УДК 517.986.64

Я. Ю. Гайдис

Рациональные кривые на грассманиане $G_{4,2}$

Настоящая работа посвящена исследованию рациональных кривых на грассманиане $G_{4,2}$. Напомним, что рациональной кривой называется кривая, изоморфная проективной прямой. Все рассмотрения ведутся над полем $\mathbf{C}$. Исследуем рациональные кривые на $G_{4,2}$, которые, с одной стороны, отвечают семействам образующих гиперболоидов в $\mathbf{CP}^3$, а с другой — являются сечениями многообразия $G_{4,2}$, реализованного в виде квадрики Плюкера — Клейна в $\mathbf{CP}^5$, двумерными плоскостями, не являющимися касательными к квадрике.

Интерес к многообразию $G_{4,2}$ связан с тем, что в рамках твисторной концепции Пенроуза $G_{4,2}$ интерпретируется как комплексифицированное компактифицированное пространство Минковского [1—5]. Как показано в [4], геометрия рациональных кривых тесно связана с задачами математической физики.

1. Напомним [5], что $G_{4,2}$ — четырехмерное многообразие прямых в $\mathbf{CP}^3$, или, что эквивалентно, многообразие двумерных подпространств в $\mathbf{C}^4$. Пусть $(z_0 : z_1 : z_2 : z_3)$ — однородные координаты в $\mathbf{CP}^3$. Будем определять прямые парой различных точек $z = (z_0 : z_1 : z_2 : z_3)$ и $\tilde{z} = (\tilde{z}_0 : \tilde{z}_1 : \tilde{z}_2 : \tilde{z}_3)$, т. е. z и $\tilde{z}$ не пропорциональны. Рассмотрим плюкеровы координаты $p_{ij} = z_i\tilde{z}_j - z_j\tilde{z}_i$. Они удовлетворяют уравнению

$$p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0, \tag{1}$$

причем пропорциональные наборы p, $\tilde{p}$ отвечают одной прямой. Тем самым множество прямых $G_{4,2}$ в $\mathbf{CP}^3$ вложено в пространство $\mathbf{CP}^5$ как невырожденная гиперповерхность второго порядка Q (квадрика Плюкера — Клейна).

2. Проективные преобразования в $\mathbf{CP}^3$, которые в однородных координатах z записываются в виде $z \mapsto g(z)$, где g — элемент $SL(4, \mathbf{C})$, индуцируют в плюкеровых координатах линейные преобразования $p \mapsto \tilde{g}(p)$. Поскольку $\tilde{g}(p)$ сохраняет условие (1) (квадрику Q), возникает локальный изоморфизм группы $SL(4, \mathbf{C})$ и группы $SO(6, \mathbf{C})$ проективных преобразований пространства $\mathbf{CP}^5$, сохраняющих квадрику Q.

Рассмотрим в пространстве $\mathbf{CP}^3$ гиперболоид

$$z_0z_3 - z_1z_2 = 0 \tag{2}$$

и подгруппу $SO(4, \mathbf{C})$ проективных преобразований $\mathbf{CP}^3$, сохраняющих этот гиперболоид. Исследуем более подробно структуру этой группы. На поверхности гиперболоида (2) лежит два семейства прямолинейных образующих

$$\{\tau_0z_0 + \tau_1z_1 = 0; \qquad \tau_0z_2 + \tau_1z_3 = 0\} \tag{3}$$

и

$$\{\lambda_0z_0 + \lambda_1z_2 = 0; \qquad \lambda_0z_1 + \lambda_1z_3 = 0\}. \tag{4}$$

Как видно, каждое из этих семейств параметризуется точками проективной прямой $\mathbf{CP}^1$. Выделим в $SO(4, \mathbf{C})$ подгруппу $SO_l(4, \mathbf{C})$ преобразований, которые сохраняют каждое из этих семейств. Группа $SO(4, \mathbf{C})$ порождается $SO_l(4, \mathbf{C})$ и, например, инволюцией $\sigma: z_0 \mapsto z_0,\ z_1 \mapsto z_1,\ z_2 \mapsto z_3,\ z_3 \mapsto z_2$. Ясно, что σ переставляет семейства образующих. Имеет место изоморфизм $SO_l(4, \mathbf{C}) = SL(2, \mathbf{C}) \times SL(2,\mathbf{C})/\{\pm E\}$. Для того чтобы усмотреть этот изоморфизм, запишем координаты z в виде матрицы

$$z = \begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда квадратичную форму $\det z$ будут сохранять преобразования

$$z \mapsto UzV, \tag{5}$$

где U и V — элементы $SL(2, \mathbf{C})$. При левых умножениях каждая образующая семейства (3) переходит в себя и на каждой из них проводятся согласованные проективные преобразования так, что образующие второго семейства (4) переходят одна в другую, причем происходит замена проективного параметра $\lambda_0 : \lambda_1$. При правых умножениях происходит то же преобразование с тем лишь отличием, что семейства образующих меняются местами.

3. Группа проективных преобразований пространства $\mathbf{CP}^3$ транзитивно действует на множестве всех гиперболоидов G; G является однородным пространством $SL(4,\mathbf{C})/SO(4, \mathbf{C})$. На любую тройку непересекающихся прямых в $\mathbf{CP}^3$ можно единственным образом натянуть гиперболоид.

Предложение. *Пусть имеются три непересекающиеся прямые* $h_1, h_2\ h_3$ *и на прямой* h_1 *три отмеченные точки* M_1, M_2, M_3. *Пусть имеется другая аналогичная система* $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3$ *и* $\tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \tilde{M}_3 \in \tilde{h}_1$. *Тогда существует, и единственно, преобразование пространства* $\mathbf{CP}^3$, *при котором* $h_i \mapsto \tilde{h}_i$, $M_j \mapsto \tilde{M}_j$.

Доказательство. В самом деле, натянем на прямые h_j гиперболоид H, а на прямые $\tilde{h}_j$ — гиперболоид $\tilde{H}$. Рассмотрим какое-нибудь преобразование g, которое переводит H в $\tilde{H}$. Сделав, в случае необходимости, инволюцию σ, сохраняющую $\tilde{H}$, всегда можно добиться, чтобы образы прямых h_j принадлежали тому же семейству, что и $\tilde{h}_j$. Тогда, действуя элементами группы $SO_l(4, \mathbf{C})$ на соответствующем семействе образующих, отвечающих действию одного экземпляра группы $SL(2, \mathbf{C})$, можно добиться, чтобы $h_j \mapsto \tilde{h}_j$. Теперь, действуя преобразованиями группы $SL(2, \mathbf{C})$, сохраняющими образующие этого семейства, можно добиться, чтобы $M_i \mapsto \tilde{M}_i$.

4. Для каждой прямой $p \in \mathbf{CP}^3$ обозначим через V_p множество прямых p', пересекающих p. На $G_{4,2}$ возникает коническое трехмерное подмногообразие с вершиной в точке p. В плюкеровых координатах V_p задается условием

$$\rho(p, p') = p_{01}p'_{23} - p_{02}p'_{13} + p_{03}p'_{12} + p_{23}p'_{01} - p_{13}p'_{02} + p_{12}p'_{03} = 0. \tag{6}$$

На квадрике $Q \subset \mathbf{CP}^5$ подмногообразие V_p совпадает с пересечением Q и касательной плоскости к Q в точке p. Это невырожденный квадратичный конус. Часто бывает удобно вести рассмотрения не в плюкеровых координатах, а в локальных.

Рассмотрим в $\mathbf{CP}^3$ прямые вида

$$\{z_0 = a_1 z_2 + b_1 z_3; \qquad z_1 = a_2 z_2 + b_2 z_3\}. \tag{7}$$

Это почти все прямые в $\mathbf{CP}^3$. Сюда не входят лишь те прямые, которые пересекают прямую $\{z_2 = z_3 = 0\}$. На множестве прямых вида (7) примем (a_1, b_1, a_2, b_2) в качестве локальных координат. Получим аффинную карту Q_0, замыкание которой совпадает с $G_{4,2}$. Заметим, что карта Q_0 имеет вид $G_{4,2} \setminus V_p$, где p — прямая $\{z_2 = z_3 = 0\}$. Эта карта, согласно Пенроузу, совпадает с комплексификацией пространства Минковского [1]. Если p

имеет локальные координаты (a_1, b_1, a_2, b_2), а p' — (a_1', b_1', a_2', b_2'), то V_p задается уравнением

$$(a_1 - a_1')(b_2 - b_2') - (a_2 - a_2')(b_1 - b_1') = 0. \tag{8}$$

В силу сказанного выше на конусе V_p лежат два однопараметрических семейства двумерных плоскостей (по терминологии Пенроуза α- и β-плоскости). Запишем уравнения этих семейств, для простоты, при $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$. Имеем

$$\{\tau_0 a_1' + \tau_1 b_1' = 0; \qquad \tau_0 a_2' + \tau_1 b_2' = 0\}. \tag{9}$$

Плоскости этого семейства отвечают прямые в $\mathbf{CP}^3$, которые проходят через точку $(z_0 = z_1 = 0,\ z_2 = \tau_0,\ z_3 = \tau_1)$, лежащую на прямой p. Точкам плоскости второго семейства

$$\{\tau_0 a_1' + \tau_1 a_2' = 0; \qquad \tau_0 b_1' + \tau_1 b_2' = 0\} \tag{10}$$

отвечают прямые в $\mathbf{CP}^3$, которые лежат в одной плоскости $\{\tau_0 z_0 + \tau_1 z_1 = 0\}$. В результате на квадрике Q мы выделили два трехпараметрических семейства двумерных плоскостей. Плоскости первого семейства отвечают точкам в $\mathbf{CP}^3$ и состоят из прямых, проходящих через эти точки, а плоскости второго семейства отвечают плоскостям в $\mathbf{CP}^3$ и состоят из прямых, лежащих в этих плоскостях. Других двумерных плоскостей, лежащих на Q, нет.

5. Теорема. *Следующие условия на кривую γ, лежащую в $G_{4,2}$, эквивалентны*: 1) *точки кривой отвечают образующим одного семейства на некотором гиперболоиде в* $\mathbf{CP}^3$; 2) *при реализации $G_{4,2}$ в виде квадрики Q γ совпадает с некоторой невырожденной кривой второго порядка, лежащей на Q*; 3) *при реализации $G_{4,2}$ в виде Q γ совпадает с сечением Q двумерной некасательной плоскостью.*

Доказательство. Как отмечалось, на квадрике Q лежит два трехпараметрических семейства двумерных плоскостей (α- и β-плоскости), отвечающие точкам и плоскостям исходного пространства. Покажем, что каждая прямая, лежащая на поверхности Q, является пересечением одной α-плоскости с одной β-плоскостью. Действительно, пусть p и p' — две различные точки на квадрике Q такие, что проходящая через них прямая целиком принадлежит квадрике Q. В обозначении (6) это означает, что $\rho(\lambda p + \mu p', \lambda_1 p + \mu_1 p') \equiv 0$ при всех $\lambda, \mu, \lambda_1, \mu_1$, а поскольку $\rho(p, p) = \rho(p', p') = 0$, то это означает, что $\rho(p, p') = 0$. Другими словами, прямые p и p' в $\mathbf{CP}^3$ должны пересекаться, а значит, и лежать в одной двумерной плоскости. В этом случае на поверхности Q в самом деле лежит прямая, проходящая через точки p, p' и отвечающая прямым в $\mathbf{CP}^3$, которые лежат в одной плоскости с p, p' и проходят через их точку пересечения. Отсюда легко вывести, что единственные двумерные плоскости, которые лежат на поверхности Q, это α- и β-плоскости.

Если некоторая двумерная плоскость касается квадрики Q в некоторой точке p, то она лежит в касательной гиперплоскости к Q в точке p, а значит, должна пересекаться с конической поверхностью V_p и будет содержать некоторую прямую, целиком лежащую на поверхности Q. Более точно, в общем положении она будет пересекать конус V_p по паре различных прямых, а в случае, когда она будет касаться V_p, — по одной прямой или целиком лежать в V_p (т. е. будет α- или β-плоскостью).

Покажем, что и обратно, если двумерная плоскость проходит через прямую h, лежащую на Q, то она касается Q в некоторой точке $p \in h$. Поскольку группа проективных преобразований пространства $\mathbf{CP}^3$ транзитивно действует на множестве флагов «точка и проходящая через нее плоскость», то группа $SO(6, \mathbf{C})$, сохраняющая квадрику Q, будет транзитивно действовать на множестве прямых, лежащих на Q. Поэтому можно ограничиться конкретной прямой, например, $h = \{p : p_{01} = p_{02} = p_{03} = p_{12} = 0\}$. Нам достаточно показать, что объединение касательных гиперплоскостей к Q в точках $p \in h$ совпадает со всем пространством $\mathbf{CP}^5$. Уравнение касательной гиперплоскости в точке $p' \in Q$ записывается в виде $\rho(p, p') = 0$. В частности, если $p' \in h$, то это уравнение принимает вид $\{p'_{23}p_{01} - p'_{13}p_{02} = 0\}$. Очевидно, что для любой точки $p \in \mathbf{CP}^5$ найдется такая точка $p' \in h$, что касательная плоскость $T_{p'}Q$ содержит точку p.

Всякая кривая второго порядка, лежащая на Q, разумеется, должна получаться при пересечении Q с некоторой двумерной плоскостью. Поскольку вырождение кривой эквивалентно тому, что пересечение содержит прямую, невырожденные кривые получаются тогда и только тогда, когда секущая плоскость некасательна, т. е. условия 2 и 3 эквивалентны.

Рассмотрим в $\mathbf{CP}^3$ гиперболоид (2) и семейства образующих (3), (4). Семейству (3) отвечает на Q невырожденная кривая второго порядка $\{p_{01} = p_{23} = 0;\ p_{03} = p_{12} = \tau_0\tau_1;\ p_{02} = \tau_0^2;\ p_{13} = \tau_1^2\}$, которая получается при пересечении Q с двумерной плоскостью $\{p_{01} = p_{23} = 0;\ p_{03} - p_{12} = 0\}$. Второе семейство образующих приводит к аналогичной кривой. Поскольку любой другой гиперболоид получается из рассмотренного проективным преобразованием, то из условия 1 следует условие 2.

Пусть теперь γ — невырожденная кривая второго порядка на поверхности Q. Она получается при пересечении Q с некоторой двумерной плоскостью P. В частности, такая кривая целиком определяется тремя любыми своими точками p_1, p_2, p_3, причем $\rho(p_i, p_j) \neq 0$ (иначе P содержала бы прямую, целиком лежащую на Q). Как отмечалось, в $\mathbf{CP}^3$ существует проективное преобразование (не единственное), которое переводит одну тройку попарно непересекающихся прямых в аналогичную такую тройку. Переведя прямые p_1, p_2, p_3 в прямые $\{z_0 = z_2 = 0\}$, $\{z_1 = z_3 = 0\}$, $\{z_0 + z_1 = 0;\ z_2 + z_3 = 0\}$, переведем кривую γ в кривую $\{p_{01} = p_{23} = 0;\ p_{03} = p_{12} = \tau_0\tau_1;\ p_{02} = \tau_0^2;\ p_{13} = \tau_1^2\}$, задающую образующие гиперболоида $\{z_0z_3 - z_1z_2 = 0\}$. Значит, и кривая γ состоит из образующих некоторого гиперболоида. Доказательство окончено.

6. В процессе доказательства мы показали, что группа $SO(6, \mathbf{C})$ будет транзитивно действовать на множестве невырожденных кривых второго порядка, лежащих на Q, или, что эквивалентно, на множестве двумерных плоскостей в $\mathbf{CP}^5$, не касающихся Q.

Другими словами, рассмотрим грассманово многообразие $G_{6.3}$ двумерных плоскостей в $\mathbf{CP}^5$ (трехмерных подпространств в $\mathbf{C}^6$). На $G_{6.3}$ рассмотрим индуцированные действия группы $SO(6, \mathbf{C})$. Относительно этого действия имеется открытая орбита Ω плоскостей, не касательных к квадрике Q. Как мы видели, Ω совпадает с множеством невырожденных кривых второго порядка, лежащих на Q. Это однородное пространство $SO(6, \mathbf{C})/SO_l(4, \mathbf{C})$. Имеется естественное отображение $\Omega \mapsto G = SL(4, \mathbf{C})/SO(4, \mathbf{C})$ гиперболоидов, лежащих в $\mathbf{CP}^3$. При этом прообраз каждой точки на G состоит из двух точек на Ω: гиперболоиду в $\mathbf{CP}^3$ отвечают две кривые на Q, соответствующие двум семействам образующих. Это выражается также в том, что в одном случае факторизация проводится по $SO(4, \mathbf{C})$, а в другом случае — по $SO_l(4, \mathbf{C})$. В результате на Ω возникает инволюция без неподвижных точек.

Естественно исследовать другие орбиты группы $SO(6, \mathbf{C})$ на $G_{6.3}$. Множество плоскостей, касательных к Q, не является транзитивным. На нем имеется восьмипараметрическая орбита таких плоскостей, которые в сечении с Q дают пару различных прямых, затем шестипараметрическая орбита плоскостей, пересекающихся с Q по одной прямой, и, наконец, две трехпараметрические орбиты плоскостей, целиком лежащих на Q (α- и β-плоскости).

1. *Penrose R.* The twistor program // Repts Math. Phys.— 1977.— **12**.— P. 65—76.
2. *Гиндикин С. Г., Хенкин Г. М.* Комплексная интегральная геометрия и преобразование Пенроуза // Современные проблемы математики. М. : ВИНИТИ АН СССР, 1981.— **17**.— С. 57—111.
3. *Гиндикин С. Г.* Пучки дифференциальных форм и уравнение Эйнштейна // Ядер. физика.— 1982.— **36**, № 28.— С. 537—548.
4. *Гиндикин С. Г.* Редукции многообразий рациональных кривых и связанные задачи теории дифференциальных уравнений // Функцион. анализ и его прил.— 1984.— **18**, вып. 4.— С. 14—39.

5. *Гайдис Я. Ю., Гиндикин С. Г.* Об одном алгебраическом конусе в $\mathbb{C}^6$, связанном с рациональными кривыми // Многомерный комплексный анализ.— Красноярск, 1985.— С. 36—49.
6. *Ходж В., Пидо Д.* Методы алгебраической геометрии: В 2-х т.— М. : Изд-во иностр. лит., 1954.— Т. 2.— 432 с.

Львов. политехн. ин-т

Получено 12.05.87