УДК 517.514

А. О. Гохман

Гладкие симметрические функции

В алгебре хорошо известна теорема Ньютона о том, что всякий симметрический полином от $(x_1, \ldots, x_n) = x$ может быть представлен как полином от элементарных симметрических полиномов $(\sigma_1(x), \ldots, \sigma_n(x)) = \sigma(x)$. Эта теорема была перенесена на функции класса $C^k(\mathbb{R}^n)$ Глезером [1] $(k = \infty)$ и Барбансоном [2] $(k < \infty)$, а именно, было показано, что симметрическая функция $f(x)$ такого класса представима в виде

$$f(x) = \mathcal{F}(\sigma(x)), \tag{1}$$

где $\mathcal{F}(\sigma) \in C^m(\mathbb{R}^n)$, $m = \left[\frac{k}{n}\right]$ (см. также [3]).

Выясняется, что оценка Барбансона, будучи точной, дает лишь довольно грубую картину такого понижения гладкости. В настоящей работе показано на каких множествах и в какой степени понижается гладкость $\mathcal{F}$ относительно f. Так, максимальное понижение гладкости до $\left[\frac{k}{n}\right]$ на множестве $\sigma(\mathbb{R}^n)$ может иметь место лишь в точках одномерного многообразия. Исследована гладкость $\mathcal{F}$ на границе множества $\sigma(\mathbb{R}^n)$. В качестве приложения полученных результатов приведена одна теорема деления.

Обозначим $G_n = \sigma(\mathbb{R}^n)$, $K_n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_n\}$. Из непрерывной зависимости корней полинома от его коэффициентов следует, что σ осуществляет гомеоморфизм K_n на G_n. В силу того, что якобиан J_σ отображения σ равен $\prod\limits_{i<j}(x_i - x_j)$, $\operatorname{Int} K_n$ диффеоморфна $\operatorname{Int} G_n$

Пусть $x(\sigma): G_n \to K_n$ — отображение, обратное σ. Для функции $f(x)$, симметрической на $\mathbb{R}^n$, положим $\mathcal{F}(\sigma) = f(x(\sigma))$. Эта функция будет определена на G_n, и в силу симметрии $f(x)$ (1) имеет место при всех $x \in \mathbb{R}^n$. Через $C^k(\mathbb{R}^n)^{S_n}$ будем обозначать алгебру $C^k(\mathbb{R}^n)$-гладких симметрических (т. е. инвариантных относительно симметрической группы S_n) функций. Будем говорить, что $\mathcal{F}(\sigma) \in C^k(G_n)$, если она принадлежит классу $C^k(\operatorname{Int} G_n)$ и все ее производные до порядка k включительно могут быть доопределены по непрерывности на G_n. В этом случае под производной $\mathcal{F}$ понимается ее продолжение на G_n.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мульти-индекс, обозначим $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Если $f(x) \in C^k(\mathbb{R}^n)^{S_n}$, то для любого α такого, что $|\alpha| \leqslant k$, и любого $\pi \in S_n$

$$D^\alpha f(x) = D^{\pi\alpha} f(\pi x), \tag{2}$$

что не трудно доказать индукцией по $|\alpha|$.

Далее, пусть $\hat{x} = (x_1, \dots, x_p)$, $\hat{\hat{x}} = (x_{p+1}, \dots x_n)$, тогда для симметрической функции $f(x)$ существует такая функция $\Psi(\sigma_1, \dots, \sigma_p, \hat{\hat{x}})$, определенная на $G_p \times \mathbb{R}^{n-p}$, что $f(x) = \Psi(\sigma_1(\hat{x}), \dots, \sigma_p(\hat{x}), \hat{\hat{x}})$. В дальнейшем для простоты будем обозначать $\partial f(x)/\partial\sigma_j(\hat{x}) = \partial\Psi(\sigma_1(\hat{x}), \dots, \sigma_p(\hat{x}), \hat{\hat{x}})/\partial\sigma_j$, $j = 1, \dots, p$, и $f_{\sigma_i}(x) = \partial f(x)/\partial\sigma_i(x)$, $i = 1, \dots, n$. Обозначим также $R(x) = (x_1 - x_2,\ x_1 - x_3, \dots, x_{n-1} - x_n)$, $\omega_m = [0, 1]^m$.

Теорема 1. *Пусть $f(x) \in C^k(\mathbb{R}^n)^{S_n}$, $k \geqslant n$. Для каждого $i = 1, \dots, n$ существует представление*

$$f_{\sigma_i}(x) = \int\limits_{\omega_{n-1}} \sum_{i \leqslant |\alpha| \leqslant n} P_\alpha(x, \tau) D^\alpha f(x + M_\alpha(\tau) R(x))\, d\tau, \tag{3}$$

где P_α и элементы $n \times C_n^2$-матрицы M_α — полиномы.

Доказательство. Пусть $x \in \sigma^{-1}(\operatorname{Int} G_n) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \neq x_j$ при $i \neq j\}$. Обозначим $\Phi_j^{(1)}(x) = \partial f(x)/\partial x_j$, $j = 1, \dots, n$, и

$$\Phi_j^{(p)}(x) = (\Phi_{p-1}^{(p-1)}(x) - \Phi_j^{(p-1)}(x))(x_j - x_{p-1})^{-1}, \quad 2 \leqslant p \leqslant j \leqslant n. \tag{4}$$

Тогда, так как $\Phi_j^{(1)}(x) = \sum\limits_{m=1}^{n} f_{\sigma_m}(x)\sigma_{m-1}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$ (имеется в виду $\sigma_0 = 1$), получаем

$$\Phi_j^{(p)}(x) = \sum_{m=p}^{n} f_{\sigma_m}(x)\sigma_{m-p}(x_p, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n), \quad j = p, \dots, n, \tag{5}$$

в частности, $\Phi_n^{(n)}(x) = f_{\sigma_n}(x)$.

Представим $f(x)$ как $f(\hat{x}, \hat{\hat{x}})$, где $\hat{x} = (x_1, \dots, x_p)$, $\hat{\hat{x}} = (x_{p+1}, \dots, x_n)$. Применив предыдущие рассуждения к f как к функции, симметрической по $\hat{x}$ и зависящей от $\hat{\hat{x}}$ как от параметра, при $1 \leqslant p < n$ получим

$$\Phi_p^{(p)}(x) = \partial f(x_1, \dots, x_n)/\partial\sigma_p(x_1, \dots, x_p). \tag{6}$$

Кроме того, при $p < j \leqslant n$ $\Phi_j^{(p)}(x) = \partial f(x_1, \dots, x_n)/\partial\sigma_p(x_1, \dots, x_{p-1}, x_j)$, поскольку $\Phi_j^{(p)}(x) = \Phi_r^{(p)}(\pi_{rj}x)$, где π_{rj} — элемент S_n, меняющий местами r- и j-ю координаты. Это можно доказать по индукции с учетом (4) и (2). Из (4) по лемме Адамара получаем

$$\Phi_j^{(p)}(x) = \int\limits_0^1 \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_{p-1}}\right)\Phi_{p-1}^{(p-1)}\right](\tau_{p-1}(\pi_{jp-1}x) + (1 - \tau_{p-1})x)\, d\tau_{p-1} \tag{7}$$

при $2 \leqslant p \leqslant j \leqslant n$, откуда следует, что все $\Phi_j^{(p)}(x)$ могут быть представлены в виде

$$\Phi_j^{(p)}(x) = \int\limits_{\omega_{n-1}} \sum_{|\nu| = p} Q_\nu(\tau) D^\nu f(x + M(\tau) R(x))\, d\tau, \tag{8}$$

где Q_ν и элементы матрицы M — полиномы.

При $x \in \sigma^{-1}(\operatorname{Int} G_n)$ $\Phi_n^{(n)}(x) = f_{\sigma_n}(x)$, т. е. на указанном множестве при $i = n$ (3) имеет место. В силу непрерывности правой части в (3) на $\mathbb{R}^n$ и определения производной $f_{\sigma_i}(x)$ равенство справедливо на всем $\mathbb{R}^n$. Далее, рассмотрев систему (5) при $j = n-1, n-2, \dots, 1$, получим искомый результат. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Из представления (3) следует, что если $f(x) \in C^k(\mathbb{R}^n)^{S_n}$, то $\mathcal{F}(\sigma) \in C^m(G_n)$, где $m = \left[\dfrac{k}{n}\right]$. В силу результатов [4] $\mathcal{F}$ может быть продолжена на $\mathbb{R}^n$ с сохранением гладкости.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $f(x) \in C^k(\mathbb{R}^n)^{S_n}$, $k \geqslant n$. *Тогда при* $i = 1, \dots, n$

$$f_{\sigma_i}(x) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-i} \frac{\partial f(x)}{\partial \sigma_m(x_1, \dots, x_m)} \sum_{|\alpha|=m-i} (x_m, \dots, x_n)^{\alpha}. \qquad (9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $i = n$ соотношение (9) очевидно. Пусть (9) имеет место при $i \geqslant p+1$; покажем, что оно справедливо при $i = p$. Из формул (5), (6) и предположений индукции следует

$$f_{\sigma_p}(x) = \Phi_p^{(p)}(x) - \sum_{m=p+1}^{n} \Phi_m^{(m)}(x) \sum_{s=1}^{m-p} (-1)^{m-p-s} \sigma_s(x_{p+1}, \dots, x_n) \times$$

$$\times \sum_{|\alpha|=m-p-s} (x_m, \dots, x_n)^{\alpha}.$$

Покажем, что в полученном разложении множитель при $\Phi_m^{(m)}(x)$ равен

$$-\sum_{s=1}^{n-m-1} \sigma_s(x_{p+1}, \dots, x_n)(-1)^{m-p-s} \sum_{|\alpha|=m-p-s} (x_m, \dots, x_n)^{\alpha} =$$

$$= (-1)^{m-p} \sum_{|\beta|=m-p} (x_m, \dots, x_n). \qquad (10)$$

В левой части (10) получаем совокупность одночленов, часть из которых зависит только от $(x_m, \dots, x_n)$. Сумма таких одночленов имеет вид

$$-\sum_{s=1}^{n-m-1} \sigma_s(x_m, \dots, x_n)(-1)^{m-p-s} \sum_{|\alpha|=m-p-s} (x_m, \dots, x_n)^{\alpha} =$$

$$= (-1)^{m-p} \sum_{|\beta|=m-p} (x_m, \dots, x_n H_0)^{\beta}. \qquad (11)$$

В самом деле, коэффициент при всяком $(x_m, \dots, x_n)^{\beta}$ в левой части (11) равен $(-1)^{m-p}(C_q^1 - C_q^2 + \dots + (-1)^{q-1}C_q^q) = (-1)^{m-p}$, где q есть число положительных координат вектора β. Далее, коэффициент при каждом одночлене $(x_{p+1}, \dots, x_{m-1})^{\gamma}(x_m, \dots, x_n)^{\delta}$ с $\gamma \neq 0$ в левой части (10) равен $(-1)^{m-p-|\gamma|+1}(C_r^0 - C_r^1 + \dots + (-1)^r C_r^r) = 0$, где r — число положительных координат δ. Теорема доказана.

С помощью теоремы 2 можно вывести рекуррентную формулу, позволяющую выразить производную $f(x)$ по симметрическому полиному через производные по симметрическим полиномам меньшей размерности. Пусть $\hat{x} = (x_1, \dots, x_p)$, $\hat{\hat{x}} = (x_{p+1}, \dots, x_n)$, тогда в силу (4) и (9)

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \sigma_i(\hat{x})} = \sum_{m=i}^{p-1} (-1)^{m-i} \frac{\partial f(x)}{\partial \sigma_m(x_1, \dots, x_m)} \sum_{|\alpha|=m-i} (x_m, \dots, x_p)^{\alpha} + (-1)^{p-i} x_p^{p-i} \times$$

$$\times \left(\frac{\partial f(x)}{\partial \sigma_{p-1}(x_1, \dots, x_{p-1})} - \frac{\partial f(x)}{\partial \sigma_{p-1}(x_1, \dots, x_{p-2}, x_p)} \right)(x_p - x_{p-1})^{-} =$$

$$= \sum_{m=i}^{p-1} (-1)^{m-i} \frac{\partial f(x)}{\partial \sigma_m(x_1, \dots, x_m)} \sum_{|\alpha|=m-i} (x_m, \dots, x_p)^{\alpha} +$$

$$+(-1)^{p-i}x_p^{p-i}\int_0^1\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_p}-\frac{\partial}{\partial x_{p-1}}\right)\frac{\partial f}{\partial\sigma_{p-1}(x_1,\ldots,x_{p-1})}\right]$$

$$(s(\pi_{pp-1}x)+(1-s)x)\,ds. \tag{12}$$

В силу того, что $\sigma_1(x_i)=x_i$, а $f_{\sigma_i}(x)=\partial f(x)/\partial\sigma_i(x)$, из формулы (12) получается другое доказательство представления (3).

Теорема 3. *Пусть $f(x)\in C^k(\mathbb{R}^n)^{S_n}$, $y\in\mathbb{R}^n$. В окрестности точки y для всякого $i=1,\ldots,n$ имеет место представление*

$$f_{\sigma_i}(x)=\sum_s\frac{A_s(x)}{B_s(x)}\frac{\partial f(x)}{\partial\sigma_{m_s}(x^{(s)})}, \tag{13}$$

где $A_s(x)$, $B_s(x)$ — полиномы, причем $B_s(y)\neq 0$, а $x^{(s)}$ при всяком s (s изменяется в конечных пределах) — группа координат x_i, обладающая тем свойством, что координаты y с теми же номерами совпадают друг с другом.

Доказательство. Покажем, что в окрестности y имеет место представление

$$\frac{\partial f(x)}{\partial\sigma_i(\hat{x})}=\sum_s\frac{a_s(x)}{b_s(x)}\frac{\partial f(x)}{\partial\sigma_{k_s}(\hat{x}^{(s)})}, \tag{14}$$

где $\hat{x}$ — совокупность p координат x_i, например $\hat{x}=(x_1,\ldots,x_p)$; $a_s(x)$, $b_s(x)$ — полиномы и $b_s(y)\neq 0$; $\hat{x}^{(s)}$ — наборы, составленные из координат $\hat{x}$, так, что при любом s для всех $x_i, x_j\in\hat{x}^{(s)}$ $y_i=y_j$. При $p=n$ (14) совпадает с утверждением теоремы. Докажем (14) индукцией по p. При $p=1$ $\partial f(x)/\partial\sigma_1(x_i)=\partial f(x)/\partial x_i$, т. е. утверждение (14) тривиально. Пусть (14) справедливо при $p=r-1$. В силу (12) имеем

$$\frac{\partial f(x)}{\partial\sigma_i(x_1,\ldots,x_r)}=\sum_{m=i}^{r-1}(-1)^{m-i}\frac{\partial f(x)}{\partial\sigma_m(x_1,\ldots,x_m)}\sum_{|\alpha|=m-i}(x_m,\ldots,x_r)^\alpha+$$
$$+(-1)^{r-i}x_r^{r-i}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial\sigma_{r-1}(x_1,\ldots,x_{r-1})}-\frac{\partial f(x)}{\partial\sigma_{r-1}(x_1,\ldots,x_{r-2},x_r)}\right)(x_r-x_{r-1})^{-1}. \tag{15}$$

Пусть $\hat{x}=(x_1,\ldots,x_r)$. Формула (15) остается верной после замены $\hat{x}\to\pi\hat{x}$ $\forall\pi\in S_r$, причем в силу симметричности $f(x)$ левая часть инвариантна относительно такой замены. Если $\hat{y}\neq(d,\ldots,d)$ (в противном случае (14) есть тривиальное утверждение), то π выберем так, чтобы $(\pi\hat{y})_{r-1}\neq(\pi\hat{y})_r$. Тогда $(\pi\hat{x})_r-(\pi\hat{x})_{r-1}\neq 0$ в окрестности y и в силу предположений индукции для $\partial f(x)/\partial\sigma_i(\hat{x})$ представление (14) установлено В качестве $\hat{x}$ можно было взять любой набор из r координат x_i, поэтому (14) верно при $p=r$, а значит, и при любом p. Теорема доказана.

Пусть $\varkappa(x)$ есть наибольшее число совпадающих координат точки $x\in\mathbb{R}^n$. Обозначим $G_n^{(l)}=\{\sigma\in G_n\colon\varkappa(x(\sigma))\leqslant l\}$, $l=1,\ldots,n$. Легко видеть, что $\operatorname{Int}G_n=G_n^{(1)}\subset G_n^{(2)}\subset\ldots\subset G_n^{(n)}=G_n$, причем $\dim(G_n^{(l+1)}\setminus G_n^{(l)})=n-l$. Через $C^k(G_n^{(l)})$ будем обозначать класс $C^k(\operatorname{Int}G_n)$-функций, чьи производные до порядка k включительно могут быть непрерывно продолжены на $G_n^{(l)}$. Введение таких классов позволяет выяснить, где и как именно происходит понижение гладкости $\mathcal{F}(\sigma)$ по сравнению с $f(x)$:

Теорема 4. *Функция* $f(x) \in C^k(\mathbb{R}^n)^{S_n}$ *представима в виде* (1), *причем*

$$\mathcal{F}(\sigma)|_{G_n^{(l)}} \in C^{m_l}(G_n^{(l)}),$$

где $m_l = \left[\frac{k}{l}\right]$, $l = 1, \dots, n$.

Доказательство. В силу формул (13) и (3) в окрестности точки $y \in \mathbb{R}^n$ имеет место представление

$$f_{\sigma_i}(x) = \sum_r \frac{C_r(x)}{E_r(x)} \int\limits_{\omega_{\varkappa(y)-1}} Q_r(\tau) D^{\mu_r} f(x + M_r(\tau) R(x^{(r)}))\, d\tau,$$

где номер r изменяется в конечных пределах, C_r, E_r, Q_r и элементы матриц M_r — полиномы, $E_r(y) \neq 0$; $x^{(r)}$ — набор координат x_i такой, что при всяком r $y_i = y_j$, если $x_i, x_j \in x^{(r)}$; $R(x^{(r)})$ — вектор, составленный из разностей координат $x^{(r)}$, $|\mu_r| \leqslant \varkappa(y)$. В окрестности y $f_{\sigma_i}(x)$ обладает гладкостью $C^{k-\varkappa(y)}$. В силу того, что $E_r(x + M_q(\tau) R(x^{(q)}))$ не обращается в нуль в окрестности y, производные второго порядка $f_{\sigma_i\sigma_j}(x)$ в указанной окрестности имеют гладкость $C^{k-2\varkappa(y)}$. Аналогичные рассуждения при дальнейшем дифференцировании приводят к доказательству теоремы 4.

Заметим, что введенное определение гладкости на $G_n^{(l)}$ вполне согласуется с гладкостью в обычном смысле: из [4] следует, что всякая точка $\sigma^* \in \partial G_n \cap G_n^{(l)}$ обладает такой окрестностью $U(\sigma^*)$ в $\mathbb{R}^n$, что $\mathcal{F}$ может быть продолжена до C^{m_l}-гладкой на $U(\sigma^*)$ функции.

Рассмотрим степенные (ньютоновские) суммы $s(x) = (s_1(x), \dots, s_n(x))$, где $s_p(x) = x_1^p + \dots + x_n^p$. По формулам Варинга любой из полиномов $s_1, \dots, s_p$ представим как полином от $\sigma_1, \dots, \sigma_p$, $p = 1, \dots, n$, и наоборот, поэтому $\mathcal{F}(\sigma(x)) = \Psi(s(x))$, где Ψ и $\mathcal{F}$ имеют одинаковую гладкость.

Изучим гладкость $\mathcal{F}(\sigma)$ на границе ∂G_n. Рассмотрим множества $D_n^{(l)} = \{\sigma \in G_n : \varkappa(x(\sigma)) > l\}$, $l = 1, \dots, n-1$. Ясно, что $D_n^{(1)} = \partial G_n \supset D_n^{(2)} \supset \dots \supset D_n^{(n-1)}$, $D_n^{(l)} = G_n \setminus G_n^{(l)}$, $\dim D_n^{(l)} = n - l$. Множество $D_n^{(l)}$ состоит из замыкания в $\mathbb{R}^n$ σ-образов $n-l$ конусов $T_i = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 > \dots > x_i = \dots = x_{i+l} > \dots > x_n\}$. Пусть $\Theta_n^{(l)} = \{s \in s(\mathbb{R}^n) : \varkappa(x_s(s)) > l\}$, где $x_s : s(\mathbb{R}^n) \to K_n$ — отображение, обратное s. В силу формул Варинга $D_n^{(l)}$ и $\Theta_n^{(l)}$ связаны диффеоморфизмом.

Отображение s с T_1, например, задается координатами $s_p(x) = (l+1)x_1^p + x_{l+2}^p + \dots + x_n^p$. Якобиан отображения $(x_1, x_{l+2}, \dots, x_n) \to (s_1, \dots, s_{n-l})$ не равен нулю на $\operatorname{Int} K_{n-l} = \{(x_1, x_{l+2}, \dots, x_n) : x_1 > x_{l+2} > \dots > x_n\}$, поэтому проекция $(s_1, \dots, s_n) \to (s_1, \dots, s_{n-l})$ с множества $s(T_1)$ является локальным гомеоморфизмом. Это значит, что $s(T_1)$ (так же как и $s(T_i)$, $\bigcup_i s(T_i)$) есть C^∞-многообразие размерности $n-l$ с координатами $(s_1, \dots, s_{n-l})$. В силу формул Варинга $\sigma(T_i)$ и $\bigcup_i \sigma(T_i)$ также суть C^∞-многообразия размерности $n-l$ с координатами $(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-l})$.

Пусть $\mathcal{F}(\sigma)$ — функция, сужение которой на многообразие $\bigcup_i \sigma(T_i)$ обладает на нем некоторой гладкостью. Гладкость $\mathcal{F}(\sigma)$ на $D_n^{(l)}$ будет пониматься в том смысле, что все производные ее как функции на многообразии могут быть продолжены до функций, непрерывных на всем $\overline{\bigcup_i \sigma(T_i)} = D_n^{(l)}$. Заметим, что равносильны утверждения о C^p-гладкости $\mathcal{F}$ на $D_n^{(l)}$ и C^p-гладкости Ψ на $\Theta_n^{(l)}$, где $f(x) = \mathcal{F}(\sigma(x)) = \Psi(s(x))$.

Теорема 5. *Пусть* $f(x)\in C^k(\mathbb{R}^n)^{S_n}$. *Тогда* $\mathcal{F}(\sigma)|_{D_n^{(l)}}\in C^{p_l}(D_n^{(l)})$, *где* $p_l=\left[\frac{k}{n-l}\right]$, $l=1,\dots,n-1$.

Доказательство. Докажем, что $\Psi(s)|_{\Theta_n^{(l)}}\in C^{p_l}(\Theta_n^{(l)})$. Обозначим $\tilde{x}=(x_1,\dots,x_1,x_{l+2},\dots,x_n)$, $\hat{x}=(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_{n-l})=(x_1,x_{l+2},\dots,x_n)$, $\hat{s}=(s_1,\dots$ $\dots,s_{n-l})$. Функция $\Psi(s)\in C^k(s(T_1))$, поскольку якобиан отображения $\hat{x}\to\hat{s}$ не равен нулю на $\operatorname{Int}K_{n-l}$. В окрестности $V(\tilde{x}^*)\subset T_1$ любой точки $\tilde{x}^*\in T_1$ имеет место соотношение $\Psi(s(\tilde{x}))=f(\tilde{x})=\tilde{\Psi}(\hat{s}(\tilde{x}))$, где $\tilde{\Psi}-C^k$-гладкая на $\hat{s}(V(\tilde{x}^*))$ — открытом множестве из $\mathbb{R}^{n-l}$ — функция. Ясно, что $\Psi(s)\in$ $\in C^k\left(\bigcup_i s(T_i)\right)$. Функции $\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial s_m}(\hat{s}(x_s(s)))$, $m=1,\dots,n-l$, однозначно определены в любой точке $s\in\bigcup_i s(T_i)$. Покажем, что эти функции могут быть непрерывно продолжены на все $\Theta_n^{(l)}=\overline{\bigcup_i s(T_i)}$.

В дальнейшем будем понимать $\frac{\partial f(y)}{\partial x_i}$ как $\left.\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right|_{x=y}$. Обозначим $\tilde{f}(\hat{x})=$ $=f(\tilde{x})$, $\tilde{s}(\hat{x})=\hat{s}(\tilde{x})$, $\tilde{s}(\hat{x})=(\tilde{s}_1(\hat{x}),\dots,\tilde{s}_{n-l}(\hat{x}))$, $f_{\tilde{s}_m}(\tilde{x})=\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\tilde{s}_m}(\tilde{s}(\hat{x}))$.

Продифференцируем по $\hat{x}_1=x_1$ равенство $\tilde{f}(\hat{x})=\tilde{\Psi}(\tilde{s}(\hat{x}))$, справедливое в окрестности любой точки из $\operatorname{Int}K_{n-l}$. В силу симметричности $f(x)$ и соотношения (2) получаем

$$\frac{\partial\tilde{f}(\hat{x})}{\partial\hat{x}_1}=\sum_{i=1}^{l+1}\frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i}=(l+1)\frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_1}=(l+1)\sum_{m=1}^{n-l}mx_1^{m-1}f_{\tilde{s}_m}(\tilde{x}).$$

Дифференцируя по остальным координатам $\hat{x}$, приходим к системе, справедливой при всех $\tilde{x}\in T_1$:

$$\frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i}=\sum_{m=1}^{n-l}mx_i^{m-1}f_{\tilde{s}_m}(\tilde{x}),\quad i=1,\quad l+2,\dots,n. \tag{16}$$

Будем рассматривать x как $x=(\hat{x},\hat{\hat{x}})$. Обозначим при $\hat{x}_i\neq x_d$, $i\neq a$ $\tilde{\Phi}_j^{(1)}(\tilde{x})=\left.\frac{\partial f(x)}{\partial\hat{x}_j}\right|_{x=\tilde{x}}$, $j=1,\dots,n-l$; $\tilde{\Phi}_j^{(p)}(\tilde{x})=(\tilde{\Phi}_{p-1}^{(p-1)}(\tilde{x})-\tilde{\Phi}_j^{(p-1)}(\tilde{x}))(\hat{x}_j-$ $-\hat{x}_{p-1})^{-1}$, $2\leqslant p\leqslant j\leqslant n$. По аналогии с доказательством теоремы 1 получаем, что $f_{\tilde{s}_m}(\tilde{x})$ могут быть выражены через $\tilde{\Phi}_j^{(p)}(\tilde{x})$ и в силу (8) доопределены на $\overline{T}_1$ так, что

$$f_{\tilde{s}_m}(\tilde{x})=\int_{\omega_{n-l-1}}\sum_{m\leqslant|\nu|\leqslant n-l}P_\nu(\tilde{x},\tau)\,D^\nu f(\tilde{x}+M_\nu(\tau)\,R(\tilde{x}))\,d\tau, \tag{17}$$

где P_ν и элементы матриц M_ν — полиномы. В силу того, что $s(\mathbb{R}^n)$ и K_n связаны гомеоморфизмом, $\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\tilde{s}_m}(\hat{s}(x_s(s)))$ может быть непрерывно продолжена на $s(T_1)$.

Аналогично Ψ рассматривается и на $s(T_j)$, $j > 1$. Например, при $\approx{x} = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_j, x_{j+l+1}, \dots, x_n)$ в окрестности любой точки из T_j $\Psi(s(\approx{x})) = f(\approx{x}) = \approx{\Psi}(\hat{s}(\approx{x}))$, где $\approx{\Psi}$ — C^k-гладкая функция. Обозначим $\bar{x} = (x_1, \dots, x_j, x_{j+l+1}, \dots, x_n)$, $\tilde{s}(\bar{x}) = (\tilde{s}_1(\bar{x}), \dots, \tilde{s}_{n-l}(\bar{x})) = \hat{s}(\approx{x})$, $f_{\tilde{s}_m}(\approx{x}) = \frac{\partial \approx{\Psi}}{\partial \tilde{s}_m}(\tilde{s}(\bar{x}))$. Получим систему $\frac{\partial f(\approx{x})}{\partial x_i} = \sum_{m=1}^{n-l} m x_i^{m-1} f_{\tilde{s}_m}(\approx{x})$, $i = 1, \dots, j, j + l + 1, \dots, n$. Пусть $\pi\approx{x} = (x_j, \dots, x_j, x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+l+1}, \dots, x_n)$. С помощью (2) из предыдущей системы получаем

$$\frac{\partial f(\pi\approx{x})}{\partial x_i} = \sum_{m=1}^{n-l} m(\pi\approx{x})_i^{m-1} f_{\tilde{s}_m}(\pi\approx{x}), \quad i = 1, \quad l + 2, \dots, n. \tag{18}$$

Система (18) имеет решение, получаемое из решения системы (16) заменой $\tilde{x} \to \pi\approx{x}$. Так как $f_{\tilde{s}_m}(\approx{x})$ симметрична по своим n переменным, решения (16) и (18) будут совпадать при $\tilde{x} = \approx{x}$, т. е. на $\overline{T}_1 \cap \overline{T}_j$. Это же справедливо для всех T_i и T_j $(s(T_i)$ и $s(T_j))$. В силу этого интегральное представление (17) справедливо для всех $x \in x_s(\Theta_n^{(l)}) = \overline{\bigcup_i T_i}$ и является сужением на это многообразие функции класса $C^{k-n+l}(\mathbb{R}^n)$, которую обозначим $\varphi(x)$. К симметрической функции $\frac{1}{n!}\sum_{\pi \in S_n} \varphi(\pi x)$, совпадающей с φ на $x_s(\Theta_n^{(l)})$, снова применимы все предыдущие рассуждения. Через p_l шагов приходим к искомым оценкам гладкости. Теорема доказана. Таким образом, как видно из теорем 4 и 5, сужение $\mathcal{F}$ на границу имеет наивысшую гладкость как раз на тех участках, где гладкость $\mathcal{F}$ относительно f падает сильнее всего.

В качестве приложения полученных результатов приведем одну теорему деления. Теорема деления Мальгранжа — Мэзера была перенесена Лассалем [5] на функции конечной гладкости. Пусть U — открытое множество из $\mathbb{R}^p$, $P(t, \lambda) = t^n + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i t^{n-i}$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Лассаль доказал, что функция $f(t, y) \in C^k(\mathbb{R} \times U)$ представима в виде

$$f(t, y) = P(t, \lambda)\, q(t, \lambda, y) + \sum_{i=1}^{n} h_i(\lambda, y)\, t^{n-i}, \tag{19}$$

где $q \in C^m(\mathbb{R}^{n+1} \times U)$, $m = \left[\frac{k}{n}\right] - 1$, $h_i \in C^r(\mathbb{R}^n \times U)$, $r = \left[\frac{k+1}{n}\right] - 1$, $i = 1, \dots, n$, причем оператор $f \to (q, h_1, \dots, h_n)$ линеен и непрерывен в топологии соответствующих пространств.

Решение задачи деления не единственно, но все $(q, h_1, \dots, h_n)$, найденные по f, совпадают при $\lambda \in G_n$. Более того, при $(t, \lambda, y) \in \mathbb{R} \times G_n \times U$ можно дать оценки гладкости частного q и коэффициентов остатка h_i, уточняющие оценки, приведенные выше. Одна такая теорема была доказана автором [6], однако с помощью результатов настоящей работы (теорем 1 и 3) можно усилить оценки, полученные в [6]. Приведем этот факт без доказательства.

Теорема 6. *Пусть* $f(t, y) \in C^k(\mathbb{R} \times U)$. *Тогда в соотношении* (19) *справедливы следующие оценки гладкости:*

$$q(t, \lambda, y)\big|_{\mathbb{R} \times G_n^{(l)} \times U} \in C^{\mu_l}(\mathbb{R} \times G_n^{(l)} \times U),$$

где $\mu_l = \left[\dfrac{k}{l}\right] - 1,\ l = 1, \ldots, n,$

$$h_i(\lambda, y)\big|_{G_n^{(l)} \times U} \in C^{\rho_l}(G_n^{(l)} \times U),$$

где $\rho_l = \left[\dfrac{k+1}{l}\right] - 1,\ i, l = 1, \ldots, n.$

1. *Glaeser G.* Fonctions composéès différentiables // Ann. Math.— 1963.— **77**, P. 193—209.
2. *Barbançon G.* Théorème de Newton pour les fonctions de classe C^r // Ann. Scie. Éc. norm. super.— 1972.— **5**, ser. 4e.— P. 435—458.
3. *Ball J. M.* Differentiability properties of symmetric and isotropic functions // Duke Math. J.— 1984.— **51**, N 3.— P. 699—728.
4. *Арнольд В. И.* Гиперболические многочлены и отображения Вандермонда // Функцион. анализ и его прил.— 1986.— **20**, вып. 2.— С. 52—53.
5. *Lassalle G.* Une démonstration du théorème de division pour les fonctions différentiables // Topology.— 1973.— **12**.— P. 41—62.
6. *Гохман А. О.* О теореме деления для дифференцируемых функций // Успехи мат. наук.— 1986.— **41**, вып. 2.— С. 191—192.

Воронеж. лесотехн. ин-т

Получено 17.09.86