{t} (t-s)^{-\alpha} u(s)\, ds + acM \sum_{k=0}^{i} (1 + bMQ + cM)^k \le$$

$$\le a(1 + bMQ + cM) + aM(c + bQ) \sum_{k=1}^{i} (1 + bMQ + cM)^k +$$

$$+ b \int_{\tau_{i+1}}^{t} (t-s)^{-\alpha} u(s)\, ds = a(1 + bMQ + cM)^2 +$$

$$+ aM(c + bQ) \sum_{k=2}^{i} (1 + bMQ + cM)^k + b \int_{\tau_{i+1}}^{t} (t-s)^{-\alpha} u(s)\, ds = \ldots$$

$$\ldots = a(1 + bMQ + cM)^{i+1} + b \int_{\tau_{i+1}}^{t} (t-s)^{-\alpha} u(s)\, ds.$$

Отже, ми встановили, що при $t \in [\tau_{i+1}, \tau_{i+2})$ функція $u(t)$ задовольняє нерівність вигляду (14), а тому в силу леми 7.1.1 [7] для функції $u(t)$ справедлива оцінка (13). Доведення леми закінчене.

Тепер ми можемо з'ясувати питання стійкості періодичного розв'язку імпульсної еволюційної системи (1), (2).

Теорема 2. *Нехай виконуються припущення теореми* 1, *а також нехай існують такі* ρ_*, ε_*, *що для довільних* $\rho \le \rho_*$, $\varepsilon \le \varepsilon_*$ *справедлива нерівність*

$$pT^{-1} \ln \left[1 + Kk(\rho, \varepsilon)\, M(T - \alpha + 1)(1-\alpha)^{-1} \right] - \gamma < 0, \tag{15}$$

де сталі p, T, K, M, α *та функція* $k(\rho, \varepsilon)$ *такі ж, як і вище. Тоді періодичний розв'язок* $x_*(t, \varepsilon)$ *імпульсної еволюційної системи* (1), (2) *буде асимптотично стійким.*

Доведення. Нехай $x_*(t, \varepsilon) = A^{-\alpha} y_*(t, \varepsilon)$ — періодичний розв'язок імпульсної еволюційної системи (1), (2), існування та єдиність якого доведені в теоремі 1, і $x(t, \varepsilon) = A^{-\alpha} y(t, \varepsilon)$ — довільний розв'язок імпульсної еволюційної системи (1), (2), відмінний від $x_*(t, \varepsilon)$ та такий, що $\| x(0, \varepsilon) - x_*(0, \varepsilon) \|_{X^\alpha} < \delta$, де δ — мале додатне число. Розглянемо для $t \ge 0$ різницю розв'язків $y_*(t, \varepsilon)$ та $y(t, \varepsilon)$ інтегрального рівняння (4), тоді одержуємо

$$y(t, \varepsilon) - y_*(t, \varepsilon) = \exp(-At)\, A^{\alpha}(x(0, \varepsilon) - x_*(0, \varepsilon)) +$$

$$+ \int_0^t A^{\alpha} \exp(-A(t-s)) \left[f(s, A^{-\alpha} y(s, \varepsilon), \varepsilon) - \right.$$

$$\left. - f(s, A^{-\alpha} y_*(s, \varepsilon), \varepsilon) \right] ds + \sum_{i \in \Gamma} A^{\alpha} \exp(-A(t - \tau_i)) \times$$

$$\times \left[g_i(A^{-\alpha} y(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon) - g_i(A^{-\alpha} y_*(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon) \right].$$

З останньої нерівності в силу теореми 1.3.4 [7] та наших припущень випливає оцінка

$$\| y(t, \varepsilon) - y_*(t, \varepsilon) \|_X \le C\rho_1 \delta +$$

$$+ \int_0^t Kk(\rho_1, \varepsilon_1)\, \| y(s, \varepsilon) - y_*(s, \varepsilon) \|_X\, ds +$$

$$+ \sum_{i \in \Gamma} Kk(\rho_1, \varepsilon_1)\, \| y(\tau_i - 0, \varepsilon) - y_*(\tau_i - 0, \varepsilon) \|_X. \tag{16}$$

Скориставшись тепер лемою (в припущенні, що

$$a = C\rho_1\delta,\ b = c = Kk(\rho_1, \varepsilon_1),\ u(t) = \| y(t, \varepsilon) - y_*(t, \varepsilon)\|_X\ ),$$

з (16) одержуємо оцінку

$$\| y(t, \varepsilon) - y_*(t, \varepsilon)\|_X \le CM\rho_1\delta \exp\Big\{ \Big\{ \ln\Big[1 + $$

$$+ Kk(\rho_1, \varepsilon_1) M(T - \alpha + 1)(1-\alpha)^{-1} \Big] T^{-1} p - \gamma \Big\}\ t \Big\}. \tag{17}$$

Якщо вибрати тепер $\rho_* \le \rho_1$ та $\varepsilon_* \le \varepsilon_1$ настільки малими, щоб для довільних $\rho \le \rho_*$, $\varepsilon \le \varepsilon_*$ виконувалась нерівність (15) (а цього завжди можна досягти за рахунок малості функції $k(\rho_1, \varepsilon_1)$), то з оцінки (17) буде випливати асимптотична стійкість розв'язку $y_*(t, \varepsilon)$ інтегрального рівняння (4), а значить, також і періодичного розв'язку $x_*(t, \varepsilon)$ імпульсної еволюційної системи (1), (2). Доведення теореми закінчене.

Наприкінці відзначимо, що результати, аналогічні до доведених вище теорем 1 та 2, можна одержати також у випадку залежності гіперповерхонь поштовхів від просторової змінної x, додавши стандартні обмеження на функції $t_i(x, \varepsilon)$:

a) функції t_i: $U \times \Lambda \to R$ неперервні за своїми змінними для всіх $i \in \Gamma$;

b) для всіх $x, y \in U$ виконується нерівність

$$| t_i(x, \varepsilon) - t_i(y, \varepsilon) | \le k(\rho_0, \varepsilon_0) \| x - y \|_{X^\alpha};$$

c) для всіх $i \in \Gamma$ та довільного фіксованого $\varepsilon \in \Lambda$

$$\sup_{x \in U} t_{i+1}(x, \varepsilon) - \sup_{x \in U} t_i(x, \varepsilon) \ge \sigma > 0.$$

Окрім означених умов необхідно також переконатись у тому, що система є "одноударною", тобто не існує таких розв'язків імпульсної системи, які б одержували більш ніж один "поштовх" під час зустрічі з будь-якою гіперповерхнею $t = t_i(x, \varepsilon)$ [3, 6].

1. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Метод усреднения в системах с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 1. – С. 56–64.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 288 с.
3. *Роговченко Ю. В., Трофимчук С. И.* Периодические решения слабо нелинейных уравнений в частных производных параболического типа и их устойчивость. – Киев, 1986. – 44 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.65).
4. *Роговченко Ю. В., Трофимчук С. И.* Ограниченные и периодические решения слабо нелинейных импульсных эволюционных систем // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 2. – С. 260–264.
5. *Роговченко Ю. В.* К вопросу о единственности периодического решения нелинейной импульсной эволюционной системы // Дифференциальные уравнения с параметром. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 94–98.
6. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А., Трофимчук С. И.* Проблема "биений" в импульсных системах. – Киев, 1990. – 46 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90.11).
7. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. – 376 с.
8. *Интегральные* операторы в пространствах суммируемых функций / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский. – М.: Наука, 1966. – 500 с.
9. *Miklavcic M.* Stability for semilinear equations with noninvertible linear operator // Pacific J. Math. – 1985. – **118**, № 2. – P. 199–214.
10. *Трофимчук Е. П., Трофимчук С. И.* Импульсные системы с фиксированными моментами толчков общего расположения: существование, единственность решения и корректность задачи Коши // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 2. – С. 230–237.

Одержано 22. 01. 92