УДК 517.535.4

Н. Н. Строчик

Асимптотические оценки некоторых интегральных средних для мероморфных функций. II

Настоящая работа является непосредственным продолжением [1]. Предполагаем известными основные понятия и обозначения неванлинновской теории [2] и используем все обозначения из [1]. Кроме того, $N(r) = N(r, 0) + N(r, \infty)$.

Здесь для мероморфных в $\mathbb{C}$ функций f будут найдены в определенном смысле точные оценки сверху для нижнего предела (оценки снизу для верхнего предела) отношений $J_\delta(r, f)/N(r)$, $J_\delta^+(r, f)/T(r, f)$, где

$$J_\delta(r, f) = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \ln |f(re^{i\theta})|\, d\theta, \quad J_\delta^+(r, f) = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \ln^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta.$$

Буквами H, M, L и теми же буквами с индексами будем обозначать положительные постоянные, вообще говоря, различные в разных местах и, возможно, зависящие от μ. Введем также обозначения

$$z_\mu = \begin{cases} \varlimsup\limits_{r\to\infty} \dfrac{N(r, 0)}{N(r)}, & A(\mu) \geqslant 0, \\ \varliminf\limits_{r\to\infty} \dfrac{N(r, 0)}{N(r)}, & A(\mu) < 0, \end{cases}$$

$$w_\mu = \begin{cases} \varliminf\limits_{r\to\infty} \dfrac{N(r, \infty)}{N(r)}, & B(\mu) \geqslant 0, \\ \varlimsup\limits_{r\to\infty} \dfrac{N(r, \infty)}{N(r)}, & B(\mu) < 0. \end{cases}$$

Теорема. *Пусть f — мероморфная функция, $\lambda_* = \lambda_*[f]$, $\rho_* = \rho_*[f]$, $\lambda_* \leqslant \mu \leqslant \rho_*$, $\mu \notin \mathbb{Z}$, $0 < \delta \leqslant \pi$. Тогда*

$$\varliminf_{r\to\infty} J_\delta(r, f)/N(r, f) \leqslant (\pi/\delta) \inf\{\max\{A(\mu), -B(\mu)\} : \lambda_* \leqslant \mu \leqslant \rho_*, \ \mu \notin \mathbb{Z}\}, \quad (1)$$

$$\varliminf_{r\to\infty} J_\delta(r, f)/N(r) \leqslant (\pi/\delta) \inf\{\{A(\mu) z_\mu - B(\mu) w_\mu\} : \lambda_* \leqslant \mu \leqslant \rho_*, \ \mu \notin \mathbb{Z}\}, \quad (2)$$

$$\varliminf_{r\to\infty} J_\delta^+(r, f)/T(r) \leqslant (\pi/\delta) \inf\{\{A(\mu) - B(\mu) v_\mu\} : \lambda_* \leqslant \mu \leqslant \rho_*, \ \mu \notin \mathbb{Z}\}. \quad (3)$$

В [1] было показано, что для произвольных $R > R_0$, $R' > 2R$ существуют $t \in]R, 2R[$ и $s \in]R', 2R'[$ такие, что

$$\int_t^s r^{-\mu-1} J_\delta(r, f)\, dr \leqslant \frac{\pi}{\delta} \int_t^s r^{-\mu-1} \{A(\mu) N(r, 0) - B(\mu) N(r, \infty)\}\, dr + E, \quad (4)$$

где для E имеет место оценка (см. также [3])

$$|E| < K(T(2t)\, t^{-\mu} + T(2s)\, s^{-\mu}) + o\left(\int_t^s r^{-\mu-1} T(r)\, dr\right), \quad t \to \infty. \quad (5)$$

Докажем сначала следующую лемму.

Лемма. *Пусть f — мероморфная функция с $\lambda_* < \infty$ и $\lambda_* \leqslant \mu \leqslant \rho_*$, $\mu < \infty$, $\mu \notin \mathbb{Z}$. Тогда для произвольных $\varepsilon > 0$ и $M > R_0$ существуют t и s такие, что $M < t < s$,*

$$|E| < \varepsilon K(\mu) \int_t^s u^{-\mu-1} N(u)\, du.$$

С учетом неравенства $u + r > u$, переставляя порядок интегрирования, имеем

$$I_3 \leqslant \frac{1}{q+1-\mu} \int_{2t}^{s/2} \frac{N(u)}{u^{\mu+1}}\, du.$$

Учитывая (7), для $q \geqslant 1$ получаем

$$I_5 < \frac{T(2t)}{t^q} \int_{2t}^{s/2} r^{q-\mu-1} dr + \frac{T(2s)}{s^q} \int_{2t}^{s/2} r^{q-\mu} dr =$$

$$= \frac{T(2t)}{t^\mu} \frac{2^{q-\mu} - \left(\frac{2t}{s}\right)^{\mu-q}}{\mu - q} + \frac{T(2s)}{s^\mu} \frac{2^{\mu-q-1} - \left(\frac{2t}{s}\right)^{q+1-\mu}}{q+1-\mu}.$$

Для $q = 0$ и $\mu > 0$ имеем

$$I_5 < T(2t) \int_{2t}^{s/2} \ln\left(\frac{r}{t}\right) r^{-\mu-1} dr + T(2s) \int_{2t}^{s/2} \frac{r}{s} r^{-\mu-1} dr =$$

$$= \frac{T(2t)}{\mu^2 t^\mu} \left\{ 2^{-\mu}(1 + \mu \ln 2) - \left(\frac{s}{2t}\right)^{-\mu} \left(1 + \mu \ln \frac{s}{2t}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{T(2s)}{(1-\mu) s^\mu} \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\mu} - \left(\frac{2t}{s}\right)^{1-\mu}\right\} \leqslant H_5 (T(2t)\, t^{-\mu} + T(2s)\, s^{-\mu}).$$

Пусть $\{t_n\}$ — последовательность пиков Пойа второго типа порядка μ для функции $T(r)$, $2\tau \in \{t_n\}$, $2\sigma \in \{t_n\}$, $\tau/4 < t < \tau < \sigma/4 < s < \sigma$, $\tau/\sigma \to 0$, $\tau \to \infty$ и для t и s выполняется (4). Используя неравенства [1, 5]

$$T(2t)\, t^{-\mu} < T(2\tau)\, \tau^{-\mu} 4^\mu,\ T(2s)\, s^{-\mu} < T(2\sigma)\, \sigma^{-\mu} 4^\mu, \tag{11}$$

$$T(2\tau)\, \tau^{-\mu} + T(2\sigma)\, \sigma^{-\mu} < M_1 \varepsilon_1 \int_\tau^\sigma r^{-\mu-1} T(r)\, dr, \tag{12}$$

$\varepsilon_1 \to 0$ при $\tau \to \infty$,

$$\left| \left(\int_\tau^\sigma - \int_t^s\right) T(r)\, r^{-\mu-1} dr \right| < M_2 \varepsilon \int_t^s r^{-\mu-1} T(r)\, dr,$$

получаем

$$I_1 + I_4 + I_5 < \varepsilon M_3 \int_t^s r^{-\mu-1} T(r)\, dr, \tag{13}$$

$$I_2 + I_3 \leqslant \frac{1}{(\mu - q)(q + 1 - \mu)} \int_{2t}^{s/2} \frac{N(u)}{u^{\mu+1}}\, du. \tag{14}$$

Тогда из неравенств (9), (10), (13) и (14) следует

$$\int_t^s r^{-\mu-1} T(r)\, dr < L_1 \varepsilon \int_t^s r^{-\mu-1} T(r)\, dr + L_2 \int_{2t}^{s/2} \frac{N(u)}{u^{\mu+1}}\, du,$$

или

$$(1 + o(1)) \int_t^s r^{-\mu-1} T(r)\, dr < L_2 \int_t^s \frac{N(u)}{u^{\mu+1}}\, du,\ t \to \infty. \tag{15}$$

Утверждение леммы следует из (11), (12) и (15).

Доказательство теоремы. С помощью леммы из (4) получаем

$$\int_t^s r^{-\mu-1}\left\{J_\delta(r, f) - \frac{\pi}{\delta}(A(\mu)N(r, 0) - B(\mu)N(r, \infty)) + \varepsilon LN(r)\right\} dr \leqslant 0.$$

Отсюда на некоторой последовательности $r = r_n \to \infty$ выполняется

$$J_\delta(r, f) \leqslant (\pi/\delta)\{A(\mu)N(r, 0) - B(\mu)(N(r) - N(r, 0)) + \varepsilon LN(r)\},$$

и так как $\max\{A(\mu)x - B(\mu)(N(r) - x): 0 \leqslant x \leqslant N(r)\} = N(r)\max\{A(\mu), -B(\mu)\}$, то

$$J_\delta(r, f) \leqslant (\pi/\delta)N(r)(\max\{A(\mu), -B(\mu)\} + \varepsilon L), \tag{16}$$

откуда следует (1).

Чтобы получить (2), разделим обе части (16) на $N(r)$ и перейдем к пределу при $r \to \infty$.

Обозначим теперь $g_\varphi(z) = f(z) - e^{i\varphi}$, ($z = re^{i\theta}$, $\varphi \in [0, 2\pi[$) и применим к g_φ неравенство (4):

$$\int_t^s r^{-\mu-1}J_\delta(r, g_\varphi)\, dr \leqslant (\pi/\delta)\int_t^s r^{-\mu-1}\{A(\mu)N(r, e^{i\varphi}, f) - B(\mu)N(r, \infty, f)\}\, dr + E, \tag{17}$$

где

$$|E| < \varepsilon L\int_t^s r^{-\mu-1}T(r, g_\varphi)\, dr \leqslant \varepsilon L\int_t^s r^{-\mu-1}\{T(r, f) + \ln 2\}\, dr.$$

Интегрируя (17) по φ от 0 до 2π и используя формулу Картана, получаем

$$\int_t^s r^{-\mu-1}J_\delta^+(r, f)\, dr \leqslant \frac{\pi}{\delta}\int_t^s r^{-\mu-1}\{A(\mu)T(r, f) - B(\mu)N(r, \infty, f) + \varepsilon L(T(r, f) + \ln 2)\}\, dr.$$

Таким образом, для некоторых сколь угодно больших t и s

$$\int_t^s r^{-\mu-1}\left\{J_\delta^+(r, f) - \frac{\pi}{\delta}(A(\mu)T(r, f) - B(\mu)N(r, \infty, f)) + \varepsilon L(T(r, f) + \ln 2)\right\} dr \leqslant 0.$$

Тогда существует последовательность $r = r_n \to \infty$, на которой

$$J_\delta^+(r, f) \leqslant (\pi/\delta)(A(\mu)T(r, f) - B(\mu)N(r, \infty, f) + \varepsilon L(T(r, f) + \ln 2)). \tag{18}$$

Разделив (18) на $T(r, f)$ и перейдя к пределу при $r \to \infty$, получим (3).

О точности оценок (1)—(3) см [1], замечание 2.

1. *Строчик Н. Н.* Асимптотические оценки некоторых интегральных средних для мероморфных функций // Укр. мат. журн.— 1986.— 38, № 6.— С. 763—767.
2. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций.— М. : Наука, 1970.— 592 с.
3. *Fuchs W. H. J.* On the growth of meromorphic functions on rays // Stud. Pure Math. Mem. Paul Turán.— Budapest, 1983.— P. 219—229.
4. *Miles J., Shea D. F.* On the growth of meromorphic functions having at least one deficient value // Duke Math. J. —1976.— 43, N 1.— P. 171—186.
5. *Петренко В. П.* Рост мероморфных функций.— Харьков : Вища шк., 1978.— 136 с.

Ин-т прикл. пробл. механики и математики
АН УССР, Львов

Получено 10.11.86