УДК 517.948.35

В. Е. Слюсарчук

Об экспоненциальной дихотомии решений импульсных систем

Пусть E—банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_E$, $R=(-\infty, \infty)$, T—непустое множество вещественных чисел, для которого $\operatorname{card}([a, a+1] \cap T) < \infty$ $\forall\, a \in R$ ($\operatorname{card} M$—число элементов множества M), $\mathfrak{X}^0$—банахово пространство непрерывных на $R \setminus T$ и непрерывных справа на T ограниченных E-значных функций $x = x(t)$ с нормой $\|x\|_{\mathfrak{X}^0} = \sup\limits_{t \in R} \|x(t)\|_E$, $\mathfrak{X}^1$ — банахово пространство функций $x = x(t) \in \mathfrak{X}^0$, для которых $d_+ x(t)/dt \in \mathfrak{X}^0$ ($d_+ x(t)/dt$ —правая производная $x(t)$ в точке t) с нормой $\|x\|_{\mathfrak{X}^1} = \|x\|_{\mathfrak{X}^0} + \|d_+ x/dt\|_{\mathfrak{X}^0}$, $\mathfrak{N}$ — банахово пространство определенных на T E-значных функций $g = g(t)$, для которых $\alpha(g) = \sup \left\{ \sum\limits_{t \in [a, a+1] \cap T} \|g(t)\|_E : a \in R, [a, a+1] \cap T \neq \varnothing \right\} < \infty$, с нормой $\|g\|_{\mathfrak{N}} = \alpha(g)$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{gathered} d_+ x(t)/dt - A(t)x(t) = f(t), \quad t \in R, \\ x(\tau) - x(\tau - 0) - B(\tau)x(\tau - 0) = g(\tau), \quad \tau \in T, \end{gathered} \tag{1}$$

в которой $f \in \mathfrak{X}^0$, $g \in \mathfrak{N}^0$, $A(t)$ — ограниченная на R непрерывная на $R \setminus T$ и непрерывная справа на T $L(E, E)$-значная функция, а $B(\tau)$— определенная на T $L(E, E)$-значная функция, для которой

$$b = \sup \left\{ \sum_{\tau \in [a, a+1] \cap T} \|B(\tau)\|_{L(E,E)} : a \in R, [a, a +] \cap T \neq \varnothing \right\} < \infty. \tag{2}$$

Системе (1) соответствует оператор $\mathfrak{A} \in L(\mathfrak{X}^1, \mathfrak{X}^0 \times \mathfrak{N})$, определенный равенством $\mathfrak{A}x = (f, g)$, где $x \in \mathfrak{X}^1$, $f(t) = d_+ x(t)/dt - A(t)x(t) \in \mathfrak{X}^0$ и $g(\tau) = x(\tau) - x(\tau - 0)\, B(\tau)x(\tau - 0) \in \mathfrak{N}$.

Целью данной работы является описание связи между обратимостью оператора $\mathfrak{A}$ и экспоненциальной дихотомией решений системы

$$\begin{gathered} d_+ x(t)/dt - A(t)x(t) = 0, \\ x(\tau) - x(\tau - 0) - B(\tau)x(\tau - 0) = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

где $t \in R$, $\tau \in T$, хорошо известной для дифференциальных уравнений [1—4], дифференциально-функциональных уравнений [5, 6] и разностных уравнений [7].

1. Основная теорема. Будем говорить, что для решений системы (3) имеет место экспоненциальная дихотомия на R (система э-дихотомична), если для каждого $s \in R$ пространство E распадается в прямую сумму замкнутых подпространств $E = E_+(s) + E_-(s)$, причем выполняются следующие условия:

а) проекторы $P_+(s)$ и $P_-(s)$ на подпространства $E_+(s)$ и $E_-(s)$ равномерно ограничены, т. е.

$$\sup_{t \in R} \|P_+(s)\|_{L(E,E)} + \sup_{t \in R} \|P_-(s)\|_{L(E,E)} < \infty; \tag{4}$$

б) каждому $z \in E_+(s)$ поставлено в соответствие решение $x(t)$ ($x(s) = z$) системы (3), где $t \geqslant s$ и $\tau \in T \cap (s, +\infty)$, удовлетворяющее оценке $\|x(t)\|_E \leqslant N_1 q_1^{t-s} \|z\|_E$ $\forall\, t \geqslant s$ с некоторыми $N_1 > 0$ и $q_1 \in (0, 1)$, не зависящими от t и s;

в) каждому $z \in E_-(s)$ поставлено в соответствие решение $x(t)$ ($x(s) = z$) системы (3), где $t \leqslant s$ и $\tau \in T \cap (-\infty, s]$, удовлетворяющее оценке

$\| x(t) \|_E \leqslant N_2 q_2^{s-t} \| z \|_E \; \forall t \leqslant s$ с некоторыми $N_2 > 0$ и $q_2 \in (0,1)$ не зависящими от t и s.

Теорема 1. *Система* (3) *э-дихотомична тогда и только тогда, когда оператор* $\mathfrak{U}$ *имеет непрерывный обратный.*

Замечание 1. Достаточные условия обратимости оператора приводятся, например, в [8—10].

В основе доказательства теоремы 1 лежат разностные уравнения и понятие эволюционного оператора системы (3).

2. Эволюционный оператор. Из ограничений на $A(t)$ и $B(\tau)$ следует, что для произвольных $s \in R$ и $z \in E$ система (3) имеет единственное решение $y(t)$, $t \geqslant s$, удовлетворяющее условию $y(s) = z$. Определим оператор $S(t, s): E \to E$ равенством $S(t, s) z = y(t)$. Этот оператор будем называть эволюционным (разрешающим) оператором системы (3).

Пусть τ' и τ'' — такие элементы множества T, что $\tau' < \tau''$ и $(\tau', \tau'') \cap T = \varnothing$, а $U(t, \tau)$, где $\tau' < \tau \leqslant t < \tau''$, — эволюционный оператор дифференциального уравнения $dx(t)/dt = A(t)x(t)$ [1]. Из ограничений на $A(t)$ следует, что существует $U(\tau'' - 0, \tau') = \lim\limits_{t \to \tau'' - 0} U(t, \tau') \in L(E, E)$.

Пусть $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m\} = [s, t] \cap T$, $m \geqslant 2$, $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_m$ и $C_k = (I + B(\tau_k))U(\tau_k - 0, \tau_{k-1})$, $k = \overline{2,m}$, где I — единичный оператор. Анализируя систему (3), убеждаемся в том, что

$$S(t, s)\begin{cases} U(t, \tau_m)C_m C_{m-1} \ldots C_2 (I + B(\tau_1))U(\tau_1 - 0, s), & \text{если } s < \tau_1, \\ U(t, \tau_m)C_m C_{m-1} \ldots C_2, & \text{если } s = \tau_1. \end{cases}$$

Если множество $[s, t] \cap T$ состоит из одного элемента τ, то

$$S(t, s) = \begin{cases} U(t, \tau)(I + B(\tau))U(\tau - 0, s), & \text{если } s < \tau, \\ U(t, \tau), & \text{если } s = \tau. \end{cases}$$

Если же $[s, t] \cap T = \varnothing$, то $S(t, s) = U(t, s)$. Отсюда получаем

$$\| S(t, s) \|_{L(E,E)} \leqslant e^{(a+b)(t-s)+b}, \tag{5}$$

где $a = \sup\limits_{t \in R} \| A(t) \|_{L(E,E)}$, а b — число, входящее в соотношение (2).

С помощью оператора $S(t, s)$ удобно исследовать решения системы (1). Нетрудно проверить, что для каждого решения $x(t)$ системы (1) и произвольных чисел t и δ, $\delta < t$, имеет место равенство

$$x(t) = S(t, \delta)x(\delta) + \int\limits_{\delta}^{t} S(t, \tau) f(\tau) d\tau + \sum_{\tau \in (\delta, t] \cap T} S(t, \tau) g(\tau). \tag{6}$$

3. Доказательство теоремы 1. Пусть Z — множество всех целых чисел, а $\mathfrak{M}$ — банахово пространство ограниченных на Z E-значных функций $y = y(n)$ с нормой $\| y \|_{\mathfrak{M}} = \sup\limits_{n \in Z} \| y(n) \|_E$.

Возьмем произвольное $\varepsilon \in [0, 1)$ и рассмотрим оператор $\mathfrak{B}_\varepsilon \in L(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$, определенный равенством $(\mathfrak{B}_\varepsilon y)(n) = y(n) - S(n + \varepsilon, n - 1 + \varepsilon) y(n - 1)$ $n \in Z$, (оператор $\mathfrak{B}_\varepsilon$ непрерывный в силу (5)).

Пусть оператор $\mathfrak{A} \in L(\mathfrak{X}^1, \mathfrak{X}^0 \times \mathfrak{N})$ имеет непрерывный обратный. Покажем, что система (3) э-дихотомична.

Возьмем произвольный элемент $\beta = \beta(n)$ пространства $\mathfrak{M}$. Найдутся $f \in \mathfrak{X}^0$ и $g \in \mathfrak{N}$, для которых

$$\int\limits_{n-1+\varepsilon}^{n+\varepsilon} S(n + \varepsilon, \tau) f(\tau) d\tau + \sum_{\tau \in (n-1+\varepsilon, n+\varepsilon] \cap T} S(n + \varepsilon, \tau) g(\tau) = \beta(n) \;\; \forall n \in Z. \tag{7}$$

Действительно, если $(n - 1 + \varepsilon, n + \varepsilon] \cap T = \varnothing$, то на отрезке $[n - 1 + \varepsilon, n + \varepsilon]$ функцию $f(t)$ можно положить равной $\frac{\pi}{2} \; |\sin \pi (n - 1 + \varepsilon - t)| \times$

$\times S^{-1}(n+\varepsilon, t)\beta(n)$ (на этом отрезке $S(n+\varepsilon, t) \equiv U(n+\varepsilon, t)$ и поэтому существует $S^{-1}(n+\varepsilon, t)$, причем $\| S^{-1}(n+\varepsilon, t)\|_{L(E,E)} \leqslant e^a \forall t \in [n-1+\varepsilon, n+\varepsilon]$ [1], где a — та же постоянная, что и в соотношении (5)). Если же $(n-1+\varepsilon, n+\varepsilon] \cap T \neq \varnothing$, то предполагаем, что $f(t)=0 \ \forall t \in [n-1+\varepsilon, n+\varepsilon]$ и $g(\tau) = 0 \ \forall \tau \in (n-1+\varepsilon, \mu) \cap T$, где $\mu = \max\{\nu : \nu \in (n-1+\varepsilon, n+\varepsilon] \cap T\}$, а $g(\mu) = S^{-1}(n+\varepsilon, \mu)\beta(n)$ (здесь $S(n+\varepsilon, \mu) = U(n+\varepsilon, \mu)$; следовательно, существует $S^{-1}(n+\varepsilon, \mu)$, причем $\| S^{-1}(n+\varepsilon, \mu)\|_{L(E,E)} \leqslant e^a$). Определенные таким образом $f(t)$ и $g(\tau)$ удовлетворяют соотношению (7) и для них, очевидно, выполняется соотношение

$$\| f \|_{\mathfrak{X}^0} + \| g \|_{\mathfrak{N}} \leqslant 2e^a \| \beta \|_{\mathfrak{M}} . \tag{8}$$

Пусть $x(t)$ — решение системы уравнений (1) с правыми частями f и g, удовлетворяющими соотношению (7). Согласно (6) $x(n+\varepsilon) = S(n+\varepsilon, n-1+\varepsilon)x(n-1+\varepsilon) + \beta(n)$, $n \in Z$. Поэтому область значений $R(\mathfrak{B}_\varepsilon)$ оператора $\mathfrak{B}_\varepsilon$ совпадает с $\mathfrak{M}$. Ядро $\operatorname{Ker} \mathfrak{B}_\varepsilon$ оператора $\mathfrak{B}_\varepsilon$ совпадает с нулевым элементом, поскольку аналогичным свойством обладает оператор $\mathfrak{A}$. Следовательно, оператор $\mathfrak{B}_\varepsilon$ имеет непрерывный обратный $\mathfrak{B}_\varepsilon^{-1}$.

Заметим, что

$$\sup_{\varepsilon \in [0,1)} \| \mathfrak{B}_\varepsilon^{-1} \|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})} < \infty. \tag{9}$$

Если же это соотношение не выполняется, то найдутся последовательности $\varepsilon_k \in [0, 1)$, $\beta_k \in \mathfrak{M}$ ($\| \beta_k \|_{\mathfrak{M}} = 1 \quad \forall k \geqslant 1$) и $x_k \in \mathfrak{M}$ ($\lim_{k\to\infty} \| x_k \|_{\mathfrak{M}} = +\infty$), для которых $\mathfrak{B}_{\varepsilon_k} x_k = \beta_k$, $k \geqslant 1$. Пусть $f_k(t)$ и $g_k(\tau)$ удовлетворяют соотношениям (7) и (8), в которых $\beta = \beta_k$, а $z_k = z_k(t)$ — решение уравнения $\mathfrak{A} z_k = (f_k, g_k)$. Поскольку $z_k(n+\varepsilon_k) = x_k(n+\varepsilon_k)$ для всех $k \geqslant 1$ и $n \in Z$, то $\lim_{k\to\infty} \| z_k \|_{\mathfrak{X}^1} = +\infty$, что противоречит обратимости оператора $\mathfrak{A}$, так как $\|(f_k, g_k)\|_{\mathfrak{X}^0 \times \mathfrak{N}} \leqslant e^a \quad \forall k \geqslant 1$ в силу (8). Итак, соотношение (9) выполняется.

Из обратимости оператора $\mathfrak{B}_\varepsilon$ следует, что разностное уравнение

$$y(n) = S(n+\varepsilon, n-1+\varepsilon)y(n-1) \tag{10}$$

экспоненциально дихотомично [11], т. е. для каждого $m \in Z$ пространство E распадается в прямую сумму замкнутых подпространств $E = E_+(\varepsilon, m) + E_-(\varepsilon, m)$, причем выполняются следующие условия:

а) проекторы $Q_+(\varepsilon, m)$ и $Q_-(\varepsilon, m)$ на подпространства $E_+(\varepsilon, m)$ и $E_-(\varepsilon, m)$ равномерно ограничены, т. е. $\sup_{m\in Z} \| Q_+(\varepsilon, m)\|_{L(E,E)} + \sup_{m\in Z} \| Q_- \times (\varepsilon, m)\|_{L(E,E)} < \infty$;

б) для каждого $z \in E_+(\varepsilon, m)$ решение $y(n)$ задачи $y(n+1) = S(n+1+\varepsilon, n+\varepsilon)\, y(n)$, $n \geqslant m$, $y(m) = z$ удовлетворяет оценке $\| y(n)\|_E \leqslant N_1 q_1^{n-m} \| z \|_E \ \forall n \geqslant m$ с некоторыми $N_1 > 0$ и $q_1 \in (0,1)$, не зависящими от n и m;

в) для каждого $z \in E_-(\varepsilon, m)$ решение $y(n)$ задачи $y(n+1) = S(n+1+\varepsilon, n+\varepsilon)\, y(n)$, $n \leqslant m$, $y(m) = z$ удовлетворяет оценке $\| y(n)\|_E \leqslant N_2 q_2^{m-n} \| z \|_E \ \forall n \leqslant m$ с некоторыми $N_2 > 0$ и $q_2 \in (0,1)$, не зависящими n и m.

Аналогичным свойством обладает и система (3). Действительно, возьмем произвольное $s \in R$. В качестве $E_+(s)$ и $E_-(s)$ возьмем соответственно $E_+(\{s\}, [s])$ и $E_-(\{s\}, [s])$, где $\{s\}$ и $[s]$ — дробная и целая части числа s, а в качестве проекторов $P_+(s)$ и $P_-(s)$ на подпространства $E_+(s)$ и $E_-(s)$ — соответственно операторы $Q_+(\{s\}, [s])$ и $Q_-(\{s\}, [s])$. Согласно [11]

$$Q_+(\{s\}, [s]) = G_{\{s\}}([s], [s]), \tag{11}$$

$$Q_-(\{s\}, [s]) = -S(s, s-1)\, G_{\{s\}}([s-1], [s]), \tag{12}$$

где $G_{\{s\}}(n, [s])$, $n \in Z$,— операторное решение уравнения

$$X(n+1) = S(n+\{s\},\ n-1+\{s\})\,X(n) + \begin{cases} I, & \text{если } n=[s-1], \\ 0, & \text{если } n \neq [s-1]. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$\| G_{\{s\}}(n,\ [s]) \|_{L(E,B)} \leqslant \| \mathfrak{B}_{\{s\}}^{-1} \|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})}$$

для всех $s \in R$ и $n \in Z$. Поэтому в силу (11), (12), (5) и (9) проекторы $P_+(s)$ и $P_-(s)$ равномерно ограничены, т. е. выполняется соотношение (4) условия а).

Покажем, что для системы уравнений (3) выполняются также условия б) и в) (см. п. 1). Возьмем произвольные $s \in R$ и $z \in E_+(s)$. Поскольку разностное уравнение (10) э-дихотомично при $\varepsilon = \{s\}$, то найдутся постоянные $N \geqslant 1$ и $q \in (0,\ 1)$ такие, что для решения $x(t)$ системы (3) при $t \geqslant s$ и $\tau \in (s,\ +\infty) \cap T$, для которого $x(s) = z$, выполняется неравенство

$$\| x(s+[t-s]) \|_E \leqslant N q^{[t-s]} \| z \|_E.$$

Учитывая равенство $x(t) = S(t,\ s+[t-s])\,x(s+[t-s])$, $t \geqslant s$, и вытекающее из него на основании (5) неравенство $\| x(t) \|_E \leqslant e^{a+2b} \| x(s+[t-s]) \|_E\ \ \forall\, t \geqslant s$, получаем $\| x(t) \|_E \leqslant N e^{a+2b} q^{[t-s]} \| z \|_E\ \ \forall\, t \geqslant s$. Отсюда следует $\| x(t) \|_E \leqslant N q^{-1} e^{a+2b} q^{t-s} \| z \|_E\ \ \forall\, t \geqslant s$, т. е. для (3) выполняется условие б). Если $z \in E_-(s)$, то в силу э-дихотомичности уравнения (10) при $\varepsilon = \{s\}$ найдутся постоянные $N \geqslant 1$ и $q \in (0,1)$ такие, что для решения $x(t)$ системы (3) при $t \leqslant s$ и $\tau \in (-\infty,\ s] \cap T$, для которого $x(s) = z$, выполняется неравенство $\| x(s+[t-s]) \|_E \leqslant N q^{-[t-s]} \| z \|_E$. Поскольку $s + [t-s] \leqslant t\ \forall t \leqslant s$, то $x(t) = S(t,\ s+[t-s])\ x(s+[t-s])$ и, следовательно, $\| x(t) \|_E \leqslant e^{a+2b} \| x(s+[t-s]) \|_E \forall\ t \leqslant s$. Поэтому $\| x(t) \|_E \leqslant N e^{a+2b} q^{-[t-s]} \| z \|_E\ \ \forall\ t \leqslant s$. Отсюда следует $\| x(t) \|_E \leqslant N q^{-1} e^{a+2b} q^{s-t} \| z \|_E$ $\forall\ t \leqslant s$, т. е. для (3) выполняется условие в).

Итак, из обратимости оператора $\mathfrak{U}$ следует, что система (3) э-дихотомична.

Покажем, что справедливо обратное утверждение. Пусть система уравнений (3) э-дихотомична. Тогда

$$\operatorname{Ker} \mathfrak{A} = 0. \tag{13}$$

Очевидно также, что разностное уравнение (10) э-дихотомично для каждого $\varepsilon \in [0,\ 1)$ и, следовательно, для каждого $\varepsilon \in [0,\ 1)$ оператор $\mathfrak{B}_\varepsilon$ имеет непрерывный обратный [11].

Покажем, что

$$R(\mathfrak{A}) = \mathfrak{X}^0 \times \mathfrak{R}. \tag{14}$$

Возьмем произвольные $f \in \mathfrak{X}^0$, $g \in \mathfrak{R}$ и рассмотрим элемент $\beta = \beta(n) \in \mathfrak{M}$, определенный соотношением (7) при $\varepsilon = 0$. Пусть $u = u(n)$ — решение уравнения $\mathfrak{B}_0 u = \beta$. Тогда функция

$$x(t) = S(t,[t])\ u([t]) + \int\limits_{[t]}^{t} S(t,\ \tau) f(\tau)\, d\tau + \sum_{\tau \in ([t],t] \cap T} S(t,\ \tau)\, g(\tau)$$

(последнее слагаемое при $t = [t]$ предполагается равным 0) в силу равенства $\mathfrak{B}_0 u = \beta$, неравенства (5) и включений $f \in \mathfrak{X}^0$, $g \in \mathfrak{R}$ является элементом пространства $\mathfrak{X}^1$ и решением системы (1). Отсюда с учетом произвольности выбора f и g следует равенство (14). Это равенство вместе с равенством (13) обеспечивает обратимость оператора $\mathfrak{A}$. Теорема 1 доказана.

4. Случай почти периодической системы (3). Систему (3) будем называть почти периодической, если $L(E,\ E)$-значная функция $S(n,\ n-1)$, $n \in Z$, является почти периодической [11].

Обозначим через K множество вполне непрерывных линейных операторов $A: E \to E$.

Теорема 2. *Пусть*: 1) $\inf \{ \| \mathfrak{A}x \|_{\mathfrak{X}^0 \times \mathfrak{R}} : \| x \|_{\mathfrak{X}^1} = 1 \} > 0$; 2) $S(n,\ n-1)$ — *почти периодическая K-значная функция. Тогда система* (3) *э-дихотомична.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что первое условие теоремы обеспечивает выполнение соотношения $\inf\{\|\mathfrak{B}_0 y\|_{\mathfrak{M}} : \|y\|_{\mathfrak{M}} = 1\} > 0$. А это соотношение и второе условие теоремы обеспечивают обратимость оператора $\mathfrak{B}$ (см. теорему 2 [11]). Но тогда на основании рассуждений, проведенных в заключительной части предыдущего параграфа, имеет место соотношение (14) и, следовательно, оператор $\mathfrak{U}$ обратим (здесь также учтено первое условие теоремы), что эквивалентно экспоненциальной дихотомии решений системы (3).

З а м е ч а н и е 2. Рассматриваемый в теореме 2 случай: $S(n, n-1) \in K$ $\forall n \in Z$ имеет место, если, например, $\dim E < \infty$, или для каждого $n \in Z$ найдется $\tau \in (n-1, n)$, для которого $I + B(\tau) \in K$.

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1970.— 534 с.
2. *Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С.* Нелинейные почти периодические колебания.— М. : Наука, 1970.— 351 с.
3. *Массера Х. Л., Шеффер Х. Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства.— М. : Мир, 1970.— 456 с.
4. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Мир, 1970.— 720 с.
5. *Колесов Ю. С.* Необходимые и достаточные условия экспоненциальной дихотомии решений линейных почти периодических уравнений с последействием // Вестн. Яросл. ун-та.— 1973.— Вып. 5.— С. 28—62.
6. *Курбатов В. Г.* О дихотомии решений уравнений нейтрального типа // Исследования по устойчивости и теории колебаний.— Ярославль: Ярославл. ун-т.— 1977.— С. 158—166.
7. *Coffman S. U., Schäffer J. J.* Dichotomies for linear difference equations // Math. Ann.— 1967.— **172**.— P. 139—166.
8. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Периодические решения слабо нелинейных систем с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения.— 1978.— **14**, № 6.— С. 1034—1045.
9. *Слюсарчук В. Е.* Ограниченные решения систем близких к импульсным // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1981.— № 6.— С. 24—26.
10. *Слюсарчук В. Е.* Ограниченные решения импульсных систем // Дифференц. уравнения.— 1983.— **19**, № 4.— С. 588—596.
11. *Слюсарчук В. Е.* Об экспоненциальной дихотомии решений дискретных систем // Укр. мат. журн.— 1983.— **35**, № 1.— С. 109—114.

Укр. ин-т инженеров вод. хоз-ва, Ровно

Получено 30.09.86