УДК 517.944

Ю. А. Митропольский, Г. П. Хома

О периодических решениях волновых уравнений второго порядка. IV

В предыдущей работе [1] исследованы вопросы существования обобщенных 2π-периодических решений 2π-систем второго класса первого рода, а в [2] исследованы вопросы существования 2π-периодических решений систем второго рода. Характерной особенностью данных исследований являются условия, задающие нетривиальное 2π-периодическое решение соответствующей однородной 2π-периодической краевой задачи $u_{tt} - u_{xx} = 0$, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, t + 2\pi) = u(x, t)$, для краевой задачи $u_{tt} - u_{xx} = f(x, t, u, u_t, u_x)$, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, t + 2\pi) = u(x, t)$. Как показано в [1,2] существенную роль играют начальные условия $u(0, t) = 0$, $u_x(0, t) = \mu(t)$, $\mu(t + 2\pi) = \mu(t)$. В данной работе изучим еще один класс функций, порождающий 2π-периодические решения 2π-систем второго класса.

Для периода $T = 2\pi$ определим пространство функций

$$\overline{A}_2 = \{u : u(x, t) = u(x, t + 2\pi) = u(x + 2\pi, t) = -u(-x, t)\},$$

причем, если элементы пространства $\overline{A}_2$ удовлетворяют условиям

$$\int_0^{2\pi} \{u(x + \theta - \tau, \tau) + u(x - \theta + \tau, \tau)\}\, d\theta = 0, \tag{1}$$

$$\Phi_u(x, t + 2\pi, \tau) = \Phi_u(x, t, \tau + 2\pi) = \Phi_u(x, t, \tau), \tag{2}$$

где

$$\Phi_u(x, t, \tau) = \int_\tau^t \{u(x + \theta - \tau, \tau) + u(x - \theta + \tau, \tau)\}\, d\theta, \tag{3}$$

то такой класс функций обозначим через $\overline{A}_{22}$.

Лемма 1. *Каждая функция $u(x, t) \in \overline{A}_2$, разлагающаяся в равномерно сходящийся ряд Фурье вида*

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin kx, \tag{4}$$

удовлетворяет условиям (1) *и* (2), *т. е.* $u(x, t) \in \overline{A}_{22}$.

Доказательство. Действительно, на основании леммы 1 и выражения (4) получаем

$$\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\tau) \{\sin k(x + \theta - \tau) + \sin k(x - \theta + \tau)\}\, d\theta =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\tau)/k \{\cos k(x - \theta + \tau) - \cos k(x + \theta - \tau)\}\big|_0^{2\pi} \equiv 0.$$

Таким образом, условие (1) выполняется

Далее, на основании (3) и (4) имеем

$$\Phi_u(x, t, \tau) = \int_\tau^t \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\tau) \{\sin k(x+\theta-\tau) + \sin k(x-\theta+\tau)\}\, d\theta =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\tau)/k \{\cos k(x-t+\tau) - \cos k(x+t-\tau)\}.$$

Отсюда следует выполнение условия (2). Лемма 1 доказана.

Теперь рассмотрим краевую задачу, описанную уравнениями

$$\begin{gathered} u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon f(x, t, u, u_t, u_x), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, t+2\pi) = u(x, t). \end{gathered} \tag{5}$$

Лемма 2. *Пусть для каждой функции* $u(x, t) \in C^1 \cap \bar{A}_2$ *функция* $F[u, u_t, u_x] = f(x, t, u(x, t), u_x(x, t)) \in \bar{A}_{22}$. *Тогда оператор вида*

$$(PF)(x, t) = \int_0^t \Big\{ \int_\tau^t (F[u, u_t, u_x](x+\theta-\tau, \tau) + F[u, u_t, u_x](x-\theta+\tau, \tau))\, d\theta -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\tau \int_\tau^t (F[u, u_t, u_x](x+\theta-\tau, \tau) + F[u, u_t, u_x](x-\theta+\tau, \tau))\, d\theta \Big\}\, d\tau \equiv$$

$$\equiv \int_0^{2\pi} Q_1(\tau) \int_\tau^t \sum_{i=0}^{1} F[u, u_t, u_x](x + (-1)^i(\theta-\tau), \tau)\, d\theta d\tau, \tag{6}$$

$$Q_1(\tau) = \begin{cases} 1 - t/2\pi, & 0 \leqslant \tau \leqslant t; \\ -t/2\pi & t < \tau \leqslant 2\pi, \end{cases} \tag{7}$$

переводит каждую функцию из пространства $\bar{A}_2$ *в пространство* $\bar{A}_2$.

Доказательство. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $(PF)(x+2\pi, t) = (PF)(x, t+2\pi) = (PF)(-x, t) = -(PF)(x, t)$, $(PE)(0, t) = (PF)(\pi, t) = 0$, т. е. $(PF) \in \bar{A}_2$.

Теорема 1. *Пусть для каждой функции* $v(x, t) \in C^2 \cap \bar{A}_2$ *функция* $F[v, v_t, v_x](x, t) = f(x, t, v(x, t), v_t(x, t), v_x(x, t)) \in C^1 \cap \bar{A}_{22}$. *Тогда функция* $v = \bar{P}F$, *где*

$$(\bar{P}F)(x, t) = z(x, t) + \frac{\varepsilon}{2}(PF)(x, t),$$

$$z(x, t) = p(t+x) - p(t-x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} (a_k' \cos kt + a_k'' \sin kt) \sin kx, \tag{8}$$

$$p(\alpha) \in C^2 \quad p(\alpha + 2\pi) = p(\alpha),$$

является 2π-*периодическим решением краевой задачи вида*

$$\begin{gathered} v_{tt} - v_{xx} = \varepsilon f(x, t, v, v_t, v_x) - \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^{1} F[v, v_t, v_x](x + (-1)^i(t-s), s)\, ds, \\ v(0, t) = v(\pi, t) = 0, \quad v(x, t+2\pi) = v(x, t). \end{gathered} \tag{9}$$

Доказательство теоремы 1 проводится на основании вычисления производных v_{tt} и v_{xx} и вычисления разности $v_{tt} - v_{xx}$.

Теперь предположим, что функция $f(x, t, u, u_t, u_x)$ определена в области

$$\begin{gathered} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times D \equiv I^1 \times I^2 \times I^3: \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad u \in [-b, b] = I^1, \\ u_t \in [-c, c] = I^2, \quad u_x \in [-d, d] = I^3, \end{gathered} \tag{10}$$

непрерывна по совокупности переменных x, t, u, u_t, u_x, удовлетворяет условиям

$$|f(x, t, u, u_t, u_x)| \leqslant M, \quad |f(x, t, u'', u_t'', u_x'') - f(x, t, u, u_t, u_x)| \leqslant$$
$$\leqslant K\{|u'' - u'| + |u_t'' - u_t'| + |u_x'' - u_x'|\}. \tag{11}$$

На основании выражения (8) запишем систему интегральных уравнений

$$v(x, t) = z(x, t) + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^{2\pi} Q_1(\tau)\, d\tau \int_\tau^t \sum_{i=0}^{1} F[v, v_t, v_x](x + (-1)^i(\theta - \tau), \tau)\, d\theta,$$

$$v_t(x, t) = z_t(x, t) + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^{2\pi} Q_1(\tau) \sum_{i=0}^{1} F[v, v_t, v_x](x + (-1)^i(t - \tau), \tau)\, d\tau -$$
$$- \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_0^{2\pi} ds \int_{x-t+s}^{x+t-s} F[v, v_t, v_x](\eta, s)\, d\eta, \tag{12}$$

$$v_x(x, t) = z_x(x, t) + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^{2\pi} Q_1(\tau) \sum_{i=0}^{1} (-1)^i F[v, v_t, v_x](x + (-1)^i(t - \tau), \tau)\, d\tau,$$

где функция $Q_1(\tau)$ определена формулой (7).

На основании метода последовательных приближений получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия*:

1) *функция* $f(x, t, u, u_t, u_x)$ *определена в области* (10), *непрерывна по* x, t, *периодична по* t *с периодом* 2π *и удовлетворяет неравенствам* (11);

2) *функция* $F[u, u_t, u_x](x, t) = f(x, t, u(x, t), u_t(x, t), u_x(x, t)) \in \bar{A}_{22}$ для *конкретно определенного класса функций* $u \in C^1 \cap \bar{A}_2$.

Тогда для каждой функции $z \in C^1 \cap \bar{A}_2$ *такой, что*

$$|z(x, t)| < b - 2\varepsilon M\pi^2, \quad |z_t(x, t)| < c - 5\varepsilon M\pi/2, \quad |z_x(x, t)| < d - 2\varepsilon M\pi,$$

последовательность периодических по t *периода* 2π *функций*

$$v^0(x, t) = z(x, t), \quad v_t^0(x, t) = z_t(x, t), \quad v_x^0(x, t) = z_x(x, t),$$

$$v^{m+1}(x, t) = z(x, t) + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^{2\pi} Q_1(\tau)\, d\tau \int_\tau^t \sum_{i=0}^{1} F[v^m, v_t^m, v_x^m](x + (-1)^i(\theta - \tau), \tau)\, d\tau,$$

$$v_t^{m+1}(x, t) = z_t(x, t) + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^{2\pi} Q_1(\tau) \sum_{i=0}^{1} F[v^m, v_t^m, v_x^m](x + (-1)^i(t - \tau), \tau)\, d\tau -$$
$$- \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_0^{2\pi} ds \int_{x-t+s}^{x+t-s} F[v^m, v_t^m, v_x^m](\eta, s)\, d\eta,$$

$$v_x^{m+1}(x, t) = z_x(x, t) + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^{2\pi} Q_1(\tau) \sum_{i=0}^{1} (-1)^i F[v^m, v_t^m, v_x^m](x + (-1)^i(t - \tau), \tau)\, d\tau,$$

при достаточно малых значениях параметра ε, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, *сходится при* $m \to \infty$ *равномерно относительно* $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *к функциям* $\bar{v}(x, t)$, $\bar{v}_t(x, t)$, $\bar{v}_x(x, t)$, *периодическим по* t *с периодом* 2π, *удовлетворяющим системе интегральных уравнений* (12), *а следовательно, функция* $\bar{v}(x, t)$ *является решением краевой задачи* (9).

В дальнейшем наряду с краевой задачей (5) будем рассматривать краевую задачу

$$u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon f(x, t, u, u_t, u_x) - \mu(x, t),$$
$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, t + 2\pi) = u(x, t), \tag{13}$$

где $\mu(x, t) \in \bar{A}_{22}$.

О п р е д е л е н и е 1. *Назовем Δ-функцией относительно начальной функции $z(x, t)$ для краевой задачи* (5) *такую функцию $\mu(x, t) \in \bar{A}_{22}$, при которой решение краевой задачи* (13), *принимающее при $t = 0$ значение $u(x, 0) = z(x, 0)$, является периодическим с периодом 2π, если такая функция $\mu(x, t)$ единственная.*

Очевидно, начальное значение $z(x, t)$, для которого Δ-функция равна нулю, определяет начальное значение 2π-периодических решений краевой задачи (5).

О п р е д е л е н и е 2. *Краевую задачу* (5) *определим как 2π-гиперболическую дифференциальную систему второго класса третьего рода в области* (10), *если постоянные b, c, d, M и параметр ε связаны неравенствами $b \geqslant 2\varepsilon M\pi^2$, $c \geqslant 5\varepsilon M\pi/2$, $d \geqslant 2\varepsilon M\pi$ и выполнены условия теоремы* 2.

Теорема 2 легко решает вопрос существования Δ-функции для точек множества $D_f \subset D$. Для 2π-систем второго класса третьего рода верны следующие утверждения.

Т е о р е м а 3. *Любые начальные значения $(z, z_t, z_x) \in D_f$ при достаточно малых значениях параметра ε имеют Δ-функцию, причем*

$$\Delta(x, t) \equiv \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{F[\bar{v}, \bar{v}_t, \bar{v}_x](x + t - \tau, \tau) + F[\bar{v}, \bar{v}_t, \bar{v}_x](x - t + \tau, \tau)\} d\tau. \quad (14)$$

Т е о р е м а 4. *Решение $u = u(x, t)$ краевой задачи* (5), *являющейся 2π-системой третьего рода, для которого $(u(x, 0), u_t(x, 0), u_x(x, 0)) \in D_f$, будет периодическим с периодом 2π тогда и только тогда, когда Δ-функция, определяемая начальным значением $z(x, 0) = u(x, 0)$, равна нулю, причем имеет место равенство $u(x, t) = \bar{v}(x, t)$, где $\bar{v}(x, t)$ — предел ранее определенной последовательности 2π периодических функций $(v^m(x, t))$.*

Таким образом, задача существования и построения периодических решений 2π-систем второго класса третьего рода равносильна существованию такой функции $z(x, t)$, для которой Δ-функция равна нулю и построению приближений $v^m(x, t)$.

Согласно определению функции $z(x, t)$ (8) находим

$$z(x, t, a) = \sum_{k=1}^{\infty} (a'_k \cos kt + a''_k \sin kt) \sin kx, \quad a \in D_z, \quad (15)$$

где $a = (a'_1, a''_1, a'_2, a''_2, \ldots)$ — набор коэффициентов Фурье, определяющих функцию $z(x, t, a)$ такую, что

$$|z(x, t, a)| < b - 2\varepsilon M\pi^2, \quad |z_t(x, t, a) < c - 5\varepsilon M\pi/2, \quad |z_x(x, t, a)| < d - 2\varepsilon M\pi,$$
$$|\varepsilon| < \varepsilon_0, \quad (16)$$

а $D_z = \{a\}$ — множество коэффициентов Фурье, для которых выполнено условие (16).

Тогда, естественно, решение $\bar{v}(x, t)$ системы интегральных уравнений (12) и функцию (14) можно представить в виде

$$\bar{v} = \bar{v}(x, t, a), \quad \Delta(x, t, a) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} F[\bar{v}, \bar{v}_t, \bar{v}_x](x + t - \tau, \tau, a) +$$
$$+ F[\bar{v}, \bar{v}_t, \bar{v}_x](x - t + \tau, \tau, a)\} d\tau = \varepsilon \overline{F_1[\bar{v}]}. \quad (17)$$

Очевидно, точка a, для которой $\Delta(x, t, a) = 0$, является особой точкой отображения $\Delta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times D_f \to \mathbb{R}^2$,

$$\Delta(x, t, a) = \varepsilon \overline{F_1[\bar{v}]}. \quad (18)$$

Найти отображение (18) можно лишь приближенно, вычисляя, например, функции

$$\Delta_m(x, t, a) = \varepsilon \overline{F_1[v^m]}. \quad (19)$$

В связи с этим возникает задача, как, исходя из отображения (19), заключить о нулях отображения $\Delta(x, t, a)$, а следовательно, заключить о существовании 2π-периодических решений 2π-систем второго класса третьего рода. Заметим, что такая задача впервые успешно решена для отображения (18), когда функция F зависит только от переменных x, t, u, в работе [3].

С другой стороны, исходя из вида функции $z(x, t, a)$ (15) при $m = 0$, на основании (19) получаем

$$\Delta_0(x, t, a) = \varepsilon\overline{F_1[z]}. \tag{20}$$

Теперь предположим, что функция $F_1[z] \equiv F[z, z_t, z_x]\ (x, t) = f(x, t, z(x, t), z_t(x, t),\ z_x(x, t))$ разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье вида

$$F_1[z](x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^0(t, a)\sin kx. \tag{21}$$

На основании (20) и (21) находим

$$\Delta_0(x, t, a) = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty} f_k^0(\tau, a)[\sin k(x + t - \tau) + \sin k(x - t + \tau)]\,d\tau =$$

$$= \varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\sin kx\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_k^0(\tau, a)\cos k(t - \tau)\,d\tau.$$

Таким образом, $\Delta_0(x, t, a) = 0$ тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\Delta_0^{1k} \equiv \overline{f_k^0(t, a)\cos kt} = 0, \quad \Delta_0^{2k} \equiv \overline{f_k^0(t, a)\sin kt} = 0. \tag{22}$$

Отсюда на основании теоремы 2 и результатов работы [4] получаем следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 2 при* $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ *и условия:* а) *отображение*

$$\Delta_0^{1k}: \Delta_0^{1k} = \overline{f_k^0(t, a)\cos kt}, \quad \Delta_0^{2k}: \Delta_0^{2k} = \overline{f_k^0(t, a)\sin kt} \tag{23}$$

имеет особую точку $a = a^0 : \Delta_0^{1k}(a^0) = 0,\ \Delta_0^{2k}(a^0) = 0$; б) *существует замкнутая ограниченная область* $D_0 \subset D_z$ *и содержащая точку* a^0 *такая, что операторы* Δ_0^1 *и* Δ_0^2 *топологически отображают* D_0 *соответственно на* $\Delta_0^1 D_0$ *и* $\Delta_0^2 D_0$. *Тогда для значений параметра* ε, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, *для которых выполнено условие*

$$|z(x, t, a^0)| < b - 2\varepsilon M\pi^2, \quad |z_t| < c - 5\varepsilon M\pi, \quad |z_x| < d - 2\varepsilon M\pi, \tag{24}$$

краевая задача (5) *имеет* 2π-*периодическое решение.*

В качестве примера применения теоремы 5 сначала рассмотрим 2π-периодическую краевую задачу для автономного уравнения Ван-дер-Поля

$$u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon(1 - u^2)u_t,$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, t + 2\pi) = u(x, t). \tag{25}$$

За начальную функцию $z(x, t, a)$ выберем следующую функцию:

$$z(x, t, a) = a\cos t\sin x. \tag{26}$$

Теперь, вычисляя значения функции (21), на основании правой части уравнения (25) имеем

$$F[z, z_t, z_x](x, t, a) = -(1 - a^2\cos^2 t\sin^2 x)\,a\sin t\sin x \equiv \left(\frac{3}{4}a^3\cos^2 t\sin t - \right.$$

$$\left. - a\sin t\right)\sin x - \frac{1}{4}a^3\cos^2 t\sin t\sin 3x.$$

Таким образом,

$$f_1^0 = \frac{3}{4}a^3\cos^2 t\sin t - a\sin t, \quad f_3^0 = -\frac{1}{4}a^3\cos^2 t\sin t, \quad f_r^0 = 0,$$

$$r = 2, 4, 5, \ldots.$$

Далее, вычисляя значения функций $f_k^0 \sin kt$ и $f_k^0 \cos kt$, имеем

$$
\begin{aligned}
&f_1^0 \sin t = \frac{3}{16} a^3 \sin^2 2t - a \sin^2 t, \\
&f_1^0 \cos t = \frac{3}{8} a^3 \cos^2 t \sin 2t - \frac{1}{2} a \sin 2t, \\
&f_3^0 \sin 3t = -\frac{a^3}{32} (1 + \cos 2t - \cos 4t - \cos 6t), \\
&f_3^0 \cos 3t = \frac{a^3}{32} (\sin 2t - \sin 4t - \sin 6t), \\
&f_k^0 \cos kt = 0, \quad f_k^0 \sin kt = 0, \quad k = 2, 4, 5, \ldots .
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Отсюда, вычисляя средние значения $\overline{f_k \cos kt}$ и $\overline{f_k \sin kt}$, находим отображение (23):

$$
\Delta_0^{11} : \Delta_0^{11} = \frac{3}{32} a^3 - \frac{1}{2} a, \quad \Delta_0^{13} : \Delta_0^{13} = -\frac{1}{32} a^3, \quad \Delta_0^{ik} : \Delta_0^{ik} = 0, \quad i = 1, 2;
$$
$$
k = 2, 4, 5, \ldots . \tag{28}
$$

Следовательно, особая точка отображения (28) находится из системы

$$
\frac{3}{32} a^3 - \frac{1}{2} a = 0, \quad -\frac{1}{32} a^3 = 0. \tag{29}
$$

Система (29) имеет только нулевое решение $a = 0$. В этом случае начальная функция (26) тождественно равна нулю и уравнение Ван-дер-Поля вида (25) имеет только нулевое 2π-периодическое решение $u = 0$. Следовательно, в классе функций $\bar{A}_2$ нетривиальных 2π-периодических решений краевой задачи (25) не существует.

На основании проведенных выше исследований можно указать вид правых частей уравнения (5), для которых отображение (23) будет иметь отличную от нуля изолированную особую точку. Для этого достаточно рассмотреть, например, обобщенное уравнение Ван-дер-Поля

$$
u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon g(x, t) + \varepsilon (1 - u^2) u_t \equiv \varepsilon f(x, t, u, u_t, u_x), \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0,
$$
$$
u(x, t + 2\pi) = u(x, t), \tag{30}
$$

где

$$
g(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) \sin kx. \tag{31}
$$

Если $\overline{g_3(t) \sin 3t} = \alpha \neq 0$, $\overline{g_k(t) \sin kt} = 0$, $k = 1, 2, 4, 5, \ldots$, $\overline{g_k(t) \cos kt} = 0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, то на основании (27)—(29) особая точка отображения (23) находится из системы

$$
\frac{3}{32} a^3 - \frac{a}{2} = 0, \quad \alpha - \frac{1}{32} a^3 = 0. \tag{32}
$$

Решая систему (32), находим, что только при $a = 4\sqrt{3}/2$, $\alpha = a^3/32$ уравнение (30) имеет 2π-периодическое решение.

Следует отметить, что впервые на вид правой части, определяющей 2π-периодические решения краевой задачи (30), указано в работе [5].

Замечание. Краевая задача (30) кроме 2π-периодических решений может иметь решения периода $T = 2\pi(1 - \varepsilon\nu)$. Исследование таких решений проводится следующим образом: сначала производим в уравнении (5) замену

$$
t = \tau (1 - \varepsilon \nu). \tag{33}
$$

Тогда уравнение (5) примет вид

$$\partial^2u/\partial\tau^2 - (1-\varepsilon\nu)^2\,\partial^2u/\partial x^2 = \varepsilon(1-\varepsilon\nu)^2 f(x, \tau(1-\varepsilon\nu), u, u_t, u_x)$$

или

$$\partial^2u/\partial\tau^2 - \partial^2u/\partial x^2 = \varepsilon(2\nu - \varepsilon\nu^2)\,\partial^2u/\partial x^2 + \varepsilon(1-\varepsilon\nu^2) f. \tag{34}$$

2π-периодические решения по переменной τ уравнения (34) будем искать в виде $u(x,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\tau)\sin kx$. Тогда коэффициенты Фурье удовлетворяют счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$d^2u_k/d\tau^2 + k^2u_k = \varepsilon(2\nu - \varepsilon\nu^2)\,k^2u_k + \varepsilon(1-\varepsilon\nu)^2 f_k(\tau, u_1, u_2, \ldots), \tag{35}$$

где $f_k(\tau, u_1, u_2, \ldots)$ — коэффициенты Фурье разложения функции f по собственным функциям $\sin kx$. В системе (35) проиведем замену $u_k = v_k\cos k\tau + w_k\sin k\tau$, $du_k/d\tau = -kv_k\sin k\tau + kw_k\cos k\tau$. В результате алгебраических преобразований приходим к следующей счетной системе первого порядка:

$$\begin{aligned} dv_k/d\tau &= -\varepsilon(2\nu-\varepsilon\nu^2)\,k(v_k\cos k\tau + w_k\sin k\tau)\sin k\tau - \varepsilon(1-\varepsilon\nu)^2 \times \\ &\quad\times k^{-1}f_k(\tau, v_1\cos\tau + w_1\sin\tau, \ldots)\sin k\tau, \\ dw_k/d\tau &= \varepsilon(2\nu-\varepsilon\nu^2)\,k(v_k\cos k\tau + w_k\sin k\tau)\cos k\tau + \varepsilon(1-\varepsilon\nu^2) \times \\ &\quad\times k^{-1}f_k(\tau, v_1\cos\tau + w_1\sin\tau, \ldots)\cos k\tau. \end{aligned} \tag{36}$$

Усредненная система для системы (36) имеет вид

$$\begin{aligned} d\xi_k/d\tau &= -\varepsilon(2\nu-\varepsilon\nu^2)\,k\eta_k/2 - \varepsilon(1-\varepsilon\nu)^2 k^{-1}\overline{f_k\sin k\tau}, \\ d\eta_k/d\tau &= \varepsilon(2\nu-\varepsilon\nu^2)\,k\xi_k/2 + \varepsilon(1-\varepsilon\nu)^2 k^{-1}\overline{f_k\cos k\tau}. \end{aligned} \tag{37}$$

Теперь, полагая $\eta_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, \xi_1 \neq 0$, $\xi_k = 0$, $k = 2, 3, \ldots,$ на основании правых частей усредненной системы (37) получаем систему

$$\varepsilon\overline{f_1\sin\tau} = 0, \quad 2(2\nu-\varepsilon\nu^2)\,\xi_1 + \varepsilon(1-\varepsilon\nu)^2\,\overline{f_1\cos\tau} = 0, \quad \overline{f_k\sin k\tau} = 0,$$
$$\overline{f_k\cos k\tau} = 0 \tag{38}$$

для определения «квазистатического» решения ξ_1^0 усредненной системы (37) и значения ν, если такие решения данной системы существуют.

Таким образом, первое уравнение $\overline{f_1\sin\tau} = 0$ системы (38) определяет «квазистатическое» решение $\xi_1 \neq 0$ системы (37), второе уравнение при $\overline{f_1\cos\tau} \not\equiv 0$ определяет значение параметра ν, остальные уравнения системы (44) — вид правой части уравнения (5), при которой существуют $T = 2\pi(1-\varepsilon\nu)$-периодические решения краевой задачи (5).

1. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П.* О периодических решениях волновых уравнений второго порядка. III // Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, № 3.— С. 347—353.
2. *Хома Г. П.* О структуре обобщенных периодических решений гиперболических дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка.— Киев, 1985.— 32 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.65).
3. *Rabinowitz P. H.* Periodic Solutions of Nonlinear Hyperbolic Partial Differential Equations // Communs Pure App. Math.— 1967.— **20**, N 2.— P. 145—205.
4. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений.— Киев : Вища шк., 1976.— 182 с.
5. *Рудаков И. А.* Задача о свободных периодических колебаниях струны с немоннотонной нелинейностью // Успехи мат. науке.— 1985.— **241**, вып. 1.— С. 215—216.

Ин-т математики АН УССР, Киев
Тернопол. пед. ин-т

Получено 18.03.88