УДК 517.535.4

А. З. Мохонько

Оценка модуля логарифмической производной функции, мероморфной в угловой области, и ее применение

Используем обозначения теории мероморфных функций [1]. Пусть $\{a_m\}$ — множество нулей, $\{b_k\}$ — множество полюсов мероморфной функции $f(z)$, $z \in D_1 = \{z : \operatorname{Im} z \geqslant 0,\ |z| \geqslant r_0\}$. Обозначим через $\{c_n\}$ теоретико-множественную сумму последовательностей $\{a_m\}$, $\{b_k\}$; $c_n = |c_n| \exp(i\theta_n)$. Далее буквой K будем обозначать различные константы.

Теорема 1. *Если* $z = r\exp(i\varphi)$, $r_0 + 1 < |z| < R$, $\operatorname{Im} z > 0$, *то*

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| < \left(4\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^4 + 2\,\frac{R+r}{R-r}\,\frac{R^2}{r^2\sin^2\varphi}\right)(S(R,f)+K) +$$

$$+ \frac{4(R+r)^2}{R-r} \sum_{|c_n| < (R+r)/2} \sin\theta_n / |z - c_n|\,|z - \bar{c}_n|, \qquad (1)$$

где $S(R,f)$ — *неванлинновская характеристика* $f(z)$; *если* $f(z)$ *имеет конечный порядок* ρ, *то* ($\varepsilon > 0$)

$$|f'(z)/f(z)| < K\,|z|^{2\rho+2+\varepsilon}\sin^{-2}\varphi,\ z \bar{\in} E, \qquad (2)$$

E — *множество кругов с конечной суммой радиусов.*

Замечание. Если функция $f(z)$ мероморфна в угловой области $\{z : \alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta, |z| > r_1\}$, соотношения аналогичные (1), (2) можно получить, вводя функцию $f_1(z) = f(z^{1/k}e^{i\alpha})$, $k = \pi/(\beta - \alpha)$, мероморфную в области $\{z : \operatorname{Im} z \geqslant 0,\ |z| \geqslant r_0\}$ [1, с. 41]. Оценка (2) зависит от $\varphi = \arg z$. В то же время для мероморфной в $\mathbb{C}$ функции f конечного порядка ρ выполняется неравенство [2, с. 87] $|f'(z)/f(z)| < K\,|z|^{2\rho+\varepsilon}$, $z \in \mathbb{C} \setminus E$, E — множество кругов с конечной суммой радиусов. В [3] построен пример, показывающий, что лемма Неванлинны о логарифмической производной для функций, мероморфных в полуплоскости, неверна. Из этого примера, в частности, следует, что для таких функций нельзя получить оценку модуля логарифмической производной, которая была бы равномерной относительно $\arg z$. Подобно теореме Валирона [2] оценку (2) можно использовать в аналитической теории дифференциальных уравнений при изучении решений, мероморфных в угловой области (теорема 2).

Пусть

$$F(z, \nu) = \ln[(s^2 - z\bar{\nu})(z - \bar{\nu})(z - \nu)^{-1}(s^2 - z\nu)^{-1}],$$
$$z \in D = \{z : r_0 < |z| < s, \quad \operatorname{Im} z > 0\}. \tag{3}$$

По формуле Неванлинны [1, с. 15] (теоремы 2.1 и 2.3)

$$\ln|f(z)| = \pi^{-1} \int\limits_{[-s, -r_0] \cup [r_0, s]} \ln|f(t)| \left\{ \frac{r \sin\varphi}{|z - t|^2} - \frac{s^2 r \sin\varphi}{|s^2 - zt|^2} \right\} dt +$$
$$+ (2\pi)^{-1} \int\limits_0^\pi \ln|f(\nu)| \operatorname{Re}\left[\frac{\nu + z}{\nu - z} - \frac{\bar{\nu} + z}{\bar{\nu} - z}\right]_{\nu = se^{i\theta}} d\theta -$$
$$- \sum_{|a_m| < s} \operatorname{Re} F(z, a_m) + \sum_{|b_k| < s} \operatorname{Re} F(z, b_k) +$$
$$+ \frac{r_0}{2\pi} \int\limits_0^\pi \left[\ln|f(\nu)| \frac{\partial \operatorname{Re} F(z, \nu)}{\partial n} - \operatorname{Re} F(\ldots) \frac{\partial \ln|f(\nu)|}{\partial n}\right]_{\nu = r_0 e^{i\theta}} d\theta, \tag{4}$$

$\partial/\partial n$ — оператор дифференцирования по внешней нормали к границе D. Функции $r \sin\varphi/|z - t|^2$, $s^2 r \sin\varphi/|s^2 - zt|^2$, $z \in D$, гармонические, поэтому

$$\frac{r \sin\varphi}{|z - t|^2} = \operatorname{Re}\lambda(z, t), \quad \frac{s^2 r \sin\varphi}{|s^2 - zt|^2} = \operatorname{Re}\mu(z, t), \tag{5}$$

$$\frac{r \sin\varphi}{|z - t|^2} - \frac{s^2 r \sin\varphi}{|s^2 - zt|^2} = \operatorname{Re}\Phi(z, t), \tag{6}$$

где $\lambda(z, t)$, $\mu(\ldots)$, $\Phi(\ldots)$ — аналитические функции по z, $z \in D$. Справедлива формула

$$\ln f(z) = \pi^{-1} \int\limits_{[-s, -r_0] \cup [r_0, s]} \ln|f(t)| \Phi(z, t)\, dt +$$
$$+ (2\pi)^{-1} \int\limits_0^\pi \ln|f(\nu)| \left[\frac{\nu + z}{\nu - z} - \frac{\bar{\nu} + z}{\bar{\nu} - z}\right]_{\nu = se^{i\theta}} d\theta - \sum_{|a_m| < s} F(z, a_m) +$$
$$+ \sum_{|b_k| < s} F(z, b_k) + Q(z, s), \tag{7}$$

где

$$Q(z, s) = r_0 (2\pi)^{-1} \int\limits_0^\pi [\ln|f(\nu)|\, \partial F(z, \nu)/\partial n - F(z, \nu)\, \partial \ln|f(\nu)|/\partial n]_{\nu = r_0 e^{i\theta}} d\theta + iC. \tag{8}$$

Действительно, правая и левая части (7) содержат аналитические функции от z. В силу (4)—(8) действительные части этих функций совпадают; из условий Коши—Римана следует, что функции равны с точностью до постоянной. Далее мы продифференцируем обе части (7) по z. На дуге

$\{\nu : \nu = r \exp(i\theta),\ 0 < \theta < \pi\}$ в (7) выполняется $\partial F(\nu, z)/\partial n = \partial F(re^{i\theta}, z)/\partial r$. Поэтому (см. (3))

$$\partial F/\partial n\,|_{\nu=r_0e^{i\theta}} = -z(s^2e^{i\theta} - zr_0)^{-1} + (ze^{-i\theta} - r_0)^{-1} + z(s^2e^{-i\theta} - zr_0)^{-1} - (ze^{i\theta} - r_0)^{-1}. \tag{9}$$

Пусть

$$r_0 + 1 < |z| < s, \quad s > \max(2r_0, r_0 + 1). \tag{10}$$

Тогда $|s^2e^{i\theta} - zr_0| > s^2 - sr_0$, $|ze^{i\theta} - r_0| > 1$. Дифференцируя (9) по z и оценивая модуль производной, получаем

$$|(\partial F(z, r_0e^{i\theta})/\partial n)'_z| < 4. \tag{11}$$

Из (3) следует $F'_z = -(z-\nu)^{-1} - \bar\nu(s^2 - z\bar\nu)^{-1} + \nu(s^2 - \nu z)^{-1} + (z - \bar\nu)^{-1}$. Если $|\nu| = r_0$ и выполняется (10), то $|z - \nu| > 1$, $|z - \bar\nu| > 1$,

$$|F'_z(z, \nu)|_{|\nu|=r_0} < 4. \tag{12}$$

Производную F'_z можно записать так ($\nu = |\nu| \exp(i\theta)$):

$$F'_z = \frac{i2|\nu|(z^2 - s^2)(s^2 - |\nu|^2)\sin\theta}{(s^2 - \nu z)(s^2 - z\bar\nu)(z - \bar\nu)(z - \nu)}, \tag{13}$$

$$|F'_z(z, \nu)| < \frac{4|\nu|\sin\theta}{|z - \nu||z - \bar\nu|}\,\frac{s^2 + |z|^2}{s(s - |z|)}. \tag{14}$$

Так как $f(r_0e^{i\theta}) \neq 0, \infty$, то $|\partial \ln|f(r_0e^{i\theta})|/\partial n| < K$, $|\ln|f(r_0e^{i\theta})|| < K$, $0 < \theta < \pi$, и, учитывая (8), (11) и (12), имеем

$$|Q'_z(s, z)| < 4r_0K = \text{const}. \tag{15}$$

Согласно (5) ($z = x + iy$) $\operatorname{Re}\lambda = y((x-t)^2 + y^2)^{-1}$, $\operatorname{Re}\mu = s^2y((s^2 - xt)^2 + y^2t^2)^{-1}$. Поэтому для аналитических функций λ, μ из условий Коши—Римана следует

$$|\lambda'_z(z, t)| = |(\operatorname{Re}\lambda)'_x - i(\operatorname{Re}\lambda)'_y| = ((x - t)^2 + y^2)^{-1} = |z - t|^{-2} \leqslant (r\sin\varphi)^{-2},\ z = re^{i\varphi},\ t \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

$$|\mu'_z| = |(\operatorname{Re}\mu)'_x - i(\operatorname{Re}\mu)'_y| = s^2|s^2 - zt|^{-2} \leqslant (s\sin\varphi)^{-2}. \tag{17}$$

Принимая во внимание (6), (16) и (17), получаем

$$|\Phi'_z(z, t)| = |\lambda'_z - \mu_z| < 2(r\sin\varphi)^{-2},\ z = re^{i\varphi}, \tag{18}$$

$$\left|\left(\frac{\nu + z}{\nu - z} - \frac{\bar\nu + z}{\bar\nu - z}\right)'_z\right| = \left|\frac{4s(z^2 - |\nu|^2)\sin\theta}{(z - \nu)^2(z - \bar\nu)^2}\right| < 8s^3\sin\theta(s - r)^{-4},\ \nu = se^{i\theta}. \tag{19}$$

Продифференцируем (7) по z. Учитывая (14), (15), (18) и (19), находим

$$|f'(z)/f(z)| < 4s^3\pi^{-1}(s - r)^{-4}\int_0^\pi |\ln|f(se^{i\theta})||\sin\theta d\theta + 2\pi^{-1}r^{-2}\sin^{-2}\varphi \int_{[-s,-r_0]\cup[r_0,s]} |\ln|f(t)||dt + 8s^2(s - r)^{-1}\sum_{|c_k|<s}|z - c_k|^{-1}|z - \bar c_k|^{-1}\sin\theta_k + K. \tag{20}$$

В [1, с. 38] определены неванлинновские характеристики $A(r, f)$, $B(r, f)$, $C(r, f)$, $S(r, f)$ функции f. Известно [1, с. 39 — 43], что

$$B(r, f) + B(r, 1/f) < 2S(r, f) + K,\ A(r, f) + A(r, 1/f) < 2S(r, f) + K,$$
$$B(r, f) < S(R, f) + K,\ r < R,\ |\ln|f|| = \ln^+|f| + \ln^+|1/f|. \tag{21}$$

Положим $R = 2s - r$, $(r = |z| < s)$, $s = (R + r)/2$. Если $|t| < s$, то $t^{-2} - R^{-2} > s^{-2} - R^{-2}$. Поэтому

$$(s^{-2} - R^{-2})\pi^{-1} \int\limits_{[-s,-r_0]\cup[r_0,s]} |\ln|f(t)|\,dt <$$
$$< \pi^{-1} \int\limits_{[-s,-r_0]\cup[r_0,s]} (t^{-2} - R^{-2})|\ln|f(t)||\,dt < A(R, f) +$$
$$+ A(R, 1/f) < 2S(R, f) + K. \tag{22}$$

Полагая в (20) $s = (R + r)/2$, учитывая (21), (22) и определения неванлинновских характеристик, получаем (1). Пусть в (1) $R = 2r$. Так как $z, c_k \in \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, то $|z - \bar{c}_k| > r\sin\varphi$, $z = r\exp(i\varphi)$ и (1) можно переписать так:

$$|f'(z)/f(z)| < K\left((S(2r, f) + 1)\sin^{-2}\varphi + \sin^{-1}\varphi \sum_{|c_k|<3r/2} |z - c_k|^{-1}\sin\theta_k\right). \tag{23}$$

Справедливо неравенство (аналогичное доказано в [1, с. 55])

$$c(t, 0, \infty) = \sum_{|c_k|<t} \sin\theta_k < 4t(S(2t, f) + K). \tag{24}$$

Предположим, что f имеет конечный порядок ρ_1. Тогда

$$S(r, f) < Kr^{\rho_2},\ r > r_0,\ \rho_2 > \rho_1. \tag{25}$$

Из (24), (25) следует

$$c(t, 0, \infty) = \sum_{|c_k|<t} \sin\theta_k < Kt^{\rho_2+1}. \tag{26}$$

Из каждой точки $C_k \in D_1$, как из центра, проведем окружность радиуса $|c_k|^{-\rho-1}\sin\theta_k$, $\rho > \rho_2$. Через E обозначим множество точек, лежащих внутри всех этих окружностей. Покажем, что сумма длин диаметров кружков из E конечна. Действительно, из (26) следует

$$\sum_{|c_k|>r_0} |c_k|^{-\rho-1}\sin\theta_k = \int\limits_{r_0}^{\infty} t^{-\rho-1}dc(t, 0, \infty) =$$
$$= c(t, 0, \infty)\,t^{-\rho-1}\Big|_{r_0}^{\infty} + (\rho + 1)\int\limits_{r_0}^{\infty} c(t, 0, \infty)\,t^{-\rho-2}dt <$$
$$< (\rho + 1)K\int\limits_{r_0}^{\infty} t^{\rho_2-\rho-1}dt < \mathrm{const},\ \rho_2 < \rho. \tag{27}$$

Введем обозначения: $\varphi_1 = \min(\varphi, \pi - \varphi)$, $z = r\exp(i\varphi)$,

$$\begin{gathered} G_1 = \{te^{i\theta} : r_0 < t < 3r/2,\ \varphi_1/2 < \theta < \pi - (\varphi_1/2)\}, \\ G = \{te^{i\theta} : r_0 < t < 3r/2,\quad 0 < \theta < \pi\},\ G_2 = G \setminus G_1. \end{gathered} \tag{28}$$

Предположим, что $z \in G \setminus E$, $c_k \in G$. Тогда

$$|z - c_k|^{-1} \sin\theta_k < |c_k|^{\rho+1} < (2r)^{\rho+1}. \quad (29)$$

Если $c_k = |c_k| \exp(i\theta_k) \in G_1$, то $\sin\theta_k \geqslant \sin(\varphi_1/2)$, и учитывая (29), имеем $|z - c_k|^{-1} < Kr^{\rho+1} \sin^{-1}(\varphi_1/2)$. Поэтому

$$\sum_{c_k \in G_1} |z - c_k|^{-1} \sin\theta_k < Kr^{\rho+1} \sin^{-1}(\varphi_1/2) \sum_{c_k \in G_1} \sin\theta_k. \quad (30)$$

Если $c_k \in G_2$, то $|z - c_k| > r\sin(\varphi_1/2)$, и

$$\sum_{c_k \in G_2} |z - c_k|^{-1} \sin\theta_k < r^{-1} \sin^{-1}(\varphi_1/2) \sum_{k \in G_2} \sin\theta_k. \quad (31)$$

Из (28) — (31) следует

$$\sum_{c_k \in G} |z - c_k|^{-1} \sin\theta_k < Kr^{\rho+1} \sin^{-1}(\varphi_1/2) \sum_{c_k \in G} \sin\theta_k. \quad (32)$$

Поэтому, учитывая (23), (28), (32), (25) и (26), получаем $|f'(z)/f(z)| < Kr^{2\rho+2} \sin^{-2}(\varphi_1/2)$, $z \overline{\in} E$, $\rho > \rho_2$, $\varphi_1 = \min(\varphi, \pi - \varphi)$, $z = r\exp(i\varphi)$. Оценка (2) доказана.

Теорема 2. *Пусть* $f(z)$, $z \in D = \{z : \alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta,\ |z| > R\}$ — *мероморфное решение дифференциального уравнения* $\sum_{j=0}^{l} (f')^j \sum_{k=0}^{\varkappa_j} a_{kj}(z) f^k = 0$, $a_{kj}(z) = (1 + o(1))\, b_{kj} z^{\alpha_{kj}}$, $z \in D$, $z \to \infty$, $b_{kj} = \mathrm{const}$, $\alpha_{kj} \in \mathbb{R}$, $\nu = \mathrm{const}$, $0 < \nu < (\beta - \alpha)/2$.

Тогда либо $|f(z)| < |z|^{\varkappa+\varepsilon}$, $z \in \{z : \alpha + \nu \leqslant \arg z \leqslant \beta - \nu,\ |z| > a\} \setminus E$, $\varepsilon > 0$, $a = a(\nu) > 0$, *либо* $\ln M(r, f) = (1 + o(1))\, cr^{\rho}$, $r \to \infty$, $r \overline{\in} \Delta$, $\mathrm{mes}\,\Delta < \infty$; c, ρ, $\varkappa = \mathrm{const}$, *определяемые по виду уравнения*, E — *множество кругов с конечной суммой радиусов*, $M(r, f) = \max|f(z)|$, $|z| = r$, $\alpha + \nu \leqslant \arg z \leqslant \beta - \nu$.

Относительно теоремы 2 заметим следующее. Известно [4], что любое мероморфное решение $f(z)$, $z \in D$, имеет конечный порядок роста. Поэтому к $f(z)$ применима формула (2). Это позволяет при доказательстве теоремы 2 использовать методы, известные для целых и мероморфных в $\mathbb{C}$ решений см. [2, с. 87, 100]. Для голоморфных в угловой области решений в [5] доказана оценка $\ln M(r, f) < cr^{\rho}$, а для мероморфных решений f известна оценка сверху неванлинновской характеристики $S(r, f)$ [4].

1. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций.— М. : Наука, 1970.— 592 с.
2. *Стрелиц Ш. И.* Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений.— Вильнюс: Минтис, 1972.— 468 с.
3. *Гольдберг А. А.* Лемма Неванлинны о логарифмической производной мероморфной функции // Мат. заметки.— 1975.— 17, № 4.— С. 525—529.
4. *Гольдберг А. А., Мохонько А. З.* О скорости роста решений алгебраического дифференциального уравнения в угловых областях // Дифференц. уравнения.— 1975.— 11, № 9.— С. 1568—1574.
5. *Bank S.* On solutions of algebraic differential equations in the sectors // J. London Math. Soc.— 1969.— 1.— P. 145—154.
6. *Мохонько А. З.* Оценки неванлинновских характеристик алгеброидных функций и их приложения к дифференциальным уравнениям // Сиб. мат. журн.— 1982.— 23, № 1.— С. 103—113.

Львов, политехн. ин-т

Получено 05.08.86