УДК 519.21

Б. В. Бондарев, И. Л. Воробьева

Об усреднении в криволинейных границах стохастических гиперболических систем

Пусть случайное поле $\xi_\varepsilon(x, y)$ является решением уравнения

$$\xi_\varepsilon(x, y) = \alpha(x) + \beta(y) + \varepsilon \int_0^x \int_0^y a(s, t, \xi_\varepsilon(s, t))\, ds dt + \varepsilon w(x, y),$$

$$\xi_\varepsilon(x, 0) = \alpha(x), \quad \xi_\varepsilon(0, y) = \beta(y), \quad \alpha(0) = \beta(0),$$

$$0 \leqslant x \leqslant S/\sqrt{\varepsilon}, \quad 0 \leqslant y \leqslant T/\sqrt{\varepsilon},$$

$w(x, y)$ — винеровское поле на плоскости, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, неслучайная функция $a(s, t, z)$ такая, что для любых $s \geqslant 0$, $t \geqslant 0$

$$|a(s, t, z)| \leqslant C(1 + |z|), \quad \left| \frac{\partial}{\partial z} a(s, t, z) \right| \leqslant K. \tag{1}$$

Предположим, что равномерно по a, b, z существует предел

$$\lim_{\substack{S \to +\infty \\ T \to +\infty}} \frac{1}{ST} \int_a^{a+T} \int_b^{b+S} a(s, t, z)\, ds dt = a_0(z). \tag{2}$$

Известно [1], что тогда $\xi_\varepsilon(x/\sqrt{\varepsilon}, y/\sqrt{\varepsilon})$ слабо сходится при $\varepsilon \to 0$ к решению детерминированного уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = a_0(u(x, y)), \quad u(x, 0) = \alpha(x), \quad u(0, y) = \beta(y).$$

В работе [1] доказано, что если существует $\frac{\partial^2}{\partial z^2} a(s, t, z)$, удовлетворяющая условию Липшица по z и при $\varepsilon \to 0$

$$\sup_{\substack{0\leqslant x\leqslant S\\ 0\leqslant y\leqslant T}} \left| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^x \int_0^y [a(s/\sqrt{\varepsilon}, t/\sqrt{\varepsilon}, u(s,t)) - a_0(u(s,t))]\, ds dt \right| = \varphi_1(\varepsilon) \to 0,$$

$$\sup_{\substack{0\leqslant x\leqslant S\\ 0\leqslant y\leqslant T}} \left| \int_0^x \int_0^y \left[\frac{\partial}{\partial z} a(s/\sqrt{\varepsilon}, t/\sqrt{\varepsilon}, u(s,t)) - G(u(s,t))\right] ds dt \right| \to 0, \tag{3}$$

то $\eta_\varepsilon(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\xi_\varepsilon(x/\sqrt{\varepsilon}, y/\sqrt{\varepsilon}) - u(x, y))$ слабо сходится при $\varepsilon \to 0$ к решению линейного стохастического уравнения гиперболического типа

$$\eta(x, y) = \int_0^x \int_0^y G(u(s,t))\, \eta(s,t)\, ds dt + w(x, y).$$

Представляет интерес оценка скорости сходимости $\eta_\varepsilon(x, y)$ к $\eta(x, y)$ в криволинейных границах.

Пусть $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ — неслучайные функции, определенные на $D = [0, S] \times [0, T]$,

$$Q_\varepsilon = P\{f_1(x, y) < \eta_\varepsilon(x, y) < f_2(x, y); (x, y) \in D\},$$

$$Q = P\{f_1(x, y) < \eta(x, y) < f_2(x, y), (x, y) \in D\}.$$

Теорема. *Предположим, что выполнены условия* (1)—(3) *и, кроме того,*

$$\left| \frac{1}{N^2} \int_a^{a+N} \int_b^{b+N} \left(\frac{\partial}{\partial z} a(s, t, z) - G(z)\right) ds dt \right| \leqslant \frac{K_1}{N^{1+\theta}},$$

$\theta > 0$, *постоянная* $K_1 > 0$ *не зависит от* a, b *и* N,

$$\left| \frac{\partial}{\partial z} a(s, t, z)\Big|_{z=z_1} - \frac{\partial}{\partial z} a(s, t, z)\big|_{z=z_2} \right| \leqslant L\, |z_1 - z_2|,$$

для $f_i(x, y)$, $i = \overline{1, 2}$, *справедливо*

$$\int_0^S \int_0^T \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \left(G(u(s,t)) f_i(s,t) - \frac{\partial^2 f_i(s,t)}{\partial s \partial t} \right) \right| ds dt \leqslant A_{i1},$$

$$\int_0^S \left| \frac{\partial}{\partial s} \left(G(u(s,T)) f_i(s,T) - \frac{\partial^2 f_i(s,t)}{\partial s \partial t}\Big|_{t=T} \right) \right| ds \leqslant A_{i2},$$

$$\int_0^T \left| \frac{\partial}{\partial t} (G(u(S,t)) f_i(S,t) - \frac{\partial^2 f_i(s,t)}{\partial s \partial t}\Big|_{s=S} \right| dt \leqslant A_{i3},$$

$$\left| G(u(S,T)) f_i(S,T) - \frac{\partial^2 f_i(s,t)}{\partial s \partial t}\Big|_{\substack{s=S\\ t=T}} \right| \leqslant A_{i4},$$

где A_{ik}, $k = \overline{1, 4}$, — *константы.*

Пусть функции $\psi_i(\varepsilon)$, $i = \overline{1, 3}$, *такие, что*

$$\psi_1(\varepsilon) = \varphi_1(\varepsilon) \exp\{(K + \sqrt[4]{\varepsilon} L \exp\{KST\})\, ST\},$$

$$\psi_2(\varepsilon)=\sqrt[6]{\varepsilon}LST\exp\{3KST\},\quad \psi_3(\varepsilon)=\varepsilon^{\beta/(1/2-\alpha)},$$

где $0<\alpha<1/2,\ 0<\beta<(1+\theta)/(3+2\theta)$, *и*

$$\psi(\varepsilon)=\sum_1^3\psi_i(\varepsilon),\quad K_2=C(1+CST\exp\{CST\}),$$

$$\mu_1(\varepsilon)=\frac{\psi_3(\varepsilon)}{2\exp\{2KST\}(2K^2ST(S+T)\varepsilon^{\beta}+K_1\varepsilon^{(1/2-\beta)(1+\theta)}+\varepsilon^{1+\beta}K_2(S+T))},$$

$$\mu_2(\varepsilon)=\frac{\psi_3(\varepsilon)}{8KST\exp\{KST\}\varepsilon^{\frac{1}{2}-\beta}}.$$

Тогда при $\varepsilon\to 0$

$$|Q_\varepsilon-Q|\leqslant B(\psi(\varepsilon))^{1/(\delta+1)}+\gamma(\varepsilon), \tag{4}$$

где

$$\gamma(\varepsilon)=\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{ST}\left(\sqrt[4]{\varepsilon}\exp\left\{-\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}ST}\right\}+\sqrt[6]{\varepsilon}\exp\left\{-\frac{1}{2\sqrt[3]{\varepsilon}ST}\right\}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\mu_1(\varepsilon)}\exp\{-\mu_1^2(\varepsilon)\}\right)+1-\left(1-\frac{4}{\sqrt{2\pi}\mu_2(\varepsilon)}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sqrt{T}\exp\left\{-\frac{\mu_2^2(\varepsilon)}{2T}\right\}+\sqrt{S}\exp\left\{-\frac{\mu_2^2(\varepsilon)}{2S}\right\}\right)\right)^{\frac{S+T+2}{\varepsilon^{\beta}}},$$

константа B *не зависит от* ε, $\delta>0$ — *сколь угодно малая величина.*

Доказательство основано на использовании приемов из [2, 3]. Последовательно вводя случайные поля

$$\tilde{\eta}_\varepsilon(x,y)=\int_0^x\int_0^y\frac{\partial}{\partial z}a(s/\sqrt{\varepsilon},t/\sqrt{\varepsilon},(u(s,t)+\theta_1\sqrt{\varepsilon}\tilde{\eta}_\varepsilon(s,t))\tilde{\eta}_\varepsilon(s,t)\,dsdt+$$

$$+\tilde{w}(x,y),\quad 0<\theta_1<1,$$

$$\tilde{\eta}(x,y)=\int_0^x\int_0^y G(u(s,t))\tilde{\eta}(s,t)\,dsdt+\tilde{w}(x,y),$$

$$\zeta_\varepsilon(x,y)=\int_0^x\int_0^y\frac{\partial}{\partial z}a(s/\sqrt{\varepsilon},t/\sqrt{\varepsilon},u(s,t))\zeta_\varepsilon(s,t)\,dsdt+\tilde{w}(x,y),$$

(здесь $\tilde{w}(x,y)=\sqrt{\varepsilon}w(x/\sqrt{\varepsilon},y/\sqrt{\varepsilon})$), при достаточно малом $\varepsilon>0$ получаем $\sum_1^3 p_i\leqslant\gamma(\varepsilon)$, где

$$p_1=P\{\sup_{(x,y)\in D}|\eta_\varepsilon(x,y)-\tilde{\eta}_\varepsilon(x,y)|>\psi_1(\varepsilon)\},$$

$$p_2=P\{\sup_{(x,y)\in D}|\tilde{\eta}_\varepsilon(x,y)-\zeta_\varepsilon(x,y)|>\psi_2(\varepsilon)\},$$

$$p_3=P\{\sup_{(x,y)\in D}|\zeta_\varepsilon(x,y)-\tilde{\eta}(x,y)|>\psi_3(\varepsilon)\}.$$

Учитывая, что $\eta(x,y)$ и $\tilde{\eta}(x,y)$ одинаково распределены, имеем $P\{f_1(x,y)+$ $+\psi(\varepsilon)<\eta(x,y)<f_2(x,y)-\psi(\varepsilon);\ (x,y)\in D\}-\sum_1^3 p_i<Q_\varepsilon<P\{f_1(x,y)-$

$-\psi(\varepsilon) < \eta(x, y) < f_2(x, y) + \psi(\varepsilon); (x, y) \in D\} + \sum_1^3 p_i$. Очевидно, что $|Q_\varepsilon - Q| \leqslant 2\sum_1^3 p_i + S_1 + S_2$, где $S_i = P\{|\eta(x, y) - f_i(x, y)| < \psi(\varepsilon)\}$, $i = \overline{1, 2}$. Известно [4, с. 28], что меры, соответствующие случайным полям $\eta_i^*(x, y) = \eta(x, y) - f_i(x, y)$ и $w(x, y)$, эквивалентны и

$$S_i \leqslant M\chi\{|w(x, y)| < \psi(\varepsilon); (x, y) \in D\} \exp\left\{\int_0^S\int_0^T \left(G(u(s, t)) w(s, t) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + G(u(s, t)) f_i(s, t) - \frac{\partial^2 f_i(s, t)}{\partial s \partial t}\right) w(ds, dt)\right\}, \quad i = \overline{1, 2}.$$

Применяя формулу интегрирования по частям [4, с. 15], формулу Ито для двупараметрических стохастических интегралов [5], представления в виде стохастических интегралов по некоторым винеровским полям для непрерывных с вероятностью 1 сильных мартингалов с характеристиками, абсолютно непрерывными относительно меры Лебега [4, с. 13], после несложных преобразований получаем оценки для S_i:

$$S_i \leqslant \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi S T}} \psi(\varepsilon)\right)^{1/(\delta+1)} \exp\left\{\sum_{k=1}^4 A_{ik} + \frac{3(\delta+1)}{2\delta^2}\int_0^S\int_0^T G^2(s, t)\, st\, ds\, dt\right\},$$

$$i = \overline{1, 2},$$

что и завершает доказательство теоремы.

Замечание. Нетрудно показать, что правая часть неравенства (4) стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

1. *Лукачер Б. Я.* Предельные теоремы для одного класса стохастических дифференциальных уравнений // Теория случайных процессов.— 1978.— Вып. 6.— С. 88—97.
2. *Скороход А. В.* Одна предельная теорема для однородных цепей Маркова // Теория вероятностей и ее применения.— 1963.— 8, вып. 1.— С. 67—75.
3. *Новиков А. А.* О малых уклонениях гауссовских процессов // Мат. заметки.— 1981.— 29, вып. 2.— С. 291—301.
4. *Кнопов П. С.* Оптимальные оценки параметров стохастических систем.— Киев : Наук. думка, 1981.— 152 с.
5. *Гихман Ил. И.* О формуле Ито для двупараметрических стохастических интегралов // Теория случайных процессов.— 1976.— Вып. 4.— С. 40—48.

Дон. ун-т

Получено 12.07.87