УДК 517.5

Азми К. Аль-Мади

Обобщение тригонометрических методов суммирования Рогозинского — Бернштейна

1. Ряд $a_0 + a_1 + \ldots$ вещественных или комплексных чисел с частичными суммами $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ называется суммируемым к t методом Рогозинского — Бернштейна $(B_{h,r})$ порядков h, r, если при $n \to \infty$ $t_n \to t$, где

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos \frac{(k+r)\pi}{2(n+h)}. \tag{1}$$

При $r = 0$ этот метод сводится к методу (B_h), который рассматривался в работах [1—8].

Ряд суммируем к t^* методом $(C, 1)$, если $M \to t^*$, где

$$M_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k. \tag{2}$$

Для двух методов суммирования A и B будем обозначать $A \Rightarrow B$, если любая суммируемая последовательность A является суммируемой B к той же сумме. A и B эквивалентны, если $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$. Метод суммирования A сильнее метода B означает, что каждый ряд, суммируемый B, суммируем A к той же сумме, но некоторые ряды, не суммируемые B, суммируемы A.

Тот факт, что $(C, 1) \Rightarrow (B_{h,0})$, известен; см. [1 — 4, 7, 8]. Агню [1] показал, что если $h \in (0, 1/2]$, $(B_{h,0})$ сильнее, чем $(C, 1)$, и если $h \in (1/2, 1]$, $(B_{h,0})$ и $(C, 1)$ эквивалентны. Петерсен [6] показал, что если $h < 0$, $(B_{h,0})$ сильнее, чем $(C, 1)$.

Цель настоящей статьи — получить более общие результаты, чем упомянутые выше.

2. Сформулируем три основных результата, которые будут доказаны в п. 3. Дальнейшие результаты для $(B_{h,r})$, $(C, 1)$, в частности, для случая $h \neq r$ и соответствующие методы суммирования последовательностей, которые по существу обобщают результаты Агню, приведены в п. 6.

Основные результаты настоящей работы следующие.

Теорема 1. *Для любых h и r $(C, 1) \Rightarrow (B_{h,r})$.*

Теорема 2. *Если $h - r \leqslant 1/2$, $h \neq r$, то $(B_{h,r})$ сильнее, чем $(C, 1)$.*

Теорема 3. *Если $h - r \in (1/2, 1)$ то $(B_{h,r})$ и $(C, 1)$ эквивалентны.*

Замечание 1. Результаты, полученные Агню [1] (Теорема 2.9) и Петерсеном [6], являются частными случаями теоремы 2, результат Агню [1] (теорема 6.1) — частный случай теоремы 3.

3. Приведем известные результаты, необходимые в дальнейшем.

Теорема 4. (Теплиц [9])*. *Пусть $G = (g_{n,k})$ — преобразование на пространстве последовательностей; G регулярно тогда и только тогда, когда*

$$g_{n,k} \to 0, \quad n \to \infty \text{ для любого } k, \tag{3}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k} \to 1, \quad n \to \infty \tag{4}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g_{n,k}| = O(1). \tag{5}$$

*См. также Харди [10] (теорема 2).

Т е о р е м а 5. (А г н ю [1] (т е о р е м а 5.2)). *Если*

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} S_k \qquad (6)$$

регулярно и

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \Big[|a_{n,n}| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_{n,k}| \Big] > 0, \qquad (7)$$

то (6) *эквивалентно сходимости.*

4. Докажем теоремы 1 — 3. Здесь и далее будем писать Σ вместо $\sum_{k=0}^{n}$, θ_n вместо $\dfrac{\pi}{4(n+h)}$ и lim вместо $\lim\limits_{n\to\infty}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Подставим в (1) вместо a его значение $S_k - S_{k-1}$, где $S_{-1} = 0$, и используем (2), чтобы получить S_r в терминах M. Преобразование $(B_{h,r})$ $(C, 1)^{-1}$ примет форму преобразования на пространстве последовательностей:

$$t_n = \Sigma C_{n,k} M_k, \qquad (8)$$

где

$$C_{n,n} = (n+1) \sin 2 (h - r) \theta_n, \qquad (9)$$

$$C_{n,n-1} = n [\sin 2 (1 + h - r) \theta_n - 2 \sin 2 (h - r) \theta_n] \qquad (10)$$

$$C_{n,k} = - 4 (k+1) \sin^2 \theta_n \cos 2 (k + r + 1) \theta_n \leqslant 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant n - 2, \qquad (11)$$

и

$$C_{n,k} = 0, \quad k > n. \qquad (12)$$

Чтобы получить требуемый результат, достаточно показать, что (8) регулярно. Условие (3) следует из (11). Специальный случай $S_n = 1$ (при всех n) дает $M_n = 1$ (при всех n) и $t_n \to 1$ при $n \to \infty$, так что условие (4) следует из (8) и (12). Наконец, отметим, что

$$\lim \sum_{k=0}^{\infty} |C_{n,k}| = \lim [2C_{n,n} + 2C_{n,n-1} - \Sigma C_{n,k}] = \pi - 1,$$

следовательно, выполнено (5) и доказательство завершено.

Для доказательства теоремы 2 нам потребуется следующая лемма.

Л е м м а 1. *Если* $h - r \leqslant 1/2$, $h \neq r$, *и*

$$M_n = \Sigma Q_{n,k} t_k \qquad (13)$$

— *обратное к* (8) *преобразование, то для всех* $k = 3, 4, \ldots$

$$\lim |Q_{n,n-k}| \geqslant \lambda > 0. \qquad (14)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $C_{n,n} \neq 0$ (при всех n), то (8) имеет обратное. Пусть формула обращения для (8) имеет вид (13). Тогда для любого $j = 3, 4, \ldots.$ имеем

$$Q_{n,n-j} = (-1)^j \frac{A_{n,n-j}}{C_{n,n} C_{n-1,n-1} \ldots C_{n-j,n-j}}, \qquad (15)$$

где

$$A_{n,n-j} = \begin{vmatrix} C_{n-j+1,n-j} & C_{n-j+1,n-j+1} & 0 & 0 & . & 0 \\ C_{n-j+2,n-j} & C_{n-j+2,n-j+1} & C_{n-j+2,n-j+2} & 0 & . & 0 \\ C_{n-j+3,n-j} & C_{n-j+3,n-j+1} & C_{n-j+3,n-j+2} & C_{n-j+3,n-j+3} & . & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{n,n-j} & C_{n,n-j+1} & \cdots & \cdots & \cdots & C_{n,n-1} \end{vmatrix}.$$

Используя (9) — (11), для любого $j = 3, 4, \dots$ имеем

$$\lim |Q_{n,n-j}| = \left| \frac{\left[\frac{\pi}{2}(1-h+r)\right]^j}{\left[\frac{\pi}{2}(h-r)\right]^{j+1}} \right| = \left| \frac{2}{\pi(h-r)} \left[\frac{1-h+r}{h-r}\right]^j \right|. \quad (16)$$

Следовательно, если $h-r \leqslant 1/2$, $h \neq r$, из (16) получим $\lim |Q_{n,n-j}| \geqslant \geqslant \frac{2}{\pi |h-r|} \geqslant \lambda \geqslant 0$.

Доказательство теоремы 2. Используя лемму 1, из (14) заключаем, что условие (5), которое необходимо для регулярности (13), нарушается. Следовательно, существует сходящаяся последовательность t_k, для которой M_k не сходятся. Таким образом, в случае $h - r \leqslant 1/2$, $h \neq r$, существует последовательность, суммируемая $(B_{h,r})$, но не суммируемая $(C, 1)$. Это вместе с теоремой 1 завершает доказательство теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. Пусть t_n и M_n, — как и прежде, $(B_{h,r})$- и $(C, 1)$-преобразования одного и того же ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, связанные с регулярным преобразованием (8). Пусть $B > 1$. Рассмотрим преобразование на множестве последовательностей

$$H_n = (1-B)\, t_{n-1} + Bt_n. \quad (17)$$

Это преобразование из t_n в H_n, очевидно, регулярно, и, следовательно, по теореме 5 эквивалентно сходимости при $B > 1/2$. Используя (8), получаем регулярное преобразование

$$H_n = \Sigma R_{n,k} M_k \quad (18)$$

M_k в H_n, где

$$R_{n,k} = C_{n,k} + (B-1)(C_{n,k} - C_{n-1,k}), \quad 0 \leqslant k \leqslant n, \quad (19)$$

и $C_{n,k}$ определяется формулами (9)—(12).

Мы докажем теорему 3, определяя значения B таким образом, что $B > 1$ и (18) эквивалентно сходимости, так что H_n, которые сходятся тогда и только тогда, когда t_n сходятся, будут сходиться тогда и только тогда, когда сходятся M_n.

Переходя к пределу в (9)—(11), из (19) имеем

$$\lim R_{n,n} = \frac{\pi b}{2}(h-r), \quad (20)$$

$$\lim R_{n,n-1} = \frac{\pi}{2}(B + h - r - 2B(h-r)), \quad (21)$$

$$\lim R_{n,n-2} = -\frac{\pi}{2}(B-1)(1-h+r). \quad (22)$$

Чтобы воспользоваться теоремой 5, оценим предел $\sum_{k=0}^{n-3} |R_{n,k}|$. Используя тот факт, что

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin a \sin b, \quad \sin\theta_{n-1} \geqslant \sin\theta_n,$$

из (11) получаем

$$|C_{n,k} - C_{n-1,k}| \leqslant C/n^2$$

где C — некоторая положительная постоянная. Отсюда следует

$$\lim \sum_{k=0}^{n-3} |B-1|\,|C_{n,k} - C_{n-1,k}| = 0. \quad (23)$$

Используя (23), из (19) имеем

$$\lim \sum_{k=0}^{n-3} |R_{n,k}| = \lim \sum_{k=0}^{n-3} |C_{n,k}|. \tag{24}$$

Переходя к пределу в (9) — (11) и используя регулярность (8), получаем

$$\lim \sum_{k=0}^{n-3} |C_{n,k}| = -\lim \sum_{k=0}^{n-3} C_{n,k} = \pi/2 - 1. \tag{25}$$

Из теоремы 5 с использованием (20)—(22) и (25) следует, что (18) эквивалентно сходимости, если

$$\frac{\pi}{2} B(h-r) - \frac{\pi}{2} |B + h - r - 2B(h-r)| - \frac{\pi}{2} |(B-1)(1-h+r)| >$$
$$> \frac{\pi}{2} - 1,$$

т. е. при $B > 1$, $1/2 < h - r \leqslant 1$;

$$|-B + 2B(h-r) - (h-r)| < -B + 2B(h-r) - (h-r) + \pi/2 \tag{26}$$

при $B > 1$; $-B + 2B(h-r) - (h-r) \geqslant 0$ при $\dfrac{1-(h-r)}{h-r} \leqslant 1 - \dfrac{1}{B} < 1$.

Поскольку выполнено (26), то (18) эквивалентно сходимости. Так как такой выбор B возможен при $(h-r) \in (1/2, 1]$, доказательство теоремы завершено.

5. Рассмотрим методы $(M_{h,r})$ и $(A_{h,r})$. Для каждого h и каждого r ряд $a_0 + a_1 + \dots$ с частичными суммами $S_n = \Sigma a_k$ назовем суммируемым $(M_{h,r})$ к L, если при $n \to \infty$ $g_h \to L$, где

$$g_n = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_{n-1} + (h-r) S_n}{n+1}. \tag{27}$$

Покажем, что $(M_{h,r})$ и $(B_{h,r})$ тесно связаны при $h - r \leqslant 1$, $h \neq r$. Из (27), используя (2), находим

$$g_n = (1 - h + r) \frac{n}{n+1} M_{n-1} + (h-r) M_n. \tag{28}$$

Рассмотрим преобразование $(A_{h,r})$, с помощью которого ряд $a_0 + a_1 + \dots$ с частичными суммами S_n и средними M_n суммируем к L при $g_n^* \to L$, где

$$g_n^* = (1 - h + r) M_{n-1} + (h-r) M_n. \tag{29}$$

Заметим, что преобразования (28) и (29) регулярны. В результате получаем следующую теорему.

Теорема 6. $(C, 1) \Rightarrow (M_{h,r})$ *и* $(A_{h,r})$.

6. Установим связь между методами $(B_{h,r})$, $(M_{h,r})$ и $(A_{h,r})$. Докажем следующие результаты, которые устанавливают связь между методами $(B_{h,r})$, $(M_{h,r})$ и $(A_{h,r})$ при $h - r \leqslant 1$, $h \neq r$.

Теорема 7. *Если* $h - r \in (1/2, 1)$, *то* $(M_{h,r})$ *и* $(A_{h,r})$ *эквивалентны* $(C, 1)$, *друг другу и* $(B_{h,r})$.

Если $r = 0$, *получаем первую часть теоремы* 7.4 *из* [1].

Теорема 8. *Если* $h - r < 1/2$, $h \neq r$, *то* $(M_{h,r})$ *и* $(A_{h,r})$, *как и* $(B_{h,r})$, *сильнее, чем* $(C, 1)$.

Теорема 9. *Если* $h - r = 1/2$, *то* $(M_{h,r})$, $(A_{h,r})$ *и* $(B_{h,r})$ *эквивалентны.*

Замечание 2. При $r = 0$ теорема 7.5 Агню [1] следует из теорем 7 и 9. Используя теорему 2, видим, что вторая часть теоремы 7.4 Агню следует из теорем 8 и 9. По существу, Агню доказал вторую часть его теоремы 7.4 в случае $0 < h < 1/2$, тогда как в теореме 8 даже при $r = 0$ h может быть выбрано отрицательным или положительным.

Теорема 10. *Если $h-r<1/2$, $h\neq r$, между $(M_{h,r})$ и $(A_{h,r})$ нет отношения включения.*

Теорема 11. *Если $h\neq r$, $h\neq r+1/2$, то для $h-r\leqslant 1$ ряд, суммируемый $(M_{r+1/2,r})$ является суммируемым $(B_{h,r})$ тогда и только тогда, когда он суммируем $(C, 1)$.*

Доказательство теоремы 7. Используя (28) или (29), видим, что при $h-r\in(1/2, 1)$ выполнено (7). Поскольку и (28) и (29) регулярны, из теоремы 5 вытекает, что $(M_{h,r})$ и $(A_{h,r})$ эквивалентны $(C, 1)$. Из этого на основании теоремы 3 следует справедливость теоремы 7.

Доказательство теоремы 8. Так как $h\neq r$, (28) и (29) имеют обратные. Формула обращения для (28) дает

$$M_n=\frac{1}{(h-r)(n+1)}\Sigma(-1)^{n-k}(k+1)\left[\frac{1-h+r}{h-r}\right]^{n-k}g_k, \tag{30}$$

а для (29) —

$$M_n=\frac{1}{(h-r)}\Sigma(-1)^{n-k}\left[\frac{1-h+r}{h-r}\right]^{n-k}g_k^*. \tag{31}$$

Когда $h-r<1/2$, $h\neq r$, имеем $\left|\dfrac{1-h+r}{h-r}\right|>1$.

Используя теорему 4, легко показать, что (30) и (31) не являются регулярными, так что $(C, 1)$ не включает $(M_{h,r})$ и $(A_{h,r})$. Результат следует из последнего утверждения и теоремы 6.

Доказательство теоремы 9. Используя (28) и (29), имеем

$$g_n=g_n^*+\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}\left[\frac{1-h+r}{h-r}\right]^{n-k}g_n^* \tag{32}$$

и

$$g_n^*=g_n-\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}\left[\frac{1-h+r}{h-r}\right]^{n-k}(k+1)g_k. \tag{33}$$

Если $h-r=1/2$, т. е. $\dfrac{1-h+r}{h-r}=1$, отсюда следует, что (32) и (33) регулярны, так что $(M_{h,r})$ и $(A_{h,r})$ эквивалентны. Для доказательства теоремы покажем, что при $h-r=1/2$ $(B_{n,k})$ и $(M_{n,k})$ эквивалентны.

Выберем $h-r=1/2$. Используя (28), получаем

$$g_n=\frac{1}{2(n+1)}[nM_{n-1}+(n+1)M_n]. \tag{34}$$

В случае $0\leqslant k\leqslant n-2$, представляя $C_{n,k}$, определенное по формуле (11), в виде

$$C_{n,k}=-2(k+1)\sec\theta_n\sin^2\theta_n[\cos(2k+2r+1)\theta_n+\cos(2k+2r+3)\theta_n)] \tag{35}$$

и используя (34), можно после некоторых преобразований коэффициентов nM_{n-1} записать (8) в форме

$$t_n=2n\sec\theta_n\sin(1-2h+2r)\theta_nM_{n-1}+\Sigma F_{n,k}g_k \tag{36}$$

где

$$F_{n,n}=2(n+1)\sin 2(h-r)\theta_n, \tag{37}$$

$$F_{n,k}=-4(k+1)\sec\theta_n\sin^2\theta_n\cos(2k+2r+1)\theta_n,\quad 0\leqslant k\leqslant n-1, \tag{38}$$

$$F_{n,k}=-4(k+1)[\sin^2\theta_n\cos 2(k+r+1)\theta_n+\sec\theta_n\sin^3\theta_n\sin 2(k+r+1)\theta_n] \tag{39}$$

и

$$F_{n,k}=0,\quad k>n. \tag{40}$$

Так как $\lim F_{n,n-1} = 0$, из (37), (39) и (40) следует

$$\lim \sum_{k=0}^{\infty} F_{n,k} = \pi (h - r) + \lim \sum_{k=0}^{n-2} - 4 (k + 1) \sin^2 \theta_n \cos 2 (k + r + 1) \theta_n, \quad (41)$$

$$\lim \sum_{k=0}^{\infty} F_{n,k} = \pi (h - r) + \lim \sum_{k=0}^{n-2} C_{n,k}, \quad (42)$$

где $C_{n,k}$ определены по формуле (11).

Пользуясь регулярностью (8), из (9)—(11) получим, что второй член в правой части (42) равен $1 - \pi/2$. Тогда

$$\lim \Sigma F_{n,k} = \pi (h - r) + 1 - \pi/2. \quad (43)$$

Если $0 \leqslant k \leqslant n - 1$, из (38) следует $F_{n,k} \leqslant 0$. Используя это, (37) и (40), из (43) получаем

$$\lim \sum_{k=0}^{\infty} | F_{n,k} | = \pi (h - r) + \pi/2 - 1. \quad (44)$$

Из (38) имеем

$$\lim F_{n,k} = 0 \quad (45)$$

для любого фиксированного k. Таким образом, при $h - r = 1/2$ первый член в правой части (36) исчезает и регулярность (36) следует из (43)—(45). Из (37), (40) и (44) немедленно следует (7), и в силу теоремы 5 (36) эквивалентно сходимости, откуда следует, что $(B_{h,r})$ и $(M_{h,r})$ эквивалентны.

Доказательство теоремы 10. Если $h - r < 1/2$, $h \neq r$, то $\left| \frac{1 - h + r}{h - r} \right| > 1$. Это показывает, что (32) и (33) не регулярны, откуда следует, что $(M_{h,r})$ и $(A_{h,r})$ несравнимы.

Доказательство теоремы 11. Если $h \neq r$, $h \neq r + 1/2$, из (43)—(45) следует, что преобразование $t_n^* = \Sigma F_{n,k} \; g_k$ не регулярно, но мультипликативно с мультипликатором $1 - \frac{(1 - 2h + 2r) \pi}{2}$. Из (36) следует, что если ряд $a_0 + a_1 + \ldots$, суммируемый $(M_{r+1/2,r})$ к L, так что $g_n \to L$, то

$$t_n = e_n + \left[1 - \frac{\pi (1 - 2h + 2r)}{2} \right] L + 2n \sec \theta_n \sin (1 - 2h + 2r) \theta_n M_{n-1},$$

где $e_n \to 0$ при $n \to \infty$, так что $\lim t_n$ существует тогда и только тогда, когда существует $\lim M_n$, что доказывает теорему.

1. *Agnew R. P.* Rogosinski — Bernstein trigonometric summability methods and modified arithmetic means // Ann. Math.— 1952.— **2**, P. 537—59.
2. *Karamata J.* Sur La sommabilite de S. Bernstein et quelques procedes de sommation quisy raltachent // (French: Russian summary) Res. Math. (Mat. Sbornik).— 1947.— N **21**.— P. 13—24.
3. *Karamata J.* Uber die Beziehung zwischen dem Bernsteinschen Und Cesa'roschen Limitierungsverfahren // Math. Z.— 1949.— **52**.— P. 305—306.
4. *Kharchiladze P.* Sur La methode de sommation de S. N. Bernstein // (Russian; French summary). Rec. Math. (Mat. Sbornik).— 1942. N 11.— P. 121—148.
5. *Petersen G. M.* A note on divergent series // Can. J. Math.— 1952.— **4**.— P. 445—54.
6. *Petersen G. M.* Methods of summation // Pacif. J. Math.— 1954.— **4**.— P. 73—77.
7. *Rogosinski W.* Uber die Abschnitte trigonometrischer Reihen // Math. Ann.— 1925.— **95**.— P. 110—134.
8. *Rogosinski W.* Reihensummierung durch Abschnittskoppelungen // Math. Z.— 1926.— **25**.— P. 132—149.
9. *Toeplitz.* Uber allegemeine linear Mittelbildungen // Pr. Mat. fiz.— 1911.— **22**.— P. 113—120.
10. *Харди Г.* Расходящиеся ряды.— М. : Изд-во иностр. лит., 1951.— 504 с.

ОАЭ

Получено 06.01.87