УДК 517.946+519.46

Б. Н. Филь, А. К. Прикарпатский, Н. Н. Притула

Квантовая алгебра Ли токов — универсальная алгебраическая структура симметрий вполне интегрируемых динамических систем

1. Рассмотрим нерелятивистскую алгебру Ли токов $\mathfrak{Q}$ на торе T^n, $n \in \mathbb{Z}_+$, реализованную операторами $\rho(f)$ и $J(g)$ в гильбертовом пространстве Фока [1, 2]:

$$[\rho(f_1), \rho(f_2)] = 0, \ [\rho(f), J(g)] = i\rho(\nabla f \cdot g), \tag{1}$$

$$[J(g_1), J(g_2)] = iJ(g_1 \cdot \nabla g_2 - g_2 \cdot \nabla g_1), \quad i = \sqrt{-1}.$$

Здесь $\rho(f) = \int\limits_{T^n} d^n x f(x) \rho(x)$, $J(g) = \int\limits_{T^n} d^n x g(x) J(x)$; $f \in \mathcal{G}(T^n; \mathbb{R}^1)$, $g \in \mathcal{G}(T^n; \mathbb{R}^n)$ — гладкие периодические функции Шварца на T^n; $\rho(x) = \psi^+(x)\psi(x)$ — вторично квантованный [1] оператор плотности числа частиц; $J(x) = \frac{1}{2i}[\psi^+(x)\nabla\psi(x) - \nabla\psi^+(x)\psi(x)]$ — оператор плотности потока частиц; $\psi^+(x)$ и $\psi(y)$ — вторично квантованные операторы рождения и уничтожения одночастичных квантовых состояний в точках x и $y \in T^n$ соответственно, удовлетворяющие каноническим коммутационным соотношениям: $[\psi(x), \psi(y)] = \delta(x - y)$.

Как известно [2, 4], различные неприводимые самосопряженные представления алгебры Ли токов ($\mathfrak{G}$) (1) описывают множество физических состояний исходной динамической системы, заданной при помощи оператора Гамильтона H. Например, в случае N-частичной, $N \in \mathbb{Z}_+$, динамической системы алгебра Ли $\mathfrak{G}$ (1) имеет в $L_2^{(\pm)}(T^n; \mathbb{C}^1)$ представление вида

$$\rho(x) = \sum_{j=1}^{N} \delta(x - \vartheta_j), \quad N \in \mathbb{Z}_+, \tag{2}$$

$$J(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2i}[-\nabla\delta(x - \vartheta_j) + 2\delta(x - \vartheta_j)\nabla_{\theta_j}],$$

где $\vartheta_j \in T^n$, $j = \overline{1, N}$ — координаты частиц.

Представления (1) в общем виде изучались в [2, 4].

2. Пусть теперь алгебра Ли токов $\mathfrak{G}$ (1) рассматривается в случае $T^1 \simeq S^1$. Переходя по формулам $\rho_j = \int\limits_0^{2\pi} dx \exp(-ijx)\rho(x)$,

$$J_k = \int\limits_0^{2\pi} dx \exp(-ikx) J(x), \quad j, k \in \mathbb{Z}^0,$$

к Фурье-операторам токов, из (1) получим следующую алгебру Ли токов, изоморфную исходной [3]:

$$[\rho_j, \rho_k] = 0, \quad [\rho_j, J_k] = j\rho_{j+k},$$

$$[J_j, J_k] = (j - k) J_{j+k}. \tag{3}$$

Алгебра Ли токов (3), как легко убедиться, является алгеброй Ли банаховой группы Ли $G = \mathcal{G} \otimes \mathrm{Diff}(S^1)$, т. е. полупрямого произведения абелевой группы Шварца $\mathcal{G} = \mathcal{G}(S^1; \mathbb{R}^1)$ и группы диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}(S^1)$. Ниже мы покажем, что алгебра Ли токов $\mathfrak{G}$ (3) — универсальная алгебраическая структура для симметрий вполне интегрируемых гамильтоновых динамических систем вида $u_t = K[u]$, где $u \in M \simeq \mathcal{G}(\mathbb{R}^1; \mathbb{R}^m)$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $t \in \mathbb{R}^1$ —

эволюционный параметр, $K: M \to T(M)$ — гладкий по Фреше однородный локальный нелинейный функционал [5] на M.

3. Пусть $\mathscr{L}: T^*(M) \to T(M)$ — имплектический и нетеров [5—7] оператор, удовлетворяющий условию $\mathscr{L}' \cdot K' - \mathscr{L} \cdot K'^* - K' \cdot \mathscr{L} = 0$. В силу полной интегрируемости динамической системы $u_t = K[u]$ на M существует бесконечная иерархия законов сохранения $\gamma_j \in \mathscr{D}(M)$, $j \in \mathbb{Z}$, инволютивная относительно скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_{\mathscr{L}} = (\operatorname{grad}(\cdot), \mathscr{L}\operatorname{grad}(\cdot))$, где $(\cdot, \cdot)$ — стандартная билинейная форма на $T^*(M) \times T(M)$. Соответствующие векторные поля $\alpha_j = \mathscr{L}\operatorname{grad}\gamma_j$, $j \in \mathbb{Z}$, являются коммутирующими на M, т. е. $[\alpha_j, \alpha_k] = 0$, $j, k \in \mathbb{Z}$. Кроме того, очевидно, что множество $Q[\alpha] = \{\alpha_j : j \in \mathbb{Z}\}$ — абелева алгебра Ли однородных симметрий исходной динамической системы $u_t = K[u]$, т. е. $[\alpha_j, K] = 0$ для всех $j \in \mathbb{Z}$. Пусть $Q[\Phi] = \{\Phi_j : j \in \mathbb{Z}\}$ — естественным образом упорядоченная алгебра Ли неабелевых неоднородных симметрий динамической системы $u_t = K[u]$, т. е. $\partial\Phi_j/\partial t + [\Phi_j, K] = 0$ для всех $j \in \mathbb{Z}$. Легко установить, что подалгебры $Q[\alpha]$ и $Q[\Phi]$ удовлетворяют следующим соотношениям [3]:

$$\mathscr{L}' \cdot \alpha_j - \mathscr{L} \cdot \alpha_j'^* - \alpha_j' \cdot \mathscr{L} = 0, \tag{4}$$

$$\mathscr{L}' \cdot \Phi_k - \mathscr{L} \cdot \Phi_k'^* - \Phi_k' \cdot \mathscr{L} = \mathscr{L}_k,$$

где j, $k \in \mathbb{Z}$, $\mathscr{L}_k : T^*(M) \to T(M)$ — некоторые кососимметрические операторы. Можно убедиться прямым вычислением, что эти операторы удовлетворяют условию нетеровости и являются имплектическими. Таким образом, или уравнение нетеровости $\mathscr{L}' \cdot K - \mathscr{L}K'^* - K' \cdot \mathscr{L} = 0$ имеет только одно решение для оператора $\mathscr{L}: T^*(M) \to T(M)$, и тогда все $\mathscr{L}_k \equiv 0$, $k \in \mathbb{Z}$, или существует другое его решение $\mathcal{M}: T^*(M) \to T(M)$, что $\mathcal{M}'K - \mathcal{M}K'^* - K'\mathcal{M} = 0$, и тогда $\mathscr{L}_k = c_k \mathscr{L}\Lambda^j$, где $c_k \in \mathbb{R}^1$, $k \in \mathbb{Z}$ — некоторые числа, $\Lambda = \mathscr{L}^{-1}\mathcal{M}$ — так называемый рекурсионный оператор [5—8]. В последнем случае динамическую систему $u_t = K[u]$ на M называют [5, 8] бигамильтоновой. Из (4) также немедленно следует, что рекурсионный оператор $\Lambda : T^*(M) \to T^*(M)$ в случае бигамильтоновой динамической системы удовлетворяет уравнениям

$$\Lambda' \cdot \alpha_j - [\Lambda, \alpha_j'^*] = 0, \tag{5}$$

$$\Lambda' \cdot \Phi_k - [\Lambda, \Phi_k'^*] = f_k(\Lambda),$$

где $f_k(\cdot)$ — некоторые, в общем случае, рациональные функции, $j, k \in \mathbb{Z}$. Кроме того, в силу равенства $\Lambda' \cdot K - [\Lambda, K'^*] = 0$ заключаем, что алгебра Ли симметрий $Q\{\Phi\} = \bigcup_{s=1}^{p} \{\Phi_j^{(s)} = \Lambda^{*j}\Phi_0^{(s)} : j \in \mathbb{Z}\}$, а алгебра $Q\{\alpha\} = \bigcup_{s=0}^{p} \{\alpha_j^{(s)} = \Lambda^{*j}\alpha_0^{(s)} : j \in \mathbb{Z}\}$, где $N \ni p < \infty$ — некоторое ограниченное натуральное число. При этом алгебра Ли симметрий динамической системы $u_t = K[u]$ имеет вид $Q = Q\{\alpha\} \oplus Q\{\Phi\}$ (полупрямая сумма), т. е. справедливы соотношения

$$[\alpha_j^{(s)}, \alpha_k^{(q)}] = 0, \quad [\alpha_j^{(s)}, \Phi_k^{(q)}] = j\alpha_{j+k}\delta_{s,q}, \quad [\Phi_j^{(s)}, \Phi_k^{(q)}] = (j-k)\Phi_{j+k}^{(s)}\delta_{s,q}, \tag{6}$$

для всех $j, k \in \mathbb{Z}$, $s, q = \overline{1, p}$. Тем самым, из (6) и (3) заключаем, что алгебра Ли симметрий Q динамической системы $u_t = K[u]$ изоморфна алгебре Ли токов $\mathfrak{G}$ (3). В случае, когда все $\mathscr{L}_k \equiv 0$, $k \in \mathbb{Z}$, в силу (4) находим, что существует бесконечная иерархия неоднородных законов сохранения $\tilde{\gamma}_j \in \mathscr{D}(M)$, $j \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих соотношениям $\Phi_j = \mathscr{L}\operatorname{grad}\tilde{\gamma}_j$, $\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\gamma}_j + \{H, \tilde{\gamma}_j\}_{\mathscr{L}} = 0 = \frac{d}{dt}\gamma_j$, где $K = -\mathscr{L}\operatorname{grad} H$. Кроме того, для законов сохранения $\gamma_j \in \mathscr{D}(M)$, $j \in \mathbb{Z}$, имеется рекуррентная формула $(k + j)\gamma_{j+k} = (\operatorname{grad}\gamma_j, \Phi_k)$, $\mathscr{L}\operatorname{grad}\gamma_j = \alpha_j$, для всех $j, k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, роль «рекурсионного» оператора в этом случае играет алгебра Ли $\mathfrak{G}_0 = \bigoplus_{s=1}^{p} \{\Phi_{-1}^{(s)}, \Phi_0^{(s)}, \Phi_1^{(s)}\}$, изоморфная алгебре Ли $\bigoplus_{s=1}^{p} \mathrm{sl}(2; \mathbb{R})$. При этом справедливы формулы рекурсии для симметрий $\alpha_j \in Q[\alpha]$, $j \in \mathbb{Z}$, следующие из (6).

С другой стороны, если нелинейная однородная динамическая система $u_t = K[u]$ обладает на M алгеброй Ли симметрий Q, изоморфной алгебре Ли токов $\mathfrak{G}$ (3), (6), то эта система является необходимо гамильтоновой и вполне интегрируемой. Если к тому же неабелева алгебра Ли $Q\{\Phi\}$ симметрий не является нетеровой, т. е. в (4) имплектические операторы $\mathcal{L}_k : T^*(M) \to T(M)$, $k \in \mathbb{Z}$, не равны тождественно нулю, то динамическая система $u_t \in K[u]$ на M является бигамильтоновой, обладающей регулярным рекурсионным оператором $\Lambda : T^*(M) \to T^*(M)$, где $\Lambda = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}$, $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ — соответствующая имплектическая пара нетеровых операторов.

4. Изученная выше универсальная алгебраическая структура симметрий вполне интегрируемых динамических систем в общем случае может служить в качестве эффективного критерия свойства полной интегрируемости для произвольных нелинейных динамических систем. Как указано в [3], та же алгебраическая структура (3) свойственна некоторым нелинейным «двумеризованным» динамическим системам на бесконечномерных многообразиях вида $M \simeq \mathcal{G}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^m)$. К их числу относятся уравнения Кадомцева — Петвиашвили, Дэви — Стюардсона, Яджимы — Мельникова [9] и др, причем все они обладают одним общим свойством: для них существует стандартное представление типа Лакса, в котором вторая пространственная переменная входит аддитивным образом. В качестве естественного обобщения укажем, что в случае существенно двумеризованной динамической системы $u_t = K[u]$ на многообразии $M \simeq \mathcal{G}$ $(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^n)$ роль банаховой группы Ли G симметрий, возможно, должна играть группа токов $G = \mathcal{G} \times \mathrm{Diff}(T^2; \mathbb{R}^2)$. Поиск соответствующих нетривиальных функциональных представлений [3], соответствующих алгебре Ли токов (1), является в настоящее время актуальной проблемой теории вполне интегрируемых динамических систем.

5. Пример 1. Пусть на $M \simeq \mathcal{S}(\mathbb{R}^1; \mathbb{C}^2)$ задана динамическая система $u_t = K[u]$, $u = (\psi, \psi^*)^\tau \in M$, где

$$\left.\begin{aligned} \psi_t &= i\psi_{xx} + (\psi^*\psi^2)_x \\ \psi_t^* &= -i\psi_{xx} + (\psi^{*2}\psi)_x \end{aligned}\right\} = K[u], \tag{7}$$

называемая нелинейным модифицированным уравнением Шредингера [10]. Имплектический нетеров $\mathcal{L}$-оператор для (7) имеет вид $\mathcal{L} = \begin{Vmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{Vmatrix}$, где $\partial = \partial/\partial x$, $x \in \mathbb{R}^1$. Из уравнения $\dfrac{\partial \Phi_j}{\partial t} + [\Phi_j, K] = 0$, $j \in \mathbb{Z}$, легко вычисляем симметрии Φ_0 и Φ_1 для системы (7):

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= tK + \begin{pmatrix} x\psi_x + \frac{1}{2}\psi \\ x\psi_x^* + \frac{1}{2}\psi^* \end{pmatrix}, \\ \Phi_1 &= t\alpha_3 + xK + \begin{pmatrix} \psi^2\psi^* + i\frac{3}{2}\psi_x \\ \psi^{*2}\psi - i\frac{3}{2}\psi_x^* \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\alpha_3 \in Q\{\alpha\}$ — некоторая абелева симметрия (7), т. е. $[\alpha_3, K] = 0$. Из соотношений (4) находим, что $\mathcal{L}' \cdot \Phi_0 - \mathcal{L}\Phi_0'^* - \Phi_0' \cdot \mathcal{L} = -\mathcal{L}$, $\mathcal{L}' \cdot \Phi_1 - \mathcal{L}\Phi_1' - \Phi_1'^* \cdot \mathcal{L} = -2\mathcal{M}$, где $\mathcal{M} : T^*(M) \to T(M)$ — новый имплектический и нетеров оператор для (7), имеющий вид

$$\mathcal{M} = \begin{Vmatrix} -\psi\partial^{-1}\psi & -i + \psi\partial^{-1}\psi^* \\ i + \varphi^*\partial^{-1}\psi & -\psi^*\partial^{-1}\psi^* \end{Vmatrix} \tag{9}$$

Тем самым динамическая система (7) является бигамильтоновой, обладает регулярным рекурсионным оператором $\Lambda = \mathscr{L}^{-1}\mathscr{M}$, удовлетворяющим соотношениям

$$\Lambda'\cdot\Phi_j - [\Lambda, \Phi_j'^{*}] = \Lambda^{j+1}, \quad \Lambda'\cdot\alpha_j - [\Lambda, \alpha_j'^{*}] = 0, \tag{10}$$

где $\Phi_j = \Lambda^{*j}\Phi_0$, $\alpha_j = \Lambda^{*j}\alpha_0$, $j \in \mathbb{Z}$, и $\alpha_0 = (-i\psi, i\psi^*)^\tau$ (τ обозначает транспонирование). При этом, очевидно, алгебра Ли симметрий $Q = Q\{\alpha\} \dot{\oplus} Q\{\Phi\}$ изоморфна алгебре Ли токов (3) банаховой группы Ли $G = \mathscr{G} \otimes \mathrm{Diff}\, S^1$).

Основываясь далее на градиентно-голономном алгоритме работ [5— 7, 11, 12], легко установить, что динамическая система (7) является на M вполне интегрируемым бигамильтоновым потоком, обладающим стандартным представлением типа Лакса [10], позволяющим предьявить широкий класс ее решений в явном виде на основе метода обратной задачи. Аналогичные результаты, очевидно, справедливы для всех вполне интегрируемых динамических систем, допускающих изученную нами выше алгебраическую структуру симметрий вида (3), (6).

Пример 2. Рассмотрим на многообразии $M \simeq \mathscr{G} \otimes \mathrm{Diff}\,(S^1)$ динамическую систему Бенджамин — Оно:

$$u_t = \mathscr{H} u_{xx} + 2uu_x = K[u], \tag{11}$$

где $u \in M$, $x, t \in \mathbb{R}^1$ и $\mathscr{H} : T(M) \to T(M)$ —преобразование Гильберта: для любого $\alpha \in T(M)$

$$(\mathscr{H}\alpha)(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\alpha(y)}{y - x}. \tag{12}$$

Операция (12) обладает свойствами: $\mathscr{H}^2 = -1$, $\mathscr{H}^* = -\mathscr{H}$, где * обозначает сопряжение относительно стандартной билинейной формы $(\cdot, \cdot)$ на $T^*(M) \times T(M)$. С помощью методов работ [5—7] устанавливаем, что (11) — гамильтонова динамическая система на M, имплектический $\mathscr{L}$-оператор которой имеет вид $\mathscr{L} = \partial : T^*(M) \to T(M)$. Пусть, как и выше, $Q\{\Phi\} = \{\Phi_j : j \in \mathbb{Z}\}$ — естественным образом упорядоченная алгебра Ли неоднородных симметрий динамической системы (11), где

$$\Phi_{-1} = 1 + tu_x, \quad \Phi_0 = xu_x + u + tK,$$

$$\Phi_1 = t\alpha_2 + xK + u^2 + \frac{3}{2}\mathscr{H}u_x,$$

$$\alpha_2 = [2u^3 + 3\mathscr{H}(uu_x) + 3u\mathscr{H}u_x - 2u_{xx}]_x$$

и т. д. Вычисляя «дефект» нетеровости для алгебры Ли $Q\{\Phi\}$, получаем

$$\mathscr{L}'\Phi_j - \mathscr{L}\Phi_j'^{*} - \Phi_j'\mathscr{L} = 0 \tag{13}$$

для всех $j \in \mathbb{Z}$. Тем самым, можно утверждать, что существует бесконечная иерархия неоднородных законов сохранения $\tilde{\gamma}_j \in \mathscr{D}(M)$ динамической системы (11), удовлетворяющих условию $\partial\gamma_j/\partial t + \{H, \tilde{\gamma}_j\}_{\mathscr{L}} = 0$, $j \in \mathbb{Z}$, где $H = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{u^3}{3} + u\mathscr{H}u_x\right)$, $K[u] = -\mathscr{L}\,\mathrm{grad}\, H$.

Для абелевой подалгебры Ли симметрий $Q\{\alpha\} = \{\alpha_j : j \in \mathbb{Z}\}$ имеем следующее рекуррентное соотношение: $j\alpha_{j+k} = [\alpha_j, \Phi_k]$, $j, k \in \mathbb{Z}$.

Итак, динамическая система Бенджамин — Оно (11) обладает стандартной алгеброй Ли симметрий $Q = Q\{\alpha\} \dot{\oplus} Q\{\Phi\}$, изоморфной алгебре Ли токов (3) и является вполне интегрируемым гамильтоновым потоком на M. При этом в силу (13) система (11) гамильтонова, но не бигамильтонова, как в случае системы (7). Последнее, очевидно, связано с тем, что известное для (11) представление типа Лакса нестандартно в смысле спектральной теории, ввиду того, что является нелокальным, использующим проблему Римана — Гильберта.

6. Рассмотренная выше алгебраическая структура интегрируемых динамических систем может допускать некоторую естественную модификацию. А именно, положим в (1) $\rho(x) = \rho(x)\exp(i\varepsilon\cdot x)$, $J(x) \equiv \hat{J}(x)$, ε, $x \in T^n$. Выбирая в роли «базисного» f-набор функций $\{\exp(-i\varepsilon x - ijx) : j \in \mathbb{Z}\}$, из (1) немедленно в случае алгебры Ли токов на S^1 получаем

$$[\acute{\rho}_j, \acute{\rho}_k] = 0, \quad [\acute{\rho}_j, J_k] = (\varepsilon + j)\hat{\rho}_{j+k},$$

$$[\hat{J}_j,\ \hat{J}_k] = (j-k)\,\hat{J}_{j+k}, \tag{14}$$

где $\varepsilon \in \mathbb{R}^1$, $\hat{\rho}_j = \int_0^{2\pi} dx\,\hat{\rho}(x)\exp(-ijx)$, $\hat{J}_k = \int_0^{2\pi} dx\,\hat{J}(x)\exp(-ikx)$, $j,\ k \in \mathbb{Z}$.

Для описания алгебры Ли (14) на языке алгебры Ли симметрий $Q\{\Phi\}$ динамической системы $u_t = K[u]$, $u \in M$, обладающей имплектической $(\mathscr{L}, \mathscr{M})$-парой нетеровых операторов, рассмотрим следующие две симметрии: $\alpha_0 \in Q\{\alpha\}$ и $\Phi_0 = Q\{\Phi\}$ со свойствами

$$[\alpha_0, \Phi_0] = \varepsilon\alpha_0, \quad \Lambda'\cdot\Phi_0 - [\Lambda, \Phi_0'^*] = \Lambda, \quad \Lambda'\cdot\alpha_0 - [\Lambda, \alpha_0'^*] = 0,$$

$$\mathscr{L}'\cdot\Phi_0 - \mathscr{L}\,\Phi_0'^* - \Phi_0'\cdot\mathscr{L} = 0, \quad \mathscr{M}'\cdot\Phi_0 - \mathscr{M}\Phi_0'^* - \Phi_0'\cdot\mathscr{M} = \mathscr{M}, \tag{15}$$

где $\Lambda = \mathscr{L}^{-1}\mathscr{M}$ — рекурсионный оператор, $\varepsilon \in T^1$ — некоторое число. Тогда для алгебры Ли симметрий $Q\{\alpha\} = \{\alpha_j = \Lambda^{*j}\alpha_0 : j \in \mathbb{Z}\}$ и $Q\{\Phi\} = \{\Phi_j = \Lambda^{*j}\Phi_0 : j \in \mathbb{Z}\}$ справедливо:

$$[\alpha_j, \alpha_k] = 0, \quad [\alpha_j, \Phi_k] = (\varepsilon + j)\,\alpha_{j+k}, \quad [\Phi_j, \Phi_k] = (j-k)\,\Phi_{j+k} \tag{16}$$

для всех $j,\ k \in \mathbb{Z}$. Очевидно, что алгебры Ли (14) и (16) изоморфны. Тем самым, алгебра Ли (14), как «несамосопряженное» представление алгебры Ли токов (3), играет фундаментальную роль в проблеме классификации интегрируемых бесконечномерных динамических систем. При этом справедливы следующие общие формулы «нетеровости» для иерархии симплектических структур $\mathscr{L}_j = \mathscr{L}\Lambda^j$, $j \in \mathbb{Z}$, и рекурсионного оператора $\Lambda : T^*(M) \to T^*(M)$:

$$\mathscr{L}_j'\cdot\alpha_k - \mathscr{L}_j\alpha_k'^* - \alpha_k'\cdot\mathscr{L}_j = 0, \quad \mathscr{L}_j'\cdot\Phi_k - \mathscr{L}_j\cdot\Phi_k'^* - \Phi_k'\cdot\mathscr{L}_j = (j-k)\,\mathscr{L}_{j+k},$$

$$\Lambda'\cdot\alpha_k - [\Lambda, \alpha_k'^*] = 0, \quad \Lambda'\cdot\Phi_k - [\Lambda, \Phi_k'^*] = \Lambda^{k+1}, \tag{17}$$

где $j,\ k \in Z$. Формулы (16), (17) в случае заданной динамической системы $u_t = K[u]$ на $M \simeq \mathscr{G}(\mathbb{R}^1; \mathbb{R}^m)$, $m \in \mathbb{Z}$, вместе с естественным их обобщением вида (6) могут, очевидно, служить эффективным критерием ее гамильтоновой интегрируемости,

1. *Боголюбов Н. Н.*, *Боголюбов Н. Н. (мл.)* Введение в квантовую статистическую механику.— М. : Наука, 1984.— 384 с.
2. *Боголюбов Н. Н. (мл.)*, *Прикарпатский А. К.* Квантовый метод производящих функционалов Н. Н. Боголюбова в статистической физике // Укр. мат. журн.— 1986.— **38**, № 3.— С. 285—289.
3. *Филь Б. Н.*, *Прикарпатский А. К.* Представления алгебры Ли токов на S^1, ассоциированные с интегрируемыми динамическими системами // Докл. АН СССР.— 1986.— **298**, № 6.— С. 1021—1024.
4. *Боголюбов Н. Н. (мл.)*, *Прикарпатский А. К.* Квантовый метод производящих функционалов Боголюбова в статфизике // Элементар. частицы и атом. ядра.— 1986.— **17**, № 4.— С. 789—827.
5. *Самойленко В. Г.*, *Прикарпатский А. К.* Алгебраическая структура градиентного метода исследований динамических систем.— Киев, 1986.— 40 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 86-52).
6. *Прикарпатский А. К.* Градиентный метод построения критериев интегрируемости динамических систем // Докл. АН СССР.— 1986.— **287**, № 4.— С. 827—832.
7. *Митропольский Ю. А.*, *Самойленко В. Г.*, *Прикарпатский А. К.* Асимпотический метод построения имплектических и рекурсионных операторов интегрируемых динамических систем // Там же.— № 6.— С. 1312—1317.
8. *Fokas A.*, *Fucssteiner B.* Bäcklund transformations hereditary symmetries // Physica. Ser. D.— 1981.— **4**, N 1.— P. 47—66.
9. *Мельников В. К.* О некоторых новых нелинейных эволюционных уравнениях интегрируемых методом обратной задачи // Мат. сб.— 1984.— **49**, № 2.— С. 461—489.
10. *Kaup D.*, *Newell A. C.* An exact solution for a derivative nonlinlar Schrödinger equation // J. Math. Phys.— 1987.— **19**, N 4.— P. 798—801.
11. *Прикарпатский А. К.*, *Боголюбов Н. Н. (мл.)* Полная интегрируемость нелинейных систем гидродинамического типа // Теорет. и мат. физика.— 1986.— **67**, № 3.— С. 410—425.
12. *Нелинейная* модель типа Шредингера // Н. Н. Боголюбов (мл.), А. М. Курбатов, А. К. Прикарпатский, В. Г. Самойленко. // Там же.— 1985.— **65**, № 2.— С. 271—284.

Ин-т прикл. пробл. механики и математики АН УССР, Львов

Получено 07.07.86