УДК 512.544

Н. Ф. Кузенный, Н. Н. Семко

Строение периодических метабелевых метагамильтоновых групп с элементарным коммутантом ранга два

Естественным и довольно значительным обобщением гамильтоновых групп, изученных еще в начале века, являются метагамильтоновы группы, т. е. группы, у которых всякая неабелева подгруппа инвариантна. Изучение свойств метагамильтоновых групп начали Н. Ф. Сесекин и Г. М. Ромалис [1] и проводилось в работах [2—5].

Первые результаты, дающие конструктивное описание некоторых классов метагамильтоновых групп, получены в работах [6—8]. В этих работах дано описание некоторых видов конечных метагамильтоновых групп. В частности, в [6] описаны ненильпотентные метагамильтоновы группы, а в [7, 8] получена классификация нильпотентных метагамильтоновых групп класса больше 2.

В работах [9—13] дано полное описание разрешимых метагамильтоновых групп. Однако до настоящего времени лишь описание разрешимых ненильпотентных и периодических неметабелевых метагамильтоновых групп опубликовано с доказательствами.

Настоящая работа посвящена изучению строения периодических метабелевых метагамильтоновых групп G с элементарным коммутантом непростого порядка. В силу теоремы 3 из [9] коммутант G' имеет ранг два или три. По теореме из [12] $G = H \times C$, где H — конечная метабелева p-группа с элементарным коммутантом непростого порядка, C — периодическая абелева группа. Следовательно, представляются естественными следующие два случая, которые возможны для подгруппы H : 1) H не содержит дополняемых в ней подгрупп Миллера—Морено; 2) H содержит дополняемые в ней подгруппы Миллера—Морено.

Дано полное описание периодических метабелевых метагамильтоновых групп $G = H \times C$ с элементарным коммутантом ранга два, подгруппа H которых удовлетворяет отмеченному выше случаю 1. Оказалось, что существуют четыре типа таких групп.

Для краткости изложения периодическую метабелеву метегамильтонову группу с элементарным коммутантом ранга два будем называть $*$-группой, а $*$-группу $G = H \times C$, в которой подгруппа H удовлетворяет условию 1, — y-группой.

Работа состоит из двух частей. В п. 1 приводятся вспомогательные предложения, которые часто используются при доказательстве основных результатов. В п. 2 полностью описаны y-группы.

1. Р. 1 [15]. *Пусть G — метабелева группа, x, y, z — ее элементы, n — произвольное натуральное число. Тогда* $[x, y]^n = [x^n, y] = [x, y^n]$, $(xy)^n = x^n y^n [x, y]^{-\frac{1}{2}n(n-1)}$, $[xy, z] = [x, z][y, z]$.

Р.2 [14]. *Пусть G — p-группа Миллера — Морено с центром непростого порядка. Тогда $G = \langle a, b\rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $\alpha + \beta \geqslant 3$, и G — группа одного из типов*: 1) $G = \langle a\rangle \rtimes \langle b\rangle$, $\alpha = \beta = p = 2$, $[a, b] = a^2$; 2) $G = \langle a\rangle \rtimes \langle b\rangle$, α, $\beta \geqslant 2$, при $\alpha = \beta = 2$ $p > 2$, $[a, b] = a^{p^{\alpha-1}}$; 3) $G = (\langle c\rangle \times \langle a\rangle) \rtimes \langle b\rangle$, $|c| = p$, $[a, b] = c$.

Р.3. *Пусть G — конечная метабелева группа с элементарным коммутантом G', $g \notin G'$, $|g| = p$. Тогда $G = X \rtimes \langle y\rangle$, где $y \neq 1$.*

Доказательство этого предложения почти очевидно.

Р. 4. *Пусть G — $*$-группа. Тогда выполняются следующие условия*:

1) *всякая неабелева подгруппа из G содержит G'*;

2) *всякая подгруппа Миллера—Морено из G типа* 1—3 P. 2;

3) *G не содержит неабелевых подгрупп порядка p^3*;

4) *если M — подгруппа Миллера—Морено из G, $y \in M$, $x \in G$ и в G существует неабелева подгруппа $\langle x\rangle\langle y\rangle$, то $M \cap (\langle x\rangle\langle y\rangle) \neq \langle y\rangle$*;

5) *любые два неперестановочных элемента из G порождают подгруппу Миллера—Морено.*

Доказательство предложения непосредственно следует из теоремы 3 работы [9], Р 2. и определения $*$-группы

Р. 5. *Пусть $G = (\langle a\rangle\langle b\rangle)\langle x\rangle$ — метабелева p-группа с элементарным коммутантом, не содержащая неабелевых подгрупп порядка p^3, $|a| = p^\varepsilon$, $|b| = p^\Delta$, $|x| = p^\gamma$, $\varepsilon \geqslant \Delta \geqslant \gamma \geqslant 2$, $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = 1$, $(\langle a\rangle\langle b\rangle) \cap \langle x\rangle = \langle x^{p^{\gamma-1}}\rangle$, при $\varepsilon = \Delta$, $p > 2$, $\langle a\rangle\langle b\rangle \,\triangle\, G$. Тогда $G = (\langle a\rangle\langle b\rangle) \rtimes \langle x_1\rangle$, где $|x_1| = p^{\gamma-1}$*

Доказательство. Пусть $A = \langle a\rangle\langle b\rangle$. Ясно, что $x^{p^{\gamma-1}} = a^{ip^{\varepsilon-1}} b^{jp^{\Delta-1}}$, $i, j = 0, \ldots, p-1$, $i + j \neq 0$. Полагая $y = a^{ip^{\varepsilon-\Delta}} b^j$, в силу Р.1 имеем $|y| = p^\Delta$,

$y = p^{\Delta-1} = a^{ip^{\varepsilon-1}} b^{jp^{\Delta-1}} = x^{p^{\gamma-1}}$. Понятно, что $G = A\langle x_1\rangle$, где $x_1 = y^{p^{\Delta-\gamma}} x^{-1}$. По Р.1 $x_1^{p^{\gamma-1}} = y^{p^{\Delta-1}} x^{-p^{\gamma-1}} d$, где $d = [y, x]^{-1/2p^{\Delta-1}(p^{\gamma-1}-1)}$. Если $d = 1$, то легко заметить, что $G = A \leftthreetimes \langle x_1\rangle$, $|x_1| = p^{\gamma-1}$.

Пусть $d \neq 1$. Тогда $\varepsilon > 2$, $p = \Delta = \gamma = 2$ и потому $d = [y, x]$. Если $[y, x] \in \langle y\rangle$, то, очевидно, $\langle y\rangle\langle x\rangle$ — группа кватернионов, что невозможно. Итак, $[y, x] \notin \langle y\rangle$. Поскольку $\varepsilon > 2$, то в силу Р.1 $[y, x] = [b, x]^j$. Из этого и соотношения $[y, x] \neq 1$ следует $j = 1$. Следовательно, $b^2 \in \langle y^2\rangle$, поэтому $\langle y\rangle \cap \langle a\rangle = 1$, $\langle x\rangle \cap \langle a\rangle = 1$, $A = \langle a\rangle\langle y\rangle$. Заменяя y на b, имеем $x^2 = b^2$, $[b, x] \neq 1 \notin \langle b\rangle$. Рассмотрим два возможных случая: 1) $[b, x] = a^{2^{\varepsilon-1}}$; 2) $[b, x] = a^{2^{\varepsilon-1}} b^2$.

Случай 1. Полагая $x_1 = bxa^{2^{\varepsilon-2}}$, в силу Р.1 получаем $x_1^2 = 1$. Значит, $G = A \leftthreetimes \langle x_1\rangle$.

Случай 2. Полагая $y_2 = xb$, $y_1 = a^{2^{\varepsilon-2}} b$ в силу Р.1 имеем $y_2^2 = [b, x]$, $y_1^2 = [b, x]$, $[y_1, y_2] = [b, x]$. Отсюда, $\langle y_1, y_2\rangle$ — группа кватернионов, что невозможно. Следовательно, случай 2 не имеет место. Предложение доказано

2. Лемма 1. *Пусть G — $*$-группа, $G = A\langle z\rangle$, $A = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|a| = |b| = 4$, $[a, b] = a^2$, $z^2 \in A$. Тогда $G = A\langle x\rangle$, где $x \notin A$, $x^2 \notin \langle b^2\rangle$ и выполняется одно из следующих условий*:

1) $x^2 = b^2$, $[a, x] = b^2$, $[b, x] = a^2$;
2) $x^2 = b^2$, $[a, x] = b^2$, $[b, x] = a^2b^2$;
3) $x^2 = b^2$, $[a, x] = 1$, $[b, x] = a^2b^2$;
4) $x^2 = 1$, $[a, x] = b^2$, $[b, x] = a^2$;
5) $x^2 = 1$, $[a, x] = b^2$, $[b, x] = a^2b^2$.

Группы, которые удовлетворяют соответственно условиям 1—3, 4—5, *изоморфны.*

Доказательство. Так как $Z(G) \geqslant G'$, $A > G'$ и в силу Р. 1 $z^2 \in Z(G)$, то $G' = Z(A) = \langle a^2\rangle \times \langle b^2\rangle$ и $z^2 \in Z(A)$.

Покажем, что $G = A\langle x\rangle$, где $x \notin A$, $x^2 \in \langle b^2\rangle$. Действительно, если $z^2 \in \langle b^2\rangle$, то, полагая $z = x$, будем иметь искомое разложение. Предположим, что $z^2 \notin \langle b\rangle$. Тогда из соотношения $z^2 \in \langle a^2\rangle \times \langle b^2\rangle$ имеем $z^2 \in \{a^2, a^2b^2\}$. Понятно, что $[a, z] \in \{1, a^2, a^2b^2, b^2\}$. Рассмотрим далее два возможных случая: 1) $z^2 = a^2b^2$; 2) $z^2 = a^2$.

Случай 1. Пусть $[a, z] = 1$, либо $[a, z] = b^2$. Тогда, полагая $x = az$ и учитывая Р. 1, имеем $G = A\langle x\rangle$, $x \notin A$, $x^2 \in \langle b^2\rangle$. Пусть $[a, z] = a^2b^2$. Так как $G = A\langle az\rangle$ и по Р. 1 $(az)^2 = a^2z^2[a, z] = a^2z^2a^2b^2 = a^2$, то легко заметить, что выполняются условия случая 2. Поэтому можно считать $[a, z] \neq a^2b^2$. Пусть, наконец, $[a, z] = a^2$. Положим $d = bz$. Если $[b, z] = 1$, то $d^2 = a^2$ и снова, очевидно, выполняются условия случая 2. Если $[b, z] = a^2$, либо $[b, z] = a^2b^2$, то, полагая $x = d$, легко убедиться в искомом разложении. Если $[b, z] = b^2$, то, полагая $x = abz$ и учитывая Р. 1, имеем $G = A\langle x\rangle$, где $x \notin A$, $x^2 \in \langle b^2\rangle$.

Таким образом, в случае 1 $G = A\langle x\rangle$, где $x^2 \in \langle b^2\rangle$.

Случай 2. Пусть $[a, z] \in \langle a\rangle$. Тогда согласно Р. 4 подгруппа $\langle z\rangle\langle a\rangle$ абелева. Так как $G = A\langle az\rangle$ и $|az| = 2$, то $G = A\langle x\rangle$, где $x = az$, $x^2 \in \langle b^2\rangle$. Пусть $[z, a] = b^2$. Положим $d = bz$. В силу Р. 1 $d^2 = b^2z^2[b, z]$. Если $[b, z] = a^2$, либо $[b, z] = a^2b^2$, то, полагая $x = d$, будем иметь искомое разложение. Если $[b, z] = b^2$, либо $[b, z] = 1$, то $G = A\langle x\rangle$, где $x = az$, $x \notin A$, $x^2 \in \langle b^2\rangle$. Пусть, наконец, $[z, a] = a^2b^2$. Положим $d_1 = bz$, $d_2 = abz$. В силу Р. 1 $d_1^2 = b^2z^2[b, z]$, $d_2^2 = [b, z]$. Если $[b, z] = 1$, либо $[b, z] = b^2$, то, полагая $x = d_2$ имеем искомое разложение. Если $[b, z] = a^2$, либо $[b, z] = a^2b^2$, то, полагая $x = d_1$, получаем требуемое разложение. Так как G—$*$-группа, то в силу Р. 4 при $[b, x] \neq 1$ $[b, x] \notin \langle b\rangle$. Поэтому $[b, x] \in \{1, a^2, a^2b^2\}$, $[a, x] \in \{1, a^2, a^2b^2, b^2\}$. Следовательно,

$$([b, x], [a, x]) \in \{(1, 1), (1, a^2), (1, a^2b^2), (1, b^2), (a^2, a^2), (a^2, 1), (a^2, a^2b^2), (a^2, b^2), (a^2b^2, 1), (a^2b^2, a^2), (a^2b^2, a^2b^2), (a^2b^2, b^2)\}.$$

Поскольку $|G'| = p^2$, $G' = A'[A, x]$ [6], $A' = \langle a^2\rangle$ и $Z(G) \geqslant G'$, то $[A, x] \notin \langle a\rangle$. Из этого следует, что $([b, x], [a, x]) \notin \{(1, 1), (1, a^2), (a^2, a^2), (a^2, 1)\}$. В силу Р. 1

$(ab)^2=b^2$ и потому $\langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle ab\rangle$. Но тогда в силу соотношения $[b,x]\notin\langle b\rangle$ $[ab,x]\neq b^2$ и, значит, $([b,x],[a,x])\notin\{(a^2, a^2b^2), (a^2b^2, a^2), (1, b^2)\}$. Таким образом, $([b,x],[a,x])\in\{(a^2,b^2), (a^2b^2,b^2), (a^2,b^2,1), (1,a^2b^2), (a^2b^2,a^2b^2)\}$.

Пусть $[a,x]=[b,x]=a^2b^2$. Выше отмечалось, что $A=\langle a\rangle \leftthreetimes \langle ab\rangle$. По Р. 1 $[ab,x]=1$ и потому, не нарушая общности, можно считать, что в этом случае $([b,x],[a,x])=(1,a^2b^2)$. Покажем, что это равенство невозможно. В самом деле положим $d_1=ab$, $d_2=bx$. По Р. 1 $d_1^2=b^2$, $d_2^2=b^2x^2$, $[d_1,d_2]=b^2$. Отсюда подгруппа $\langle d_1\rangle\langle d_2\rangle$ неабелева и $\langle d_1\rangle\langle d_2\rangle \not> G'$, что противоречит Р. 4. Это противоречие показывает, что $([b,x],[a,x])\neq(1,a^2b^2)$ и, значит, $([b,x],[a,x])\in\{(a^2,b^2),(a^2b^2,b^2),(a^2b^2,1)\}$. Рассмотрим далее два подслучая: а) $|x|=4$; б) $|x|=2$.

В подслучае а) для элементов a, b, x в силу соотношения $([b,x],[a,x])\in\{(a^2,b^2),(a^2b^2,b^2),(a^2b^2,1)\}$ выполняются условия 1—3 настоящей леммы. Далее легко убедиться, что группы, определяемые условиями 1—3, изоморфны. В самом деле, если имеет место условие 1, то изоморфизм групп, определяемых условиями 1 и 2, устанавливает соответствие $a\to a$, $b\to ab$, $x\to x$. Пусть теперь имеет место условие 3. Тогда соответствие $a\to b$, $b\to ax$, $x\to bx$ устанавливает изоморфизм групп, определяемых условиями 3 и 1. Таким образом, группы, элементы a, b, x которых удовлетворяют условиям 1—3, изоморфны.

Подслучай б). Предположим, что $[a,x]=1$, $[b,x]=a^2b^2$. Положим $d=bx$. Тогда по Р. 1 $d^2=a^2$, $[a,d]=a^2$. Значит, $\langle a\rangle\langle d\rangle$ имеет с A циклическое пересечение, что противоречит Р. 4. Следовательно, при $|x|=2$ справедливы условия 4, 5. Изоморфизм групп, определяемых условиями 4, 5, устанавливается так же легко, как и выше при условиях 1—3. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть G — $*$-группа, $G=(\langle a\rangle\leftthreetimes\langle b\rangle)\leftthreetimes\langle x\rangle$, $|a|=p^\alpha$, $|b|=p^\beta$, $|x|=p^\gamma$. Тогда $\alpha,\beta\geqslant 2$, $\gamma\geqslant 1$, $[a,x]=a^{\varepsilon p^{\alpha-1}}b^{fp^{\beta-1}}$, $[b,x]=a^{sp^{\alpha-1}}b^{tp^{\beta-1}}$, $\varepsilon, f, s, t=0,\dots,p-1$, при $f=0$ $\varepsilon=0$, при $s=0$ $t=0$, $f+s\neq 0$ и выполняется одно из следующих условий*:

1) $\alpha=\beta=p=2$, $\gamma=1$, $[a,b]=a^2$, $[a,x]=b^2$, $[b,x]=a^2$;

2) $[a,b]=a^{p^{\alpha-1}}$, *при* $\alpha=\beta=2$, $p>2$;

3) $|\alpha-\beta|=1$, $[a,b]=1$, $sf\not\equiv 0 \pmod p$, *при* $\alpha>\beta$ $t=0$, *при* $\beta>\alpha$ $\varepsilon=0$;

4) $\alpha=\beta$, $[a,b]=1$, $sf\not\equiv 0\pmod p$, $\varepsilon t-fs\not\equiv 0 \pmod p$, $n^2-(\varepsilon+t)n+\varepsilon t-fs\not\equiv 0 \pmod p$, $n=1,\dots,p-1$.

Доказательство. Пусть $G=A\leftthreetimes\langle x\rangle$, где $A=\langle a\rangle\leftthreetimes\langle b\rangle$. Тогда $A>G'$, $\alpha,\beta\geqslant 2$, $\gamma\geqslant 1$, $x\notin Z(G)$, $[A,x]=\langle[a,x],[b,x]\rangle$, $G'=\langle a^{p^{\alpha-1}}\rangle\times\langle b^{p^{\beta-1}}\rangle$ и потому $[a,x]=a^{\varepsilon p^{\alpha-1}}b^{fp^{\beta-1}}$, $[b,x]=a^{sp^{\alpha-1}}b^{tp^{\beta-1}}$, где $\varepsilon, f, s, t=0,\dots,p-1$. Если $f=0$, то в силу Р. 4 подгруппа $\langle a\rangle\leftthreetimes\langle x\rangle$ абелева и потому $\varepsilon=0$. Аналогично при $s=0$ $t=0$. Так как $|A'|=p$ и $G'=A'[A,x]$ [6], то $[A,x]\neq 1$ и, значит, $f+s\neq 0$. Далее возможны два случая: 1) $[a,b]\neq 1$; 2) $[a,b]=1$.

Случай 1. Очевидно, возможно считать, что $[a,b]=a^{p^{\alpha-1}}$. Отсюда с учетом леммы 1 имеем выполнимость условий 1 или 2 настоящей леммы.

Случай 2. Понятно, что в этом случае $G'=\langle[b,x],[a,x]\rangle$. Из этого следует, что $sf\not\equiv 0\pmod p$, $\langle[a,x]\rangle\cap\langle[b,x]\rangle=1$. Пусть $l\equiv f_1f \pmod p$, где $f_1f\equiv 1\pmod p$. Если $f_1t\varepsilon\equiv s\pmod p$, то $t\varepsilon-fs\equiv 0\pmod p$ и потому $[a,x]^l=[b,x]$, что невозможно. Значит, $t\varepsilon-fs\not\equiv 0\pmod p$.

Пусть $\alpha>\beta$. Полагая $y=a^{sp^{\alpha-\beta}}b^t$ в силу Р.1 имеем $y^{p^{\beta-1}}=[b,x]$, $[y,x]=[b,x]^t$. Отсюда с учетом Р.4 подгруппа $\langle y\rangle\leftthreetimes\langle x\rangle$ абелева и поэтому $t=0$. Положим $y_1=a^pb$. Тогда по Р.1 $y_1^{p^\beta}=a^{p^{\beta+1}}$, $[y_1,x]=a^{sp^{\alpha-1}}$. Отсюда при $a^{p^{\beta+1}}\neq 1$ $\langle y_1\rangle\langle x\rangle>G'$. Противоречие. Следовательно, $\alpha=\beta+1$. Если же $\beta>\alpha$, то ввиду симметрии элементов а и b аналогично получаем $\varepsilon=0$, $\beta=\alpha+1$. Таким образом, при $\alpha\neq\beta$ имеет место условие 3. Пусть $\alpha=\beta$. Полагая $y=a^ib^j$, где $i,j=0,\dots,p-1$, $i+j\neq 0$, получаем $|y|=p^\alpha$, $\langle a\rangle\times\langle b\rangle=\langle y\rangle\times\langle z\rangle$, где либо $z=a$, либо $z=b$. Очевидно, что $[y,x]\neq 1$.

Предположим что $[y, x] \in \langle y\rangle$. Тогда по Р.1 $[y, x] = a^{(i\varepsilon+sj)p^{\alpha-1}} b^{(fi+tj)p^{\beta-1}} = y^{np^{\alpha-1}} = a^{nip^{\alpha-1}} b^{njp^{\beta-1}}$, где $n = 1, \dots, p-1$. Отсюда получаем систему сравнений

$$\begin{cases} ni \equiv \varepsilon i + sj \pmod p, \\ nj \equiv fi + tj \pmod p, \end{cases}$$

которая при заданных ограничениях на i, j, n тогда и только тогда совместна, когда $n^2 - (t+\varepsilon)n + \varepsilon t - fs \equiv 0 \pmod p$. Но согласно Р. 4 $[y, x] \notin \langle y\rangle$, поэтому $n^2 - (t+\varepsilon)n + \varepsilon t - fs \not\equiv 0 \pmod p$. Итак, условие 4 леммы доказано. Лемма доказана.

Л е м м а 3. *Пусть G — конечная p-группа. Группа G является $*$-группой, не содержащей собственных дополняемых неабелевых подгрупп, когда $G = \langle a, b, x, y\rangle$, где $|a| = p^\alpha$, $\alpha \geqslant 2$, $|b| = p^\beta$, $\beta \geqslant 2$, $|x| = p^\gamma$, $\gamma \geqslant 1$, $|y| = p^\varepsilon$, $\varepsilon \geqslant 0$ и G — группа одного из следующих типов*:

1) $G = (\langle a\rangle \rtimes \langle b\rangle)\langle x\rangle$, $\alpha = \beta = \gamma = p = 2$, $[a, b] = a^2$, $[a, x] = b^2 = x^2$, $[b, x] = a^2b^2$;

2) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \rtimes \langle x\rangle$, $\gamma \geqslant \alpha = \beta + 1$, $[a, x] = b^{p^{\beta-1}}$, $[b, x] = a^{sp^{\alpha-1}}$, $s = 1, \dots, p-1$;

3) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \rtimes \langle x\rangle$, $\gamma \geqslant \alpha = \beta$, $[a, x] = b^{p^{\beta-1}}$, $[b, x] = a^{sp^{\alpha-1}} b^{tp^{\beta-1}}$, $n^2 - tn - s \not\equiv 0 \pmod p$, $t = 0, \dots, p-1$, $n = 1, \dots, p-1$;

4) $G = (((\langle a\rangle \rtimes \langle b\rangle)\langle x\rangle)\langle y\rangle$, $\alpha = \beta = \gamma = p = 2$, $[a, b] = [b, x] = [x, y] = a^2$, $[a, x] = b^2 = x^2 = y^2$, $[a, y] = 1$, $[b, y] = a^2b^2$, $\varepsilon = 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим два случая:

1) в G существуют элементы порядка p, не содержащиеся в G';

2) G' содержит все элементы порядка p из G.

С л у ч а й 1. Ввиду Р.3 $G = X \rtimes \langle x\rangle$, где $|x| = p^\gamma$, $\gamma \geqslant 1$. Ясно, что $X' = 1$, $X \geqslant G'$. Обозначим через $\langle a\rangle$ наибольшую циклическую подгруппу из X. Тогда $X = \langle a\rangle \times \Pi_{j=1}^k \langle b_j\rangle$, где $|b_j| = p^{\beta_j}$, $\alpha \geqslant \beta_j$. Не нарушая общности, можно считать, что $\beta_j \geqslant \beta_{j+1}$. Ясно, что либо $[a, x] \neq 1$, либо $[b_j, x] \neq 1$.

Легко убедиться, что можно всегда считать $[a, x] \neq 1$. Значит, $X = \langle a\rangle \times C$. Ввиду Р. 4 $[a, x] \notin \langle a\rangle$ и $M = (\langle [a, x]\rangle \times \langle a\rangle) \rtimes \langle x\rangle > G'$, поэтому $\langle a\rangle \times \langle [a, x]\rangle = \langle a\rangle \times \langle c_1\rangle$, где $\langle c_1\rangle = (\langle a\rangle \times \langle [a, x]\rangle) \cap C$, $|c_1| = p$. Обозначим через $\langle b\rangle$ наибольшую циклическую подгруппу из C, содержащую $\langle c_1\rangle$.

Тогда $C = \langle b\rangle \times C_1$, $|b| = p^\beta$, $G' \leqslant \langle a\rangle \times \langle b\rangle$. Значит, $G = M_1 \rtimes C_1$, где $M_1 = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \rtimes \langle x\rangle$. Отсюда и условия на G имеем $G = M_1$. Можно считать, что $[a, X] = b^{p^{\beta-1}}$ (заменяя, если нужно, b на $a^{ip^{\alpha-1}}b^j$, где $i, j = 0, \dots, p-1$, $j \neq 0$). Так как $|G'| \neq p$, $b^{p^{\beta-1}} \in Z(G)$ и $[b, x] \neq 1$, то $\beta \geqslant 2$. По лемме 2 $|\alpha - \beta| \leqslant 1$, $[b, x] = a^{sp^{\alpha-1}} b^{tp^{\beta-1}}$, $s = 1, \dots, p-1$, $t = 0, \dots, p-1$ и выполняются условия 3 и 4 этой леммы.

Пусть $\gamma < \alpha$. Полагая $z = ax$ в силу Р.1 имеем: при $p > 2$ $z^{p^\gamma} = a^{p^\gamma}$, при $p = 2$ $z^{p^\gamma} = a^{p^\gamma} b^{p^{\beta-1}}$. Отсюда $\langle z^{p^{\alpha-1}}\rangle \times \langle b^{p^{\beta-1}}\rangle = G'$. Понятно, что $H = \langle z, b\rangle$ — группа Миллера — Морено, $|H| = p^{\alpha+\beta}$, $G = H \rtimes \langle x\rangle$. Однако последнее соотношение противоречит выбору G. Поэтому $\gamma \geqslant \alpha$. Теперь легко видеть, используя лемму 2, что если $\alpha = \beta + 1$, G — группа типа 2, если $\alpha = \beta$, G — группа типа 3.

С л у ч а й 2. В этом случае нетрудно убедиться, что $G/G' = X/G' \times A/G' = X/G' \times \langle uG'\rangle \times \langle wG'\rangle$, где $A = \langle u, w\rangle$ — группа Миллера — Морено, $\langle u\rangle \cap \langle w\rangle = l$, $X = \langle G', x_1, \dots, x_l\rangle$, $|x_l| = p^{\alpha_l}$. Так как $X \neq G'$, $x_k \notin G'$, где $1 \leqslant k \leqslant l$, то $\alpha_k \geqslant 2$. Понятно, что $\langle x_k\rangle \cap A = \langle x_k^{p^{\alpha_k-1}}\rangle$. Положим $A_k = A\langle x_k\rangle$.

Покажем, что A — группа типа 1 Р. 2. Действительно, из ограничений на G и случай 2 A не может быть группой типа 3 Р. 2. Если A — группа типа 2 Р. 2, то ввиду Р. 5 $A_k = A \rtimes \langle y\rangle$, где $y \neq 1$, что в рассматриваемом случае невозможно. Значит, A — группа типа 1 Р. 2. Покажем далее, что A_k — $*$-группа. Предположим противное. Тогда $|A_k'| = p$ и по Р. 5 $A_k = H \rtimes \langle y\rangle$, где $y \neq 1$. Отсюда и условия случая 2 $H \not\geqslant G'$ и потому по Р. 4

$H' = 1$. Если $H = \langle g \rangle$, то $A_k = \langle g \rangle \rtimes \langle y \rangle$ — группа Миллера—Морено. Однако последнее соотношение противоречит условию $A_k > A$. Итак, H — нециклическая группа. Из этого следует, что тогда в G существуют элементы порядка p, не содержащиеся в G'. Противоречие. Следовательно, A_k — $*$-группа. Понятно, что A_k удовлетворяет всем условиям леммы 1. Значит, если $l = 1$, то $G = A\langle x_1 \rangle$ — группа типа 1.

Предположим, что $l = 2$. Тогда $G = A\langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle$. Положим $x_1 = x$, $x_2 = y$. Можно считать ввиду доказанного выше, что a, b, x удовлетворяют соотношениям 1 леммы 1, т. е. $[a, b] = [b, x] = a^2$, $[a, x] = b^2$, a, b, y удовлетворяют условиям 1—3 леммы 1. Поэтому $x^2 = y^2 = b^2$. Если $[y, x] = 1$, то $|xy| = 2$ и, очевидно, мы имеем уже рассмотренный случай 1. Следовательно, $[x, y] \neq 1$. Если $[x, y] = b^2$, то $\langle x \rangle \langle y \rangle$ — неабелева подгруппа порядка 8 — противоречие с Р. 4. Итак, либо $[x, y] = a^2$, либо $[x, y] = a^2b^2$. Положим $d = xy$. Ввиду Р. 1 $d^2 = [x, y]$. Предположим, что a, b, y удовлетворяют условию леммы 1, т. е. $[a, y] = b^2$, $[b, y] = a^2$. Тогда с учетом Р. 1 $[a, d] = [b, d] = 1$. Пусть $[x, y] = a^2$. Из этого и доказанного выше вытекает $(ad)^2 = 1$. Ясно, что $ad \notin G'$ и снова имеем случай 1. Значит, $[x, y] = a^2b^2$. Полагая $d_1 = bd$ в силу Р. 1 $d_1^2 = a^2$, $[a, d_1] = a^2$. Отсюда в G существует неабелева подгруппа порядка 8. Однако последнее утверждение противоречит Р. 4. Таким образом, соотношение 1 из леммы 1 для a, b, y невозможно. Пусть a, b, y удовлетворяют соотношению 2 леммы 1, т. е. $[a, y] = b^2$, $[b, y] = a^2b^2$. Легко заметить, что $[a, d] = 1$. Если $[x, y] = a^2$, то по Р. 1 $(ad)^2 = 1$. Понятно, что $(ad) \notin G'$ и снова имеем случай 1. Итак, $[x, y] = a^2b^2$. Полагая $y_1 = ad$, в силу Р. 1 имеем $y_1^2 = b^2$, $[a, y_1] = 1$, $[b, y_1] = a^2b^2$, $[x, y_1] = a^2$. Заменяя y на y_1, легко получаем, что G — группа типа 4. Пусть, наконец, a, b, y удовлетворяют соотношению 3 леммы 1, т. е. $[a, y] = 1$, $[b, y] = a^2b^2$. Пусть $[x, y] = a^2b^2$. Тогда по Р. 1 $d^2 = a^2b^2$, $(ad)^2 = 1$. Отсюда $(ad) \notin G'$. Противоречие. Таким образом, только $[x, y] = a^2$, а потому G — группа типа 4.

Предположим, что $l \neq 3$. Тогда в G существует подгруппа $G_1 = \langle a, b, x_1, x_2, x_3 \rangle$. Положим $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $\langle a, b, x, y \rangle$ — группа типа 4 настоящей леммы. Тогда $z^2 = y^2 = x^2 = b^2$. Полагая $d = yz$, в силу Р. 1 имеем $d^2 = [y, z]$. Так как $d \notin G'$, то $d^2 \neq 1$ и, значит, $[y, z] \neq 1$. Ввиду Р. 4 $[y, z] \notin \langle b^2 \rangle$, поэтому либо $[y, z] = a^2$, либо $[y, z] = a^2b^2$. Легко убедиться, что $[a, d] = 1$, $[b, d] = 1$. Если $[y, z] = a^2$, то $(ad)^2 = 1$ и $(ad) \notin G'$, что невозможно. Следовательно, только $[y, z] = a^2b^2$. Полагая $d_1 = bd$, в силу Р. 1 имеем $d_1^2 = a^2$, $[a, d_1] = a^2$. Поэтому в G существует неабелева подгруппа $\langle a \rangle \langle d_1 \rangle$ порядка 8, что противоречит Р. 4. Итак, $l \leqslant 2$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $G = H \rtimes \langle z \rangle$, где $H = (\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle) \langle x \rangle$ — группа типа 1 леммы 3, $z \neq 1$. Группа G является $*$-группой, когда она представима в виде $G = H \times \langle z \rangle$, где $|z| = 2$.*

Доказательство. Если $[H, z] = 1$, то при $|z| > 2$, очевидно, $\langle a \rangle \langle bz \rangle \ntrianglerighteq G'$, что противоречит Р. 4. Значит, если $[H, z] = 1$, $|z| = 2$ и потому G — искомая группа.

Пусть $[H, z] \neq 1$. Так как H является группой из леммы 1, то можно считать, что $[a, b] = [b, x] = a^2$, $[a, x] = b^2 = x^2$. Пусть $a_1 = x$, $b_1 = ax$, $x_1 = bx$, $a_2 = bx$, $b_2 = b$, $x_2 = ab$, $a_3 = ab$, $b_3 = ax$, $x_3 = a$. Нетрудно убедиться, что $H = (\langle a_i \rangle \rtimes \langle b_i \rangle) \rtimes \langle x_i \rangle$, где $i = 1, 2, 3$ и a_i, b_i, x_i удовлетворяют тем же соотношениям, что и a, b, x.

Предположим, что $[a, z] = [a_i, z] = 1$, где $i = 1, 2$. Тогда по Р. 1 $[a, z] = [x, z] = [bx, z] = [b, z][x, z] = 1$. Отсюда $[b, z] = 1$, поэтому $[H, z] = 1$. Противоречие. Таким образом, либо $[a, z] \neq 1$, либо $[a_i, z] \neq 1$, где $i = 1, 2$. Не нарушая общности, можно считать, что $[a, z] \neq 1$. В силу Р. 4 $[a, z] \notin \langle a^2 \rangle$ и потому $(\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle) \rtimes \langle z \rangle$ — $*$-группа, которая, очевидно, удовлетворяет условиям леммы 1. Следовательно, $|z| = 2$, $[a, z] = b^2$, $[b, z] = a^2b^{2\Delta}$, где $\Delta = 0,1$. Используя Р. 1, получаем $a_3^2 = b^2$, $b_3^2 = a^2$, $[a_3, z] = a^2b^{2(\Delta+1)}$, $[a_3, b_3] = b^2$. Из этих соотношений следует, что $((\langle a_3 \rangle \rtimes \langle b_3 \rangle) \rtimes \langle z \rangle$ — $*$-группа. Поэтому в силу леммы 1 $[a_3, z] = b_3^2 = a^2 = a^2b^{2(\Delta+1)}$ и, значит, $\Delta = 1$, $[b_3, z] = b^2[x, z] = a_3^2b_3^{2\Delta_1}$, где $\Delta_1 = 0,1$. Итак, $a_3^2b_3^{2\Delta_1} = b^2a^{2\Delta_1} = b^2[x, z]$, поэтому

$[x, z] = a^{2\Delta_1}$. Если $\Delta_1 = 1$, то подгруппа $\langle by, abxya^2b^2\rangle$ неабелева и неинвариантна в G. Противоречие с определением $*$-группы. Значит, $\Delta_1 \neq 1$. Тогда $[x, z] = 1$, $a_2^2 = a^2$, $[a_2, z] = a^2b^2$, $[a_2, b_2] = a^2$. Из этого следует, что $((\langle a_2\rangle \rtimes \langle b_2\rangle) \rtimes \langle z\rangle$ — $*$-группа, удовлетворяющая условиям леммы, и потому $[a_2, z] = b_2^2 = b^2 = a^2b^2$. Противоречие. Следовательно, $\Delta_1 = 1$. Лемма доказана.

Теорема. *Группа G тогда и только тогда является y-группой, когда $G = H \times C$, где $H = \langle a, b, x, y\rangle$, $|a| = p^\alpha$, $\alpha \geqslant 2$, $|b| = p^\beta$, $\beta \geqslant 2$, $|x| = p^\gamma$, $\gamma \geqslant 1$, $|y| = p^\varepsilon$, $\varepsilon \geqslant 0$, C — периодическая абелева группа, экспонента силовской p-подгруппы которой не превышает $p^{\beta-1}$ и H удовлетворяет одному из следующих условий*:

1) $H = ((\langle a\rangle \rtimes \langle b\rangle) \langle x\rangle$, $\alpha = \beta = \gamma = p = 2$, $[a, b] = a^2$, $[a, x] = b^2 = x^2$, $[b, x] = a^2b^2$;

2) $H = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \rtimes \langle x\rangle$, $\gamma \geqslant \alpha = \beta + 1$, $[a, x] = b^{p^{\beta-1}}$, $[b, x] = a^{sp^{\alpha-1}}$, $s = 1, \ldots, p-1$;

3) $H = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \rtimes \langle x\rangle$, $\gamma \geqslant \alpha = \beta$, $[a, x] = b^{p^{\beta-1}}$, $[b, x] = a^{sp^{\alpha-1}}b^{tp^{\beta-1}}$, $n^2 - tn - s \not\equiv 0 \pmod p$, $s, n = 1, \ldots, p-1$, $t = 0, \ldots, p-1$;

4) $H = (((\langle a\rangle \rtimes \langle b\rangle) \langle x\rangle) \langle y\rangle$, $\alpha = \beta = \gamma = \varepsilon = p = 2$, $[a, b] = [b, x] = [x, y] = a^2$, $[a, x] = b^2 = x^2 = y^2$, $[a, y] = 1$, $[b, y] = a^2b^2$.

Доказательство. Необходимость. Пусть G — исследуемая группа. Тогда в силу теоремы из [12] $G = H_1 \times C_1$, где H_1 — конечная метабелева метагамильтонова p-группа с элементарным коммутантом порядка p^2, C_1 — периодическая абелева группа, экспонента силовской p-подгруппы которой меньше экспоненты любой подгруппы Миллера—Морено из H_1.

Пусть H_1 не содержит дополняемых в ней собственных неабелевых подгрупп. На основании леммы 3 получаем, что G имеет искомое разложение и H удовлетворяет условиям 1—4.

Пусть, наконец H_1 содержит дополняемую в ней собственную неабелеву H. Тогда $H_1 = H \rtimes D$. В силу Р. 4 $D' = 1$ и H — группа, не являющаяся подгруппой Миллера—Морено, в которой недополняема ни одна собственная неабелева подгруппа. Если $[H, D] = 1$, то H — $*$-группа из леммы 3. Значит, в этом случае G имеет указанное в теореме разложение и H удовлетворяет условиям 1—4. Пусть $[H, D] \neq 1$. Обозначим через L наибольшую подгруппу из $D \cap Z(G)$, дополняемую в D. Тогда $H_1 = (H \rtimes B) \times L$, где $[H, B] \neq 1$. Отсюда получаем $B = \langle z\rangle \times B_1$, где $[H, z] \neq 1$. Рассмотрим два случая: 1) $|H'| = p^2$; 2) $|H'| = p$.

Случай 1. В этом случае, очевидно, H — группа типа 1—4 леммы 3. Пусть H — группа типа 1 леммы 3 и $G_1 = H \rtimes \langle z\rangle$. Ясно, что G_1 — $*$-группа из леммы 4 и, значит, $[H, z] = 1$, что не так. Таким образом, H не может быть группой типа 1 леммы 3.

Пусть H — группа типа 2,3 леммы 3, т. е. $H = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \langle x\rangle = A\langle x\rangle$, где $A = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $|x| = p^\gamma$, $\gamma \geqslant \alpha \geqslant \beta \geqslant 2$, $G' = \langle a^{p^{\alpha-1}}\rangle \times \langle b^{p^{\beta-1}}\rangle$. Полагая $x = z_1$, $z_2 = ax$, $z_3 = bx$ и рассматривая подгруппы $\langle z_i, z\rangle$, где $i = 1, 2, 3$, легко получаем $A \cap \langle z_1\rangle = 1$, $z_2^{p^{\gamma-1}} \notin A$, $z_2^{p^\gamma} = 1$, $\langle z_2\rangle \cap A = 1$, $\langle z_3\rangle \cap A = 1$. Значит, $\langle z_i, z\rangle = ((\langle [z_i, z]\rangle \times \langle z_i\rangle) \rtimes \langle z\rangle \ntrianglerighteq G'$ и потому по Р.4 $[z_i, z] = 1$. Отсюда $z \in Z(G)$, что не так. Таким образом, в рассматриваемом случае H не может быть группой типа 2, 3 леммы 3.

Пусть, наконец, H — группа типа 4 леммы 3. Положим $H_2 = \langle a, b, x\rangle$, $H_3 = \langle a, b, y\rangle$, $M_2 = H_2 \rtimes \langle z\rangle$, $M_3 = H_3 \rtimes \langle z\rangle$. Понятно, что M_2 и M_3 — группы из леммы 4. В силу выбора z можно считать, что либо M_2 — группа типа 1 леммы 4, M_3 — группа типа 2 этой леммы, либо M_2 и M_3 — группы типа 2 леммы 4. Легко заметить, что первая возможность для подгрупп M_2 и M_3 невозможна. Итак, M_2 и M_3 — группы типа 2 леммы 4, т. е. a, b, x, z и a, b, y, z удовлетворяют отмеченным в этом типе соотношениям. Не нарушая общности, можно считать, что a, b, x, y удовлетворяют соотношениям для групп типа 4 леммы 3. Ясно, что $[y, z] \in \{1, a^2, b^2, a^2b^2\}$. Если $[y, z] = a^2, b^2, a^2b^2$, то, полагая соответственно $z_1 = ay, y, xy$, легко убеждаемся, что $|z_1| = 4$, $|\langle z_1\rangle \rtimes \langle z\rangle| = 8$. Однако последнее утверждение противоречит Р. 4. Итак, $[y, z] = 1$. Полагая теперь $z_1 = byz$, в силу Р. 1 имеем

$z_1^2 = 1$. Понятно, что $H_2 \cap \langle z_1 \rangle = 1$ и потому $H_2\langle z_1 \rangle = H_2 \rtimes \langle z_1 \rangle$, $| H_2 \rtimes \langle z_1 \rangle | = | H |$. Из этого следует, что $z \notin H_2 \rtimes \langle z_1 \rangle$ и, значит, $(H_2 \rtimes \langle z_1 \rangle) \rtimes \langle z \rangle$. В силу Р. 4 подгруппа $\langle z_1, z \rangle$ абелева, поэтому $[z_1, z] = 1$. С другой стороны, согласно Р. 1 и отмеченному выше соотношению $[b, z] = a^2b^2$ имеем $[z_1, z] = a^2b^2 \neq 1$. Противоречие. Значит, H не является группой типа леммы 3. Следовательно, случай 1 полностью рассмотрен.

Случай 2. Ясно, что $H' \not\triangleright [B, H]$ и, значит, $H' \not\triangleright [H, z]$. Так как H не является группой, в которой нет дополняемых собственных неабелевых подгрупп, то, пользуясь Р.4, получаем $H = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, где $| a | = p^\alpha$, $| b | = p^\beta$, $| x | = p^\gamma$, $\gamma \geqslant \beta \geqslant 2$, $[a, x] = b^{p^{\beta-1}}$, $b \in Z(H)$. Очевидно, что если $[H, z] \in \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, то $G' = \langle a^{p^{\alpha-1}} \rangle \times \langle b^{p^{\beta-1}} \rangle$.

Отсюда $([x, z] \times \langle x \rangle) \rtimes \langle z \rangle \not\triangleright G'$, поэтому по Р. 4 $[x, z] = 1$. Понятно, что $\langle ax \rangle \cap (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) = 1$ и ввиду Р. 1 $[ax, z] = 1$. Из этого с учетом Р. 1 следует $[a, z] = 1$. Так же получаем $[b, z] = 1$. Итак, $[H, z] = 1$. Противоречие. Следовательно, $[H, z] \notin \langle a \rangle \times \langle b \rangle$. Но тогда $G' \cap \langle a \rangle = 1$. Отсюда с учетом Р. 4 $[a, z] = 1$. Ясно, что и $\langle ab \rangle \cap G' = 1$ и потому снова по Р. 4 $[ab, z] = 1$. Из этого с учетом Р. 1 вытекает $[b, z] = 1$. Положим $G_1 = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle) \rtimes \langle z \rangle$, $A = (\langle b^{p^{\beta-1}} \rangle \times \langle a \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $F = A \rtimes \langle z \rangle$. Понятно, что $G_1' = G'$ и $G_1 = F\langle b \rangle$. Отсюда ввиду [15] $G_1' = F'[F, b]$ получим $| F' | = p$. С другой стороны, в силу несложных рассуждений имеем $| F' | = p^2$. Противоречие, показывающее, что рассматриваемый случай невозможен. Необходимость доказана.

Достаточность доказывается непосредственной проверкой. Теорема доказана.

1. *Ромалис Г. М.* О метагамильтоновых группах // Успехи мат. наук.— 1962.— № 6.— С. 228.
2. *Ромалис Г. М., Сесекин Н. Ф.* О метагамильтоновых группах I // Мат. зап. Урал. ун-та.— 1966.— **5**, № 3.— С. 45—49.
3. *Сесекин Н. Ф., Ромалис Г. М.* О метагамильтоновых группах II // Там же.— 1968.— **6**, № 5.— С. 50—53.
4. *Ромалис Г. М., Сесекин Н. Ф.* О метагамильтоновых группах III // Там же.— 1970.— **7**, № 3.— С. 195—199.
5. *Черников С. Н.* Бесконечные неабелевы группы, у которых инвариантны все бесконечные неабелевы подгруппы // Укр. мат. журн.— 1971.— **23**, № 5.— С. 604—628.
6. *Нагребецкий В. Т.* Конечные ненильпотентные группы, любая неабелева подгруппа которых инвариантна // Мат. зап. Урал. ун-та.— 1967.— **6**, № 1.— С. 80—88.
7. *Махнев А. А.* О конечных метагамильтоновых группах // Всесоюз. алгебр. симп. (Гомель, 1975) : Тез. докл.— Минск : Ин-т математики АН БССР, 1975.— С. 39.
8. *Махнев А. А.* О конечных метагамильтоновых группах // Мат. зап. Урал. ун-та.— 1976.— **10**, № 1.— С. 60—75.
9. *Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н.* Строение разрешимых ненильтопотентных метагамильтоновых групп // Мат. заметки.— 1983.— **34**, № 2.— С. 179—188.
10. *Семко Н. Н., Кузенный Н. Ф.* Строение локально ступенчатых непериодических метагамильтоновых групп // XVII Всесоюз. алгебр. конф. (Минск, 1983): Тез. докл.— Минск: Ин-т математики АН БССР, 1983.— Ч. 2.— С. 214—215.
11. *Семко Н. Н., Кузенный Н. Ф.* Строение метациклических метагамильтоновых групп (методические рекомендации) // Киев : Киев. пед. ин-т, 1983.— 22 с.
12. *Семко Н. Н., Кузенный Н. Ф.* О строении бесконечных нильпотентных периодических метагамильтоновых групп // Строения групп и их подгрупповая характеризация.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984.— С. 101—111.
13. *Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н.* Строение разрешимых метагамильтоновых групп // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1985.— № 2.— С. 6—9.
14. *Redei L.* Das «Schiefe Produkt» in Gruppentheorie mit Anwendungen ... Cooment // Math. Helv.— 1947.— **20**, S. 225—264.
15. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп.— М. : Наука, 1982.— 298 с.

НПО «Горсистемотехника», Киев

Получено 28.01.86,
после доработки — 11.03.86