УДК 517.5

Ю. И. Мельник

Обратные теоремы приближения регулярных в выпуклых многоугольниках функций экспоненциальными полиномами в интегральной метрике

1. Данная работа является непосредственным продолжением [1]. Для удобства напомним некоторые обозначения и определения из [1]. Пусть $\overline{M}$ — замкнутый выпуклый многоугольник в $\mathbb{C}$ с вершинами в точках $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \ldots, \gamma_N$, $N \geqslant 3$, содержащий точку 0. Пусть $\mathcal{L}(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} d_k \exp(\gamma_k \lambda)$, $d_k \neq 0$,— экспоненциальный полином (квазиполином). Целая функция $\mathcal{L}(\lambda)$ обладает следующими свойствами (положительные постоянные, различные в разных выражениях, ниже обозначаются a, A, A_k и т. п.)

а) для достаточно больших $\lambda_0 > 0$ при $|\lambda| > \lambda_0$ все нули $\mathcal{L}(\lambda)$ простые;

б) при $|\lambda| > \lambda_0$ нули $\mathcal{L}(\lambda)$ (обозначим их через $\lambda_m^{(j)}$) имеют вид $\lambda_m^{(j)} = \overset{0}{\lambda}{}_m^{(j)} + \xi_m^{(j)}$, где $\overset{0}{\lambda}{}_m^{(j)} \underset{\mathrm{df}}{=} 2\pi m i/(\gamma_{j+1} - \gamma_j) + q_j \exp(i\alpha_j)$, $|\xi_m^{(j)}| \leqslant A \exp(-am)$, $j = 1, \ldots, N$; $\gamma_{N+1} = \gamma_1$; q_j, α_j — некоторые числа;

в) для фиксированных j, $k \geqslant 0$ и любых $z \in \overline{M}$ имеет место оценка

$$|(\lambda_m^{(j)})^k \exp(\lambda_m^{(j)} z)/\mathcal{L}'(\lambda_m^{(j)}) - (\lambda_m^{(j)})^k (-1)^m B_j \exp\{\overset{0}{\lambda}{}_m^{(j)}(z - (\gamma_j + \gamma_{j+1})/2)\}| \leqslant \leqslant A_k \exp(-am),$$

где $B_j \neq 0$ — некоторые числа.

В силу свойств а), б) множество Λ нулей $\mathcal{L}(\lambda)$ можно представить в виде $\Lambda = \{\lambda_m\}_{m=1}^{m_0} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{N} \{\lambda_m^{(j)}\}_{m=m(j)}^{\infty}\right)$, где m_0 и $m(j)$, $j = 1, \ldots, N$,— некоторые фиксированные натуральные числа. Учитывая свойство, а), ниже для простоты предполагаем, что нули λ_m, $1 \leqslant m \leqslant m_0$, простые.

Через $E^p(M)$, $p \geqslant 1$, обозначим пространство регулярных в M функций $f(z)$, для которых

$$\sup_{0<r<1} \int_{C_r} |f(z)|^p |dz| < \infty,$$

где C_r — образ окружности $w = r$ при конформном отображении круга $|w| \leqslant 1$ на многоугольник $\overline{M}$. Известно, что функция $f \in E^p(M)$ имеет почти всюду на $C = \partial M$ угловые граничные значения, определяющие функцию (сохраним для нее обозначение $f(z)$), p-я степень модуля которой интегрируема на C. В пространстве $E^p(M)$ вводится норма по формуле

$$\|f\|_p \equiv \|f\|_{E^p(M)} \overset{\mathrm{df}}{=} \left\{\int_C |f(z)|^p |dz|\right\}^{1/p},$$

после чего оно становится банаховым.

Для функций $f \in E^p(M)$ введем (интегральный) модуль непрерывности по формуле

$$\omega_p(f; h) = \sup_{|t| \leqslant h} \left\{\int_0^L |f(z(u+t)) - f(z(u))|^p du\right\}^{1/p},$$

где $z(u)$ — параметрическое уравнение $C: z(u) = \gamma_j + (\gamma_{j+1} - \gamma_j)(u - L_{j-1})/l_j$ при $L_{j-1} \leqslant u L_j$, $j = 1, \ldots, N$, где $l_j = |\gamma_{j+1} - \gamma_j|$ — длина стороны $[\gamma_j; \gamma_{j+1}]$, $L_0 = 0$, $L_j = \sum_{k=1}^{j} l_k$, $L = L_N = \sum_{k=1}^{N} l_k$. Функция $\omega_p(f; h)$ обладает всеми свойствами модуля непрерывности (т. е. при $h > 0$ непрерывна, возрастающая, полуаддитивна и $\omega_p(f; +0) = 0$).

В работе устанавливаются обратные теоремы приближения функций $f \in E^p(M)$, $1 < p < \infty$, квазиполиномами вида

$$\mathcal{P}_n(z) = \sum_{m=1}^{m_0} \varkappa_m^{(n)} \exp(\lambda_m z)/\mathcal{L}'(\lambda_m) + \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=m(j)}^{N} \varkappa_{jm}^{(n)} \exp(\lambda_m^{(j)} z)/\mathcal{L}'(\lambda_m^{(j)}), \qquad (1)$$

где $\varkappa_m^{(n)}$, $\varkappa_{jm}^{(n)} \in \mathbb{C}$ — некоторые коэффициенты, аналогичные известным обратным теоремам приближения периодических функций тригонометрическими полиномами.

2. Теорема 1 (обратная). *Пусть $\omega(h)$ — модуль непрерывности, $f \in E^p(M)$, $1 < p < \infty$, и существует последовательность квазиполиномов вида* (1) *такая, что*

$$\| f - \mathcal{P}_n \|_p \leqslant A_1 \omega(1/n). \qquad (2)$$

Тогда

$$\omega_p(f; h) \leqslant A_2 h \int_h^1 \frac{\omega(u)}{u} du. \qquad (3)$$

Доказательство проводится по известной схеме (см., например, [2, с. 234—235]) и опирается на следующий результат, имеющий самостоятельный интерес.

Предложение (аналог неравенства С. Н. Бернштейна (см., например, [3, с. 230])). *Для квазиполинома $\mathcal{P}_n(z)$ вида* (1) *при $1 < p < \infty$ справедливо неравенство*

$$\| \mathcal{P}_n' \|_p \leqslant A_p n \| \mathcal{P}_n \|_p. \qquad (4)$$

Доказательство. Положим

$$\mathcal{P}_n(z) = \sum_{j=1}^{N} P_{jn}(z) + P_n(z), \qquad (5)$$

где

$$P_{jn}(z) = B_j \sum_{m=m(j)}^{n} \varkappa_{jm}^{(n)} (-1)^m \exp\{\overset{0}{\lambda}{}_m^{(j)} (z - (\gamma_j + \gamma_{j+1})/2)\}, \quad j = 1, 2, \ldots, N, \qquad (6)$$

$$P_n(z) = \sum_{m=1}^{m_0} \varkappa_m^{(n)} \exp(\lambda_m z)/\mathcal{L}'(\lambda_m) + \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=m(j)}^{n} \varkappa_{jm}^{(n)} \{\exp(\lambda_m^{(j)})/\mathcal{L}'(\lambda_m^{(j)}) -$$
$$- (-1)^m B_j \exp(\overset{0}{\lambda}{}_m^{(j)} (z - (\gamma_j + \gamma_{j+1})/2))\Big\}. \qquad (7)$$

Используя биортогональную систему функций $\{\psi_\mu(t), \mu \in \Lambda\}$ к системе $\{\exp(\mu z), \mu \in \Lambda\}$, получаем [4] (гл. IV, §§ 1,2), [5]

$$\varkappa_{jm}^{(n)} = \sum_{k=1}^{N} d_k \int_{\gamma_{jk}} \mathcal{P}_n(\zeta) \exp\{-\lambda_m^{(j)} (\zeta - \gamma_k)\} d\zeta,$$

где γ_{jk} — часть ломаной C, соединяющая вершины γ_j и γ_k, на которой $| -\lambda_m^{(j)} (\zeta - \gamma_k)| \leqslant A$. Отсюда $|\varkappa_{jm}^{(n)}| \leqslant A \| \mathcal{P}_n \|_p$, $j = 1, \ldots, N$; $m = 1, 2, \ldots, n$. Аналогично устанавливается неравенство $|\varkappa_m^{(n)}| \leqslant A \| \mathcal{P}_n \|_p$, $m = 1, \ldots, m_0$. Используя эти неравенства и свойство в) квазиполинома, находим

$$\| P_n' \|_p \leqslant A \| \mathcal{P}_n \|_p. \qquad (8)$$

Далее имеем

$$\| P_{jn}' \|_p^p \equiv |B_j|^p \int_C \Big| \sum_{m=m(j)}^{n} (-1)^m \varkappa_{jm}^{(n)} \overset{0}{\lambda}{}_m^{(j)} \exp\{\overset{0}{\lambda}{}_m^{(j)} (\zeta - (\gamma_j + \gamma_{j+1})/2)\} \Big|^p |d\zeta| \overset{(a)}{\leqslant}$$

$$\overset{(a)}{\leqslant} A_4 \int\limits_{\gamma_j}^{\gamma_{j+1}} \Big| \sum_{m=m(j)}^{n} (-1)^m \varkappa_{jm}^{(n)} \overset{0}{\lambda}{}_m^{(j)} \exp\{\overset{0}{\lambda}{}_m^{(j)} (\zeta - (\gamma_j + \gamma_{j+1})/2)\} \Big|^p |d\zeta| \overset{(b)}{=}$$

$$\overset{(b)}{=} A_4 |(\gamma_{j+1} - \gamma_j)/2\pi|^p \int\limits_0^{2\pi} \Big| \sum_{m=m(j)}^{n} \varkappa_{jm}^{(n)} \{2\pi mi/(\gamma_{j+1} - \gamma_j) + q_j \exp(i\alpha_j)\} \times$$

$$\times \exp\{q_j \exp(i\alpha_j)\} [(\gamma_j - \gamma_{j+1})/2 + (\gamma_{j+1} - \gamma_j)\theta/2]\} \exp(im\theta) |^p d\theta \overset{(c)}{\leqslant}$$

$$\overset{(c)}{\leqslant} A_3 \int\limits_0^{2\pi} \sum_{m=m(j)}^{n} \varkappa_{jm}^{(n)} \exp(im\theta) \Big|^p d\theta + A_1 n^p \| \mathcal{P}_n \|_p^p \overset{(d)}{\leqslant} A_3 n^p \int\limits_0^{2\pi} \Big| \sum_{m=m(j)}^{n} \varkappa_{jm}^{(n)} \exp(im\theta) \Big|^p +$$

$$\times d\theta + A_1 n^p \| \mathcal{P}_n \|_p^p \overset{(e)}{=} A_3 |2\pi/(\gamma_{j+1} - \gamma_j)|^p \int\limits_{\gamma_j}^{\gamma_{j+1}} \Big| \sum_{m=m(j)}^{n} \varkappa_{jm}^{(n)} \exp\{2\pi mi \times$$

$$\times (\zeta - \gamma_j)/(\gamma_{j+1} - \gamma_j)\} \Big|^p |d\zeta| + A_1 n^p \| \mathcal{P}_n \|_p^p \overset{(f)}{\leqslant} A_2 n^p \int\limits_{\gamma_j}^{\gamma_{j+1}} \Big| B_j \times$$

$$\times \sum_{m=m(j)}^{n} \varkappa_{jm}^{(n)} \exp\{\overset{0}{\lambda}{}_m^{(j)} (\zeta - (\gamma_j + \gamma_{j+1})/2)\} \Big|^p |d\zeta| + A_1 n^p \| \mathcal{P}_n \|_p^p \overset{(f)}{\leqslant} A_2 n^p \| P_{jn} \|_p^p +$$

$$+ A_1 n^p \| \mathcal{P}_n \|_p^p \overset{(h)}{\leqslant} A n^p \| \mathcal{P}_n \|_p^p. \qquad (9)$$

Неравенство (a) в (9) фактически доказано в [6]; равенство (b) получено после замены $z = \gamma_j + (\gamma_{j+1} - \gamma_j)\,\theta/2\pi$ с учетом свойства б) квазиполинома; неравенство (c) следует из элементарного неравенства $(|a| + |b|)^p \leqslant 2^p (|a|^p + |b|^p)$ и отмеченных выше неравенств $|\varkappa_{jm}^{(n)}| \leqslant A \| \mathcal{P}_n \|_p$; неравенство ($d$) справедливо в силу неравенства С. Н. Бернштейна для тригонометрических полиномов (см., например, [3, с. 230]); равенство (e) получено после обратной замены $\theta = 2\pi(\zeta - \gamma_j)/(\gamma_{j+1} - \gamma_j)$; неравенство ($f$) выполняется на основании тождества

$$\exp\{2\pi mi (\zeta - \gamma_j)/(\gamma_{j+1} - \gamma_j)\} = (-1)^m \exp\{\overset{0}{\lambda}{}_m^{(j)} (\zeta - (\gamma_j + \gamma_{j+1})/2)\} \times$$
$$\times \exp\{-q_j \exp(i\alpha_j)((\gamma_j - \gamma_{j+1})/2 + (\gamma_{j+1} - \gamma_j)\theta/2\pi)\},$$

которое выполняется при J, принадлежащих стороне $[\gamma_j; \gamma_{j+1}]$ многоугольника M; неравенство (g) очевидно; неравенство (h) фактически доказано в [6]. Из равенств (5)—(7) и неравенств (8), (9) сразу следует (4). Этим предложение доказано.

Доказательство теоремы 1. Следуя [2, с. 234—235] при $|t| > 0$ выберем натуральное Q так, чтобы выполнялось условие $2^{-(Q+1)} < |t| \leqslant 2^{-Q}$. Тогда, полагая, как обычно, $\Delta_t(f)(u) = f(z(u + t)) - f(z(u))$, имеем

$$\Delta_t(f)(u) = \Delta_t(\mathcal{P}_1)(u) + \sum_{q=1}^{Q} \Delta_t(\mathcal{P}_{2^q} - \mathcal{P}_{2^{q-1}})(u) + \Delta_t(f - \mathcal{P}_{2^Q})(u). \qquad (10)$$

Далее, используя (4) и учитывая, что в силу условия (2) теоремы 1 $\| \mathcal{P}_{2^q} - \mathcal{P}_{2^{q-1}} \|_p \leqslant \| \mathcal{P}_{2^q} - f \|_p + \| f - \mathcal{P}_{2^{q-1}} \|_p \leqslant A 2^{-q} \omega(2^{-q})$, получаем

$$\| \Delta_t(\mathcal{P}_{2^q} - \mathcal{P}_{2^{q-1}}) \|_p = \Big\{ \int\limits_0^L \Big| \int\limits_0^t (\mathcal{P}'_{2^q}(z(u + v)) - \mathcal{P}'_{2^{q-1}}(z(u + v)) \times$$

$$\times z'(u + v)\, dv \Big|^p du \Big\}^{1/p} \leqslant \Big| \int\limits_0^t \Big\{ \int\limits_0^L | \mathcal{P}'_{2^q}(z(u + v)) - \mathcal{P}'_{2^{q-1}}(z(u + v)) |^p du \Big\}^{1/p} dv \Big| \leqslant$$

$$\leqslant A |t| 2^q \| \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_{2^{q-1}} \|_p \leqslant A |t| 2^q \omega_p(2^{-q}) \leqslant 2A |t| \int\limits_{2^{-q}}^{2^{-(q-1)}} \frac{\omega(u)}{u^2}\, du.$$

Отсюда и из (10) следует (3):

$$\omega_p(f; h) \leqslant A_1 h + A_2 h \int_h^1 \frac{\omega(u)}{u^2} du + A_3 \omega(h) \leqslant Ah \int_h^1 \frac{\omega(u)}{u^2} du.$$

Теорема доказана.

3. Теорема 1 допускает следующее естественное обобщение.

Теорема 2. *Пусть* $\omega(h)$ — *модуль непрерывности, причем* $\omega(u)/u \in L(0, 1)$, $f \in E^p(M)$, $1 < p < \infty$, *и существует последовательность квазиполиномов вида* (1) *таких, что при некотором натуральном* r *выполняется неравенство*

$$\| f + \mathcal{P}_n \|_p \leqslant A_1 n^{-r} \omega(1/n). \tag{11}$$

Тогда $f^{(r)} \in E^p(M)$ (*так что* $f^{(s)}(z)$, $s = 0, 1, \ldots, r-1$, *непрерывны на* $\overline{M}$) *выполняются условия*

$$\sum_{k=1}^{N} d_k f^{(s)}(\gamma_k) = 0, \quad s = 0, 1, \ldots, r-1, \tag{12}$$

и

$$\omega_p(f^{(r)}; h) \leqslant A \left\{ \int_0^h \frac{\omega(u)}{u} du + h \int_h^1 \frac{\omega(u)}{u^2} du \right\}. \tag{13}$$

Доказательство, как и в случае теоремы 1, проводится по известной схеме (см., например, [2, с. 235—236]). Представим функцию $f(z)$ в виде ряда

$$f(z) = \mathcal{P}_1(z) + \sum_{q=1}^{\infty} (\mathcal{P}_{2^q}(z) - \mathcal{P}_{2^{q-1}}(z)). \tag{14}$$

В силу (11) ряд (14) сходится в метрике $E^p(M)$. Пусть $w \in M$ (так что $|z - w| \geqslant a > 0$ при $z \in C$). Тогда, умножая (14) на $r!/2\pi i(z-w)^{r+1}$ и интегрируя по C, получаем

$$f^{(r)}(w) = \mathcal{P}_1^{(r)}(w) + \sum_{q=1}^{\infty} (\mathcal{P}_{2^q}^{(r)}(w) - \mathcal{P}_{2^{q-1}}^{(r)}(w)), \quad w \in M. \tag{15}$$

Так как в силу (8), (11)

$$\| \mathcal{P}_{2^q}^{(r)} - \mathcal{P}_{2^{q-1}}^{(r)} \|_p \leqslant A_1 2^{rq} \| \mathcal{P}_{2^q} - \mathcal{P}_{2^{q-1}} \|_p \leqslant A\omega(2^{-q}) \leqslant \frac{A}{\ln 2} \int_{2^{-q}}^{2^{-(q-1)}} \frac{\omega(u)}{u} du, \tag{16}$$

то из условия $\omega(u)/u \in L(0, 1)$ следует, что ряд (15) сходится также в метрике $E^p(M)$ (так что $f^{(r)} \in E^p(M)$) и при каждом $Q = 1, 2, \ldots$

$$\| f^{(r)} - \mathcal{P}_{2^Q}^{(r)} \|_p \leqslant \sum_{k=Q+1}^{\infty} \| \mathcal{P}_{2^Q}^{(r)} - \mathcal{P}_{2^{Q-1}}^{(r)} \|_p \leqslant A \sum_{k=Q+1}^{\infty} \int_{2^{-k}}^{2^{-(k+1)}} \frac{\omega(u)}{u} du =$$

$$= A \int_0^{2^{-Q}} \frac{\omega(u)}{u} du \equiv A\Omega(2^{-Q}),$$

где

$$\Omega(h) = \int_0^h \frac{\omega(u)}{u} du.$$

Отсюда на основании теоремы 1 заключаем, что

$$\omega_p(f^{(r)}; h) \leqslant A_1 h \int\limits_h^1 \frac{\Omega(u)}{u^2}\, du \leqslant A\left\{\int\limits_0^h \frac{\omega(u)}{u}\, du + h\int\limits_h^1 \frac{\omega(u)}{u^2}\, du\right\}.$$

Этим неравенство (13) доказано.

Для доказательства соотношений (12) заметим, что [7]

$$\int\limits_0^z |\mathcal{P}_{2^q}^{(r)}(u) - \mathcal{P}_{2^q-1}^{(r)}(u)|^p\, |du| \leqslant A\,\|\mathcal{P}_{2^q}^{(r)} - \mathcal{P}_{2^q-1}^{(r)}\|_p^p, \quad z \in C,$$

(здесь интегрирование ведется по отрезку $[0; z]$), так что при $z \in C$ учитывая (16), получаем

$$|\mathcal{P}_{2^q}^{(r-1)}(z) - \mathcal{P}_{2^q-1}^{(r-1)}(z)| \leqslant \int\limits_0^z |\mathcal{P}_{2^q}^{(r)}(u) - \mathcal{P}_{2^q-1}^{(r-1)}(u)|\,|du| + |\mathcal{P}_{2^q}^{(r-1)}(0) - \mathcal{P}_{2^q-1}^{(r-1)}(0)| \leqslant$$

$$\leqslant A\,\|\mathcal{P}_{2^q}^{(r)} - \mathcal{P}_{2^q-1}^{(r)}\|_p + \frac{1}{2\pi}\int\limits_C \left|\frac{\mathcal{P}_{2^q}^{(r-1)}(u) - \mathcal{P}_{2^q-1}^{(r-1)}(u)}{u}\right| |du| \leqslant$$

$$\leqslant A_1 \int\limits_{2^{-q}}^{2^{-q+1}} \frac{\omega(u)}{u}\, du + A_1 2^{-q}\omega(2^{-q}).$$

Отсюда с учетом условия $\omega(u)/u \in L(0, 1)$ следует, что ряд

$$f^{(r-1)}(z) = \mathcal{P}_1^{(r-1)}(z) + \sum_{q=1}^{\infty} (\mathcal{P}_{2^q}^{(r-1)}(z) - \mathcal{P}_{2^q-1}^{(r)}(z))$$

сходится абсолютно и равномерно на $\overline{M}$. Отсюда сразу следует абсолютная и равномерная сходимость на $\overline{M}$ рядов

$$f^{(s)}(z) = \mathcal{P}_1^{(s)}(z) + \sum_{q=1}^{\infty} (\mathcal{P}_{2^q}^{(s)}(z) - \mathcal{P}_{2^q-1}^{(s)}(z)), \quad s \leqslant r-1. \tag{17}$$

Подставляя в (17) $z = \gamma_k \in C$, умножая полученные ряды на d_k, суммируя затем по $k = 1, \dots, N$ и учитывая, что в силу (1)

$$\sum_{k=1}^{N} d_k \mathcal{P}_n^{(s)}(\gamma_k) = \sum_{m=1}^{m_0} \varkappa_m^{(n)}(\lambda_m)^s \Big(\sum_{k=1}^{N} d_k \exp(\lambda_m \gamma_k)\Big)/\mathcal{L}'(\lambda_m) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N}\sum_{m=m(j)}^{n} \varkappa_{jm}^{(n)}(\lambda_m^{(j)})^s \Big(\sum_{k=1}^{N} d_k \exp(\lambda_m^{(j)}\gamma_k)\Big)/\mathcal{L}'(\lambda_m^{(j)}) = \sum_{m=1}^{m_0} \varkappa_m^{(n)}(\lambda_m)^s \mathcal{L}(\lambda_m)/\mathcal{L}'(\lambda_m) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N}\sum_{m=m(j)}^{n} \varkappa_{jm}^{(n)}(\lambda_m^{(j)})^s \mathcal{L}(\lambda_m^{(j)})/\mathcal{L}'(\lambda_m^{(j)}) \equiv 0,$$

получаем (12). Теорема 2 доказана.

4. Используя прямые теоремы из [1] и обратные теоремы из данной работы, можно получить конструктивные характеристики некоторых классов регулярных в M функций. Приведем один пример. При $1 < p < \infty$, $1 < q \leqslant \infty$ через $E_q^p(M)$ обозначим класс функций $f \in E^p(M)$, для которых

$$\begin{aligned} &\int\limits_{C \cap U_{j(\varepsilon)}} |f(u)|^{qp}\,|du| \leqslant A, \text{ при } q < \infty, \\ &|f(u)| \leqslant A, \text{ при } q = \infty, \end{aligned} \tag{18}$$

где $U_j(\varepsilon) = \{z : |z - \gamma_j| \leqslant \varepsilon\}$, $j = 1, 2, \ldots, N$, $\varepsilon > 0$. Пусть $f \in E_q^p(M)$. Тогда, используя неравенство Гельдера и (18), для величины

$$\delta_p(f; h) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{j=1}^{N} \Big[\Big\{ \int_0^h |f(\gamma_j + (\gamma_{j+1} - \gamma_j)\theta/2\pi|^p \, d\theta \Big\}^{1/p} + \\ + \Big\{ \int_{2\pi - h}^{2\pi} |f(\gamma_j + (\gamma_{j+1} - \gamma_j)\theta/2\pi|^p \, d\theta \Big\}^{1/p} \Big]$$

при достаточно малых h получаем $\delta_p(f; h) \leqslant Ah^{1/q'p}$, $q' q/(q-1)$. Отсюда на основании теоремы 2 из работы [1] заключаем, что для любой функции $f \in E_q^p(M)$, $1 < p < \infty$, $1 < q \leqslant \infty$, найдется последовательность $\mathcal{P}_n(z)$ квазиполиномов вида (1), для которой

$$\| f - \mathcal{P}_n \|_p \leqslant A \{ n^{-1/q'p} + \omega_p(f; 1/n) \}.$$

Обозначая далее через $AH_p^\alpha(M)$, $0 < \alpha < 1$, класс функций $f \in E^p(M)$, для которых $\omega_p(f; h) \leqslant Ah^\alpha$, и сопоставляя полученный результат с теоремой 1, заключаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $f \in E_q^p(M)$, $1 < p < \infty$, $1 < q \leqslant \infty$, $0 < \alpha < 1/q'p$ $(q' = q/(q-1))$. *Тогда для того чтобы* f *принадлежала классу* $AH_p^\alpha(M)$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность квазиполиномов вида* (1) *такая, что* $\| f - \mathcal{P}_n \|_p \leqslant An^{-\alpha}$.

5. Через $A\overset{0}{W}{}_p^{(r)}(M)$, $r \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 1$, обозначим класс регулярных в M функций $f(z)$, для которых $\| f^{(r)} \|_{E^p(M)} \leqslant 1$ и выполняются условия (25) работы [1]:

$$\sum_{k=1}^{N} d_k f^{(q)}(\gamma_k) = 0, \quad q = 0, 1, \ldots, r-1.$$

Тогда из теоремы 3 работы [1] следует, что для любой функции $f \in A\overset{0}{W}{}_p^{(r)}(M)$, $1 < p < \infty$, справедлива оценка

$$\| f - S_n(f) \|_{E^p(M)} \leqslant A_p n^{-r}. \tag{19}$$

Положим $\hat{n} = m_0 + \sum_{j=1}^{N} (n - m(j) + 1)$ (так что $\hat{n} \asymp n$) и через $L_{\hat{n}}$ обозначим $\hat{n}$-мерное подпространство в $E^p(M)$. Пусть

$$d_n(A\overset{0}{W}{}_p^{(r)}(M), E^p(M)) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \inf_{L_{\hat{n}}} \sup_{f \in A\overset{0}{W}{}_p^{(r)}(M)} \inf_{\varphi \in L_{\hat{n}}} \| f - \varphi \|_{E^p(M)}$$

— колмогоровский поперечник класса $A\mathring{W}_p^{(r)}(M)$ в пространстве $E^p(M)$. Тогда из неравенств (4), (19) методом В. М. Тихомирова [8] легко устанавливается следующий результат.

Теорема 4. *При* $1 < p < \infty$

$$d_n(A\overset{0}{W}{}_p^{(r)}(M), E^p(M)) \asymp n^{-r}.$$

1. *Мельник Ю. И.* Прямые теоремы приближения регулярных в выпуклых многоугольниках функций экспоненциальными полиномами в интегральной метрике // Укр. мат. журн.— 1988.— **40**, № 5.— С. 584—591.
2. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М. : Наука, 1977.— 508 с.
3. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного.— М. : Физматгиз, 1960.— 624 с.
4. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. — М. : Наука, 1976.— 536 с.
5. *Мельник Ю. И.* О представлении регулярных функций рядами Дирихле в замкнутых выпуклых многоугольниках // Укр. мат. журн.— 1977.— **29**, № 6.— С. 826—830.