УДК 530.145

С. А. Глоба

Один класс моделей квантовых решеточных систем и их гиббсовские состояния

1. Построение температурных (в частности, гиббсовских) состояний является одной из основных задач при математическом описании систем равновесной квантовой статистической физики. Один из подходов ее решения основан на использовании температурных функций Грина, давно применяющихся в теоретической физике [1, 2]. Между температурными состояниями и функциями Грина существует определенное соответствие, исследованное на аксиоматическом уровне в работах [3, 4].

Наши рассмотрения будут относится к системам взаимодействующих осцилляторов на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$. С каждым узлом $k \in \mathbb{Z}^d$ свяжем частицу с одной внутренней степенью свободы. Ей отвечают пространство состояний $\mathcal{H}_k = L_2(\mathbb{R}^1, dx_k)$, канонические операторы импульса и координаты, определенные формулами $(p_k f)(x_k) = \frac{1}{i}\frac{df(x_k)}{dx_k}$, $(q_k f)(x_k) = x_k f(x_k)$ как самосопряженные операторы в $\mathcal{H}_k$ на естественных областях определения. Конечному подмножеству $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ отвечает пространство состояний $\mathcal{H}_\Lambda = L_2(\mathbb{R}^\Lambda, dx_\Lambda)$ $(x_\Lambda \in \mathbb{R}^\Lambda = \bigotimes_{k\in\Lambda} \mathbb{R}^1)$, набор операторов импульса, координаты $(p_k, q_k)_{k\in\Lambda}$ и порожденная им C^* — алгебра $\mathcal{A}_\Lambda$, натянутая на операторы e^{itp_k}, e^{itq_k}, $t \in \mathbb{R}^1$. При $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ определено естественное вложение $\mathcal{A}_{\Lambda_1} \subset \mathcal{A}_{\Lambda_2}$ с сохранением нормы. Поэтому можно ввести алгебру $A_{\mathrm{loc}} = \bigcup A_\Lambda\ \Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $|\Lambda| < \infty$ ($|\Lambda|$ мощность множества Λ), которая называется алгеброй локальных наблюдаемых. Взаимодействие частиц на решетке $\mathbb{Z}^d$ задается формальным гамильтонианом $H = H_0 + V$, где H_0 определяется соотношением $H_0 = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} p_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k,j\in\mathbb{Z}^d} d_{kj}q_kq_j$ и описывает систему взаимодействующих гармонических осцилляторов (здесь d_{kj} — матричные элементы оператора $D: l_2(\mathbb{Z}^d) \to l_2(\mathbb{Z}^d)$ в естественном базисе пространства $l_2(\mathbb{Z}^d)$ такого, что $(Dh, h)_{l_2(\mathbb{Z}^d)} > 0$, $h \neq 0$ и $\mathcal{D}(D^{-1/2}) \supset \mathbb{R}_0^{\mathbb{Z}^d}$), а V — ангармонический потенциал, задаваемый вещественной функцией переменных q_k, $k \in \mathbb{Z}^d$, как правило, не имеющий строгого смысла из-за бесконечности системы.

В случае, когда V задан посредством цилиндрической функции, зависящей лишь от координат q_k, $k \in \tilde{\Lambda}$, $|\tilde{\Lambda}| < \infty$, каждому конечному $\Lambda \supset \tilde{\Lambda}$ можно сопоставить локальный гамильтониан $H_\Lambda = H_{0,\Lambda} + V$, где $H_{0,\Lambda} = \frac{1}{2}\sum_{k\in\Lambda} p_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k,j\in\Lambda} d_{kj}q_kq_j$. Будем предполагать, что для всех $\Lambda \supset \Lambda$ оператор H_Λ — в существенном самосопряженный полуограниченный снизу оператор в $\mathcal{H}_\Lambda$ и e^{-tH_Λ} — ядерный оператор в $\mathcal{H}_\Lambda$.

При $\Lambda \supset \tilde{\Lambda}$ температурное (гиббсовское) состояние в области $\dot{\Lambda}$ при обратной температуре $\beta > 0$ задается функционалом

$$\omega_{\beta,\Lambda}^{V}(A) = \frac{\mathrm{Tr}\,(Ae^{-\beta H_\Lambda})}{\mathrm{Tr}\,(e^{-\beta H_\Lambda})}, \quad A \in A_\Lambda.$$

Гиббсовское состояние бесконечной системы, задаваемое формальным гамильтонианом $H = H_0 + V$, определяется как функционал на алгебре A_{loc}, полученный в результате термодинамического предельного перехода $\omega_\beta^V(A) = \lim\limits_{\Lambda \to \mathbb{Z}^d} \omega_{\beta,\Lambda}^V(A)$, $A \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$.

Обозначим через $\mathcal{B}_\Lambda$ коммутативную подалгебру операторов умножения на ограниченные функции алгебры $\mathcal{A}_\Lambda$, которую можно естественным образом отождествить с $L_\infty(\mathbb{R}^\Lambda, dx_\Lambda)$. Для набора действительных чисел $t_1, \ldots, \ldots, t_n$ такого, что $t_j - t_{j-1} \geqslant 0 \;\; 2 \leqslant j \leqslant n$, $\sum\limits_{j=2}^{n} (t_j - t_{j-1}) \leqslant \beta$, который можно рассматривать как последовательность упорядоченных точек окружности S_β длины β и произвольных $A_1, \ldots, A_n$; $A_j \in \mathcal{B}_\Lambda$ по состоянию $\omega_{\beta,\Lambda}^V$ можно ввести температурные функции Грина в области Λ, которые полностью определяют состояние $\omega_{\beta,\Lambda}^V$ (см. [3, 5]):

$$\Gamma_{A_1,\ldots,A_n}^{V,\beta,\Lambda}(t_1, \ldots, t_n) = \frac{\mathrm{Tr}\,(e^{-(\beta-(t_n-t_1))H_\Lambda} A_n \ldots e^{-(t_2-t_1)H_\Lambda} A_1}{\mathrm{Tr}\,(e^{-\beta H_\Lambda})}.$$

Температурные функции Грина $\Gamma_{A_1,\ldots,A_n}^{V,\beta}(t_1, \ldots, t_n)$ на всей решетке $\mathbb{Z}^d$ определяются как предел при $\Lambda \to \mathbb{Z}^d$ функций $\Gamma_{A_1,\ldots,A_n}^{V,\beta,\Lambda}(t_1, \ldots, t_n)$. При сделанных предположениях относительно D и V этот предел существует и для $\Gamma_{A_1,\ldots,A_n}^{V,\beta}(t_1,\ldots,t_n)$ справедливо представление [3,5] $\Gamma_{A_1,\ldots,A_n}^{V,\beta}(t_1, \ldots, t_n) = \int\limits_{\Omega_\beta} \prod\limits_{j=1}^{n} \times$

$$\times A_j(\omega(t_j)) d\nu_\beta^V(\omega(\cdot)) = \int\limits_{\Omega_\beta} \sum_{j=1}^{n} A_j(\omega(t_j)) \frac{1}{N_V} e^{-\int\limits_{S_\beta} V(\omega(\tau))\,d\tau} d\nu_\beta^0(\omega(\cdot)), \tag{1}$$

где ν_β^0 — построенная по H_0 гауссовская мера на Ω_β-множестве всех траекторий $\omega(\cdot)$ на S_β со значениями в $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$, заданная на стандартной σ-алгебре цилиндрических множеств, с ковариационным оператором

$$B_\beta(t_1, t_2) = \frac{1}{2} D^{-1/2} (1 - e^{-\beta D^{1/2}}) (e^{-|t_1-t_2|D^{1/2}} + e^{-(\beta-|t_1-t_2|D^{1/2})}; \quad t_1, t_2 \in S_\beta, \tag{2}$$

N_V^{-1} — нормирующий множитель. Мера $\nu_\beta^0 \;\; (\omega(\cdot))$ инвариантна относительно поворотов окружности S_β и обладает свойством положительности Остервальдера — Шрадера на S_β:

$$\int\limits_{\Omega_\beta} \prod_{j=1}^{n} A_j(\omega(t_j)) \prod_{j=1}^{n} A_j(\omega(-t_j))\, d\nu_\beta^0(\omega(\cdot)) \geqslant 0.$$

Аналогичными свойствами обладает мера ν_β^V [5].

В случае, когда взаимодействие задается формальным гамильтонианом, V аппроксимируется потенциалами $\{V_\Lambda, \Lambda \subset \mathbb{Z}^d, |\Lambda| < \infty\}$, $V_\Lambda = V_\Lambda(x_\Lambda)$ и затем исследуется сходимость функций $\Gamma_{A_1,\ldots,A_n}^{V,\beta,\Lambda}(t_1, \ldots, t_n)$ при $\Lambda \to \mathbb{Z}^d$, которая сводится к сходимости мер $\{\nu_\beta^{V_\Lambda}, \Lambda \subset \mathbb{Z}^d, |\Lambda| < \infty\}$ к предельной мере ν_β^V в смысле сходимости интегралов от цилиндрических функций. По мере ν_β^V подобно (1) вводятся температурные функции Грина.

2. Рассмотрим решеточную систему с формальным гамильтонианом

$$H=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}p_k^2+\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}s^2q_k^2+\sum_{k\neq j}V_{kj}(q_k,q_j),$$

где $V_{kj}(q_k,q_j)=-U_{kj}(q_k-q_j), U_{kj}\in C(\mathbb{R}^1)$ является четной положительно определенной функцией.

Так как $D=(s\delta_{kj})_{k,j\in\mathbb{Z}^d}$, то для меры ν_β^0 в силу (2) справедливо представление $\nu_\beta^0(\omega(\cdot))=\bigotimes_{k\in\mathbb{Z}^d}\nu_\beta^s(\omega_k(\cdot))$, где $\nu_\beta^s(\omega_k(\cdot))$ — гауссовская мера на $\Omega_k=\mathbb{R}^{S_\beta}$, которая однозначно определяется соотношениями (см. (2))

$$\begin{gathered}\int_{\Omega_k}\omega_k(t_1)\,\omega_k(t_2)\,d\nu_\beta^s(\omega_k(\cdot))=\frac{1}{2}\,\frac{1}{s(1-e^{-\beta s})}\,(e^{-|t_1-t_2|s}+e^{-(\beta-|t_1-t_2|s)}),\\ \int_{\Omega_k}\omega_k(t_1)\,d\nu_\beta^s(\omega_k(\cdot))=0,\quad t_1,t_2\in S_\beta.\end{gathered}\tag{3}$$

Как известно, гауссовский процесс, определяемый соотношениями (3), является броуновским мостом и его траектории с вероятностью 1 можно считать непрерывными функциями [6].

Для $\varphi_k^{(1)},\varphi_k^{(2)}\in C^\infty(S_\beta)$ введем случайные величины

$$\langle\omega_k,\varphi_k^{(i)}\rangle=\int_{S_\beta}\omega_k(t)\,\varphi_k^{(i)}(t)\,dt\quad i=1,2.$$

Тогда

$$\int_{\Omega_k}\langle\omega_k,\varphi_k^{(1)}\rangle\langle\omega_k,\varphi_k^{(2)}\rangle\,d\nu_\beta^s(\omega_k(\cdot))=\frac{1}{2}\int_{S_\beta^2}\frac{1}{\beta}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\frac{2\pi}{\beta}n(t_1-t_2)}}{\left(\frac{2\pi}{\beta}n\right)^2+s^2}\right)\times$$

$$\times\varphi_k^{(1)}(t_1)\,\varphi_k^{(2)}(t_2)\,dt_1dt_2=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{2\pi}{\beta}n\right)^2+s^2}\,\frac{1}{\sqrt{\beta}}\int_{S_\beta}\varphi_k^{(1)}(t_1)\,e^{i\frac{2\pi}{\beta}nt_1}dt_1\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{\beta}}\int_{S_\beta}\varphi_k^{(2)}(t_2)\,e^{-i\frac{2\pi}{\beta}nt_2}dt_2=\frac{1}{2}\,(\varphi_k^{(1)},\varphi_k^{(2)})_{W_2^{-1}(S_\beta)}.\tag{4}$$

Из равенства (4) вытекает, что $\nu_\beta^s(\omega_k(\cdot))$ — каноническая гауссовская мера, отвечающая гильбертову пространству $W_2^{-1}(S_\beta')$.

Для аналогичной интерпретации меры ν_β^0 на Ω_β введем ядерное пространство $\Phi=\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}^d}C_{\mathrm{Re}}^\infty(S_\beta)$ (топологическая прямая сумма) и гильбертовы пространства $L=\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}^d}L_{2,\mathrm{Re}}(S_\beta)$, $W=\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}^d}W_2^{-1}(S_\beta)$. При $\varphi=\{\varphi_k,\ k\in\mathbb{Z}^d\}\in\Phi$ и ν_β^0 п. в. $\omega(\cdot)\in\Omega_\beta$ определена измеримая линейная функция на Ω_β: $\Omega_\beta\ni\omega(\cdot)\to\to(\omega,\varphi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\langle\omega_k\varphi\rangle\in\mathbb{R}^1$. Равенство $\nu_\beta^0(\omega(\cdot))=\times_{k\in\mathbb{Z}^d}\nu_\beta^s(\omega_k(\cdot))$ совместно с (4) дает

$$\int_{\Omega_\beta}\langle\omega,\varphi^{(1)}\rangle\langle\omega,\varphi^{(2)}\rangle\,d\nu_\beta^0(\omega(\cdot))=\frac{1}{2}\,(\varphi^{(1)},\varphi^{(2)})_W.\tag{5}$$

Из (5) вытекает, что ν_β^0 является канонической гауссовской мерой, ассоциированной с гильбертовым пространством W. Заметим, что характеристический функционал меры ν_β^0 имеет вид

$$\tilde{\nu}_\beta^0(\varphi) = \int\limits_{\Omega_\beta} e^{i\langle \omega, \varphi\rangle} d\nu_\beta^0(\omega(\cdot)) = e^{-1/4\|\varphi\|_W^2}, \ \varphi \in \Phi,$$

следовательно, по теореме Минлоса ν_β^0 можно трактовать как меру на Φ'.

Для $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $|\Lambda| < \infty$ введем потенциал $V_\Lambda = \sum\limits_{k,j\in\Lambda} V_{kj}$ и определим меры $\nu_\beta^{V_\Lambda}$.

Теорема. *На пространстве Ω_β определена единственная мера ν_β^V такая, что при всех $\varphi \in \Phi$*

$$\tilde{\nu}_\beta^{V_\Lambda}(\varphi) \to \tilde{\nu}_\beta^V(\varphi), \ \Lambda \to \mathbb{Z}^d.$$

При этом мера ν_β^V инвариантна относительно поворотов S_β и обладает свойством положительности Остервальдера — Шрадера на S_β.

Доказательство теоремы будет основано на применении корреляционных неравенств Фрелиха—Парка [6, 7]. Пусть (X, ρ) — пространство с мерой ($\rho(X) < \infty$), $\varphi(\cdot): X \ni x \to \varphi(x) \in W$ — измеримое отображение. Введем на Ω_β меру

$$d\nu_\beta(\omega(\cdot)) = \frac{1}{N_\rho} \exp\left[\int\limits_X \cos\langle\omega, \varphi(x)\rangle\, d\rho(x)\right] d\nu_\beta^0(\omega(\cdot)),$$

где N_ρ^{-1} — нормирующий множитель. Обозначим $\langle\cdot\rangle_\rho$ — среднее по мере ν_ρ.

Лемма. *Выполняются следующие корреляционные неравенства* [6, 7]:

1) $\forall \varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)} \in W \quad \langle \prod\limits_{i=1}^n \cos\langle\omega, \varphi^{(i)}\rangle\rangle_\rho \geqslant 0$;

2) $\forall \varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)} \in W, \psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(m)} \in W \ \langle \prod\limits_{i=1}^n \cos\langle\omega, \varphi^{(i)}\rangle \prod\limits_{i=1}^m \cos\langle\omega, \psi^{(i)}\rangle\rangle_\rho \geqslant$
$\geqslant \langle \prod\limits_{i=1}^n \cos\langle\omega, \varphi^{(i)}\rangle\rangle_\rho \langle \prod\limits_{i=1}^m \cos\langle\omega, \psi^{(i)}\rangle\rangle_\rho$;

3) $\forall \varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)} \in W \ \langle e^{\langle\omega,\varphi\rangle} \prod\limits_{i=1}^n \cos\langle\omega, \varphi^{(i)}\rangle\rangle_\rho \leqslant \langle e^{\langle\omega,\varphi\rangle}\rangle_\rho \langle \prod\limits_{i=1}^n \cos\langle\omega, \varphi^{(i)}\rangle\rangle_\rho$.

Нам понадобится вытекающее из леммы следствие.

Следствие. *Пусть ρ_1 и ρ_2 — конечные меры на X, причем $\rho_1 \leqslant \rho_2$. Тогда для всех $\varphi \in W$ выполняются неравенства*:

1) $\langle\cos\langle\omega, \varphi\rangle\rangle_{\rho_1} \leqslant \langle\cos\langle\omega, \varphi\rangle\rangle_{\rho_2}$;

2) $\langle\langle\omega, \varphi\rangle^2\rangle_{\rho_2} \leqslant \langle\langle\omega, \varphi\rangle^2\rangle_{\rho_1} \leqslant \frac{1}{2}\|\varphi\|_W^2$;

3) $\langle e^{\langle\omega,\varphi\rangle}\rangle_{\rho_1} \geqslant \langle e^{\langle\omega,\varphi\rangle}\rangle_{\rho_2}$.

Доказательство.

1). Пусть $\rho^{(\lambda)} = (1-\lambda)\rho_1 + \lambda\rho_2, \lambda \in [0, 1]$. Из определения меры $\nu_\rho(\lambda)$ получим

$$\frac{d}{d\lambda}\langle\cos\langle\omega, \varphi\rangle\rangle_{\rho(\lambda)} = \int\limits_X [\langle\cos\langle\omega, \varphi\rangle \cos\langle\omega, \varphi(x)\rangle\rangle_{\rho(\lambda)} - \langle\cos\langle\omega, \varphi\rangle\rangle_{\rho(\lambda)} \times$$
$$\times \langle\cos\langle\omega, \varphi(x)\rangle\rangle_{\rho(\lambda)}]\, d(\rho_2 - \rho_1)(x) \geqslant 0$$

согласно неравенству 2 леммы.

2). Так как $\langle\omega,\varphi\rangle^2=\lim\limits_{t\to 0} t^{-2}(1-\cos t\langle\omega,\varphi\rangle)$, нужное утверждение вытекает из п. 1 следствия и равенства $\langle\langle\omega,\varphi\rangle^2\rangle_{\rho=0}=\dfrac{1}{2}\|\varphi\|^2_W$.

3). Аналогично п. 1 следствия имеем

$$\frac{d}{d\lambda}\langle e^{\langle\omega,\varphi\rangle}\rangle_{\rho(\lambda)}=\int\limits_X[e^{\langle\omega,\varphi\rangle}\cos\langle\omega,\varphi(x)\rangle_{\rho(\lambda)}-\langle e^{\langle\omega,\varphi\rangle}\rangle_{\rho(\lambda)}\langle\cos\langle\omega,\varphi(x)\rangle\rangle_{\rho(\lambda)}]\times$$
$$\times d(\rho_2-\rho_1)(x)\leqslant 0$$

благодаря неравенству 3 леммы.

Доказательство теоремы. Так как $V_{kj}(q_k,q_j)=-U_{kj}(q_k-q_j)$, где U_{kj} — четная непрерывная положительно определенная функция, по теореме Бохнера имеем при всех $k,j\in\mathbb{Z}^d$, $k\neq j$

$$V_{kj}(q_k,q_j)=-\int\limits_{\mathbb{R}^1}\cos\lambda(q_k-q_j)\,d\sigma_{kj}(\lambda),$$

где σ_{kj} — конечная мера на $\mathbb{R}^1$. Положим $X=S^2_\beta$ и для каждых $k,j\in\mathbb{Z}^d_{k\neq j}$, зададим отображение $X\ni x=(\lambda,\tau)\to\varphi^{(k,j)}(x)\in W$, координаты $\varphi_l^{(k,j)}(x)$, $l\in\mathbb{Z}^d$, которого определяются равенствами $l\neq k,l\neq j\ \varphi_l^{(k,j)}(x)=0$; $(l=k)\vee\vee(l=j)\ \varphi_l^{(k,j)}(x)=\lambda\delta_\tau(\cdot)$. Заметим, что $\delta_\tau\in W_2^{-1}(S_\beta)$, так что $\varphi^{(k,j)}(x)$ введено корректно. Зададим также для $k,j\in\mathbb{Z}^d$ меры $d\rho_{kj}(x)=d\sigma_{kj}d\tau$. Тогда

$$\int\limits_X\cos\langle\omega,\varphi^{(k,j)}(x)\rangle\,d\rho_{kj}(x)=\int\limits_{S^2_\beta}\cos(\lambda(\omega_k(\tau)-\omega_j(\tau))\,d\sigma_{kj}(\lambda)\,d\tau=$$
$$=\int\limits_{S_\beta}V_{kj}(\omega_k(\tau)-\omega_j(\tau)\,d\tau.$$

Положим для $\Lambda\subset\mathbb{Z}^d,|\Lambda|<\infty$ $\rho_\Lambda=\sum\limits_{k,j\in\Lambda}\rho_{kj}$ и рассмотрим соответствующие меры ν_{ρ_Λ}:

$$d\nu_{\rho_\Lambda}=\frac{1}{N_\Lambda}\exp\Big[\int\limits_X\sum_{k,j\in\Lambda}\cos\langle\omega,\varphi^{(k,j)}(x)\rangle\,d\rho_{kj}(x)\Big]\,d\nu^0_\beta(\omega(\cdot))=$$
$$=\frac{1}{N_\Lambda}\exp\Big[-\sum_{k,j\in\Lambda}\int\limits_{S_\beta}V_{kj}(\omega_k(\tau)-\omega_j(\tau))\,d\tau\Big]\,d\nu^0_\beta(\omega(\cdot))=d\nu^{V\Lambda}_\beta(\omega(\cdot)). \quad (6)$$

При фиксированных $\Lambda'\subseteq\Lambda''$ имеем $\rho_{\Lambda'}\leqslant\rho_{\Lambda''}$, поэтому для всех $\varphi\in\Phi$ получаем неравенство

$$\tilde{\nu}^{V\Lambda'}_\beta(\varphi)=\tilde{\nu}_{\rho_{\Lambda'}}(\varphi)=\int\limits_{\Omega_\beta}\cos\langle\omega,\varphi\rangle\,d\nu_{\rho_{\Lambda'}}(\omega(\cdot))\leqslant\int\limits_{\Omega_\beta}\cos\langle\omega,\varphi\rangle\,d\nu_{\rho_{\Lambda''}}(\omega(\cdot))=$$
$$=\tilde{\nu}_{\rho_{\Lambda''}}(\varphi)=\tilde{\nu}^{V\Lambda''}_\beta(\varphi),$$

вытекающее из неравенства 1) следствия. Таким образом, семейство характеристических функционалов $\{\tilde{\nu}^{V\Lambda}_\beta,\Lambda\subset\mathbb{Z}^d,|\Lambda|<\infty\}$ сходится, монотонно возрастая при расширении Λ, к функционалу $k(\varphi)=\lim\limits_{\Lambda\to\mathbb{Z}^d}\tilde{\nu}^{V\Lambda}_\beta(\varphi)=$ $=\sup\limits_{\Lambda\subset\mathbb{Z}^d}\tilde{\nu}^{V\Lambda}_\beta(\varphi)$, $\varphi\in\Phi$, который, очевидно, положительно определен и нормирован. Покажем, что $k(\cdot)$ непрерывен на Φ. Действительно,

$$|k(\varphi)-1| = \lim_{\Lambda\to\mathbb{Z}^d} |\tilde{\nu}_\beta^{V\Lambda}(\varphi)-1| = \lim_{\Lambda\to\mathbb{Z}^d} \left|\int_{\Omega_\beta} (1-\cos\langle\omega,\varphi\rangle)\, d\nu_\beta^{V\Lambda}(\omega(\cdot))\right| =$$

$$= \lim_{\Lambda\to\mathbb{Z}^d} \int_{\Omega_\beta} 2\sin^2\frac{\langle\omega,\varphi\rangle}{2}\, d\nu_\beta^{V\Lambda}(\omega(\cdot)) \leqslant \frac{1}{2}\lim_{\Lambda\to\mathbb{Z}^d}\int_{\Omega_\beta}\langle\omega,\varphi\rangle^2\, d\nu_\beta^{V\Lambda}(\omega(\cdot)) \leqslant \frac{1}{4}\|\varphi\|^2_{\mathbb{W}}$$

благодаря представлению (8) и неравенству 2) следствия. По теореме Минлоса на Φ' определена вероятностная мера ν_β^V: $\tilde{\nu}_\beta^V = k$. Но так как $\tilde{\nu}_\beta^V$ — непрерывный функционал на $\mathbb{W}$, эту меру можно рассматривать как меру на непрерывных траекториях и тем более как меру на Ω_β. Инвариантность мер $\nu_\beta^{V\Lambda}$ относительно поворотов S_β влечет инвариантность их характеристических функционалов $\tilde{\nu}_\beta^{V\Lambda}$, но тогда это свойство выполнено для $\tilde{\nu}_\beta^V$, а следовательно, и для ν_β^V. Свойство положительности Остервальдера—Шрадера выполнено для мер $\nu_\beta^{V\Lambda}$ и сохраняется для ν_β^V благодаря сходимости конечномерных распределений, которая следует из сходимости характеристических функционалов.

1. *Matsubara T.* A new approach to quantum statistical mechanics // Progr. Theor. Phys.— 1955.— **14**.— p. 351—365.
2. *Martin P. C., Schwinger J.* Theory of many-particle system // Phys. Rev.— 1959.— **115**.— P. 1342—1351.
3. *Albeverio S., Hoegh-Krohn R.* Homogeneous random field and statistical mechanics // J. Funct. Anal.— 1975.— **19**.— p. 242—272.
4. *Klein A., Landau L.* Stochastic processes associated with *KMS* states // Ibid.— 1981.— **42**.— P. 368—428.
5. *Глоба С. А., Кондратьев Ю. Г.* Построение гиббсовских состояний квантовых решеточных систем // Применение методов функцион. анализа в задачах мат. физики.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1987.— С. 4—16.
6. *Simon B.* Functional integration and quantum physics.— New York: Acad. press, 1979.— 256 p.
7. Fröhlich J., Park J. M. Correlation inequalities for classical and quantum continuous systems // Communs Math. Phys.— 1978.— **59**, N 3.— P. 235—266

Киев. ун-т

Получено 10.02.88