УДК 519.21

Г. П. Буцан, К. Н. Лятамбур

Первообразные мультипликативные системы почти линейных операторов для почти линейных аддитивных операторных систем без условий непрерывности

В настоящей статье обобщены результаты, полученные в работах [1—5], на случай сильных почти линейных операторных мультипликативных стохастических систем без условия непрерывности и сохранены, в основном, все обозначения, принятые в указанных работах.

Определение 1. *Двупараметрическая система S-операторов* $\{X_s^t, 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T < \infty\}$ *называется mS-полугруппой, если она удовлетворяет условиям* 1.1, 1.3, 1.4 *работы* [3] *и условию*

$$\forall s \in [0, T] \quad (X_{s-}^s - E)(X_s^{s+} - E) = 0 \quad (\mathrm{mod}\, P). \tag{1}$$

Определение 2. *Двупараметрическая система S-операторов* $\{Y_s^t, 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T < \infty\}$ *называется aS-полугруппой, если она удовлетворяет условиям* 2.1, 2.3, 2.4 *работы* [3] *и условию*

$$\forall s \in [0, T] \quad Y_{s-}^s Y_s^{s+} = 0 \qquad (\mathrm{mod}\, P). \tag{2}$$

В (1), (2) через X_{s-}^s, X_s^{s+}, Y_{s-}^s, Y_s^{s+} обозначены пределы при $\varepsilon \downarrow 0$ операторов $X_{s-\varepsilon}^s$, $X_s^{s+\varepsilon}$, $Y_{s-\varepsilon}^s$, $Y_s^{s+\varepsilon}$ соответственно. Покажем, что они существуют, для определенности ограничившись первым из них. При $x \in H$, $s_n \uparrow s$, аналогично лемме 5.1 в [1] запишем равенство $M|(X_{s_n}^s - X_{s_{n+m}}^s) x|_1^2 = \mathcal{F}_{s_n}^x(s) - \mathcal{F}_{s_{n+m}}^x(s)$, $\mathcal{F}_s^x(t) = M|(X_s^t - E) x|_1^2$. Теперь существование X_{s-}^s вытекает из монотонного роста функции $\mathcal{F}_s^x(t)$ по $0 \downarrow s < t \uparrow T$. Отсюда следует также, что X_{s-}^s является S-оператором.

Аналогично существуют следующие пределы

$$X_{s-}^{s-} = \lim_{0<\varepsilon<\delta\downarrow 0} X_{s-\delta}^{s-\varepsilon} = E, \ X_{s+}^{s+} = \lim_{0<\varepsilon<\delta\downarrow 0} X_{s+\varepsilon}^{s+\delta} = E,$$

$$Y_{s-}^{s-} = \lim_{0<\varepsilon<\delta\downarrow 0} Y_{s-\delta}^{s-\varepsilon} = 0, \ Y_{s+}^{s+} = \lim_{0<\varepsilon<\delta\downarrow 0} Y_{s+\varepsilon}^{s+\delta} = 0. \tag{3}$$

В дальнейшем будем предполагать, что пределы в (3) (а следовательно, и в (1), (2)) существуют в $|\cdot|_5$.

Известно (см. [6]), что для любой mS-полугруппы X_s^t существует инфинитезимальная aS-полугруппа Y_s^t, которая определяется по формуле

$$D(X_s^t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} (X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E) = Y_s^t, \tag{4}$$

где предел берется в норме $|\cdot|_5$ и не зависит от последовательности разбиений $\{\Delta_n[s, t], n \geqslant 1\} = \{\{t_k^n, k = \overline{0, m_n}\}, n \geqslant 1\}$ отрезка $[s, t]$. Здесь и всюду в дальнейшем рассматривается измельчающаяся последовательность разбиений, т. е. $\delta_n = \max_{1\leqslant k\leqslant m_n} (t_k^n - t_{k-1}^n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема. *Для любой aS-полугруппы* Y_s^t *существует первообразная mS-полугруппа, которая определяется по формуле*

$$\overline{D}(Y_s^t) = \lim_{n\to\infty} \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} (Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + E) = X_s^t, \tag{5}$$

где предел берется в норме $|\cdot|_5$ *и не зависит от последовательности разбиений отрезка* $[s, t]$. *Кроме того, справедлива формула*

$$D(\overline{D}(Y_s^t)) = Y_s^t. \tag{6}$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, определим для произвольной mS-полугруппы X_s^t и aS-полугруппы Y_s^t множества α-скачков: $\Theta^\alpha(X)=\{\tau\in[0,T]:|X_{\tau-}^{\tau+}-E|_5^2\geqslant\alpha\}$, $\Theta^\alpha(Y)=\{\tau\in[0,T]:|Y_{\tau-}^{\tau+}|_5^2\geqslant\alpha\}$ и докажем следующую лемму.

Лемма. I. *$\forall\alpha>0$ множество $\Theta^\alpha(X)$ конечно, и если $\Theta^\alpha(X)\cap[s,t]=\varnothing$, то существует такое $\delta>0$, что для любого разбиения $\Delta_n[s,t]$, удовлетворяющего неравенству $\delta_n<\delta$, справедливы соотношения $|X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}-E|_5^2<\alpha$, $k=\overline{1,m_n}$.*

II. *$\forall\alpha>0$ множество $\Theta^\alpha(Y)$ конечно, и если $\Theta^\alpha(Y)\cap[s,t]=\varnothing$, то существует такое $\delta>0$, что для любого разбиения $\Delta_n[s,t]$, удовлетворяющего неравенству $\delta_n<\delta$, справедливы соотношения $|Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}|_5^2<\alpha$, $k=\overline{1,m_n}$.*

Доказательства утверждений леммы аналогичны, поэтому приведем лишь первое из них. Предположим, что при некотором $\alpha>0$ множество $\Theta^\alpha(X)$ бесконечно и τ — некоторая его предельная точка. Последовательность $\{\tau_k\}\subset\Theta^\alpha(X)$, сходящуюся к τ, всегда можно выбрать монотонной. Будем считать, для определенности, что она возрастает. Тогда из указанной выше монотонности функции $F_s(t)$ следует, что для любой последовательности $\{t_k\}$, удовлетворяющей условию $t_{k-1}<\tau_k<t_k$, будут выполняться неравенства $|X_{t_{k-1}}^{t_k}-E|_5^2\geqslant|X_{\tau_k-}^{\tau_k+}-E|_5^2\geqslant\alpha$. Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty}|X_{t_{k-1}}^{t_k}-E|_5^2\geqslant\alpha>0$, что противоречит существованию в точке τ первого предела из (3), так как $t_k\uparrow\tau$ при $k\to\infty$.

Предположим теперь, что вторая часть утверждения I неверна, тогда $\forall n\geqslant1$ существует такое разбиение $\Delta_n[s,t]$, удовлетворяющее условию $\delta_n<1/n$, что для некоторого индекса k_n выполняется неравенство $|X_{t_{k_n-1}^n}^{t_{k_n}^n}-E|_5^2\geqslant\alpha$. Последовательность $\{t_{k_n}^n\}$ обладает некоторой предельной точкой t_0 и, не ограничивая общности, можно предполагать, что либо $t_{k_n}^n\uparrow t_0$, либо $t_{k_n-1}^n\downarrow t_0$, либо $t_{k_n}^n\downarrow t_0$ и $t_{k_n-1}^n\uparrow t_0$ при $n\to\infty$. Два первых случая противоречат существованию первого и второго предела в (3), а последний противоречит условию леммы.

Следствие 1. *$\forall\alpha>0$ $\exists\delta>0$ такое, что $\forall s$, $t\in[0,T]$, $s\leqslant t$, удовлетворяющих условию $t-s<\delta$, выполняются соотношения*

$$|X_s^t-E|_5^2<\alpha,\ \text{если}\ \Theta^\alpha(X)\cap[s,t]=\varnothing;$$

$$|Y_s^t|_5^2<\alpha,\ \text{если}\ \Theta^\alpha(Y)\cap[s,t]=\varnothing.$$

Количество элементов во множествах $\Theta^\alpha(X)$, $\Theta^\alpha(Y)$ будем обозначать $N_\alpha(X)$, $N_\alpha(Y)$ соответственно или просто N_α, когда ясно, о чем идет речь.

Доказательство теоремы. Предположим сначала, что последовательность разбиений отрезка $[s,t]$ монотонна, т. е. $\Delta_n[s,t]\subset\subset\Delta_{n+r}[s,t]$. Обозначим $X_s^t(\Delta_n)=\overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}}(Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}+E)$ и покажем, что в этом случае $\forall x\in H$ последовательность

$$\{M|(X_s^t(\Delta_n)-E)x|_1^2,\ n\geqslant1\}\tag{7}$$

монотонно возрастает.

Действительно, пусть $\Delta_n[s,t]=\{t_k^n,\ k=\overline{0,m_n}\}$, $\Delta_r^k[t_{k-1}^n,t_k^n]=\{s_i^k,\ i=0,r_k\}$. Тогда

$$M\left|\left(X_s^t\left(\bigcup_{k=1}^{m_n}\Delta_r^k\right)-E\right)x\right|_1^2-M|(X_s^t(\Delta_n)-E)x|_1^2=$$

$$=M\left|\left(X_s^t\left(\bigcup_{k=1}^{m_n}\Delta_r^k\right)-X_s^t(\Delta_n)\right)x\right|_1^2+2M\left(\left(X_s^t\left(\bigcup_{k=1}^{m_n}\Delta_r^k\right)-X_s^t(\Delta_n)\right)x,\right.$$

$$\left.(X_s^t(\Delta_n)-E)\,x\right). \tag{8}$$

Обозначим $V_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}=\overrightarrow{\prod_{i=1}^{r_k}}\left(Y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}+E\right)-E$. Тогда

$$M\left(\left(X_s^t\left(\bigcup_{k=1}^{m_n}\Delta_r^k\right)-X_s^t(\Delta_n)\right)x,\ (X_s^t(\Delta_n)-E)\,x\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m_n}M\left(\overrightarrow{\prod_{j=1}^{k-1}}\left(V_{t_{j-1}^n}^{t_j^n}+E\right)\left(V_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}-Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}\right)\times\right.$$

$$\times\overrightarrow{\prod_{j=k+1}^{m_n}}\left(Y_{t_{j-1}^n}^{t_j^n}+E\right)x,\ X_s^t(\Delta_n)\,x\Big)=\sum_{k=1}^{m_n}M\left(\overrightarrow{\prod_{j=1}^{k-1}}\left(V_{t_{j-1}^n}^{t_j^n}+E\right)\times\right.$$

$$\times\left(\overrightarrow{\prod_{i=1}^{r_k}}\left(Y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}+E\right)-E-\sum_{i=1}^{r_k}Y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}\right)\times$$

$$\times\overrightarrow{\prod_{j=1}^{m_n}}\left(Y_{t_{j-1}^n}^{t_j^n}+E\right)x,\ \overrightarrow{\prod_{j=1}^{k-1}}\left(Y_{t_{j-1}^n}^{t_j^n}+E\right)\left(\sum_{i=1}^{r_k}Y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}+E\right)\prod_{j=k+1}^{m_n}\left(Y_{t_{j-1}^n}^{t_j^n}+E\right)x\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k}M\left(\overrightarrow{\prod_{j=1}^{k-1}}\left(Y_{t_{j-1}^n}^{t_j^n}+E\right)Y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}M\left\{\overrightarrow{\prod_{j=i+1}^{r_k}}\left(Y_{s_{j-1}^k}^{s_j^k}+E\right)-E\right\}\overrightarrow{\prod_{j=k+1}^{m_n}}\left(Y_{t_{j-1}^n}^{t_j^n}+E\right)x,\right.$$

$$\left.\overrightarrow{\prod_{j=1}^{k-1}}\left(Y_{t_{j-1}^n}^{t_j^n}+E\right)Y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}\overrightarrow{\prod_{j=k+1}^{m_n}}\left(Y_{t_{j-1}^n}^{t_j^n}+E\right)x\right)=0,$$

так как математическое ожидание выражения, заключенного в фигурные скобки, равно нулю в силу 2.3 и 2.4 из [2]. Поэтому левая часть равенства (8) неотрицательна, и последовательность (7) монотонно возрастает. Покажем теперь, что она ограничена. Для этого обозначим

$$C_n[s,t]=\max_{1\leqslant i\leqslant j<m_n}\left|\overrightarrow{\prod_{k=i}^{j}}\left(Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}+E\right)\right|_5^2$$

и рассмотрим соотношение

$$\left|\overrightarrow{\prod_{k=i}^{j}}\left(Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}+E\right)\right|_5^2=\sup_{|x|_1\leqslant 1}\left(|x|_1^2+M\left|\left(\overrightarrow{\prod_{k=i}^{j}}\left(Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}+E\right)-E\right)x\right|_1^2\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{|x|_1\leqslant 1}\left(1+\sum_{k=i}^{j}M\left|\overrightarrow{\prod_{r=i}^{k-1}}\left(Y_{t_{r-1}^n}^{t_r^n}+E\right)Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}x\right|_1^2\leqslant 1+C_n[s,t]\sup_{|x|_1\leqslant 1}\sum_{k=i}^{j}M\left|Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}x\right|_1^2\leqslant\right.$$

$$\leqslant 1+C_n[s,t]\,|Y_s^t|_5^2, \tag{9}$$

поэтому $C_n[s,t]\leqslant 1+C_n[s,t]\,|Y_s^t|_5^2$.

Выберем теперь $\delta>0$ так, чтобы для него выполнялось следствие 1 при $\alpha=1/2$. Обозначим $\delta_0=\min\left\{\delta,\ \min_{1\leqslant i<j\leqslant N_{1/2}}\dfrac{|\tau_i-\tau_j|}{2}\right\}$, где $\{\tau_i,\ i=$

$=\overline{1, N_{1/2}}\} = \Theta^{1/2}(Y)$, и пусть $\Delta[s,t] = \{t_k,\ k=\overline{0,m}\}$ — некоторое фиксированное разбиение, удовлетворяющее условиям

$$\min_{1\leqslant k\leqslant m}(t_k - t_{k-1}) < \delta_0,\ m \leqslant \left[\frac{T}{\delta_0}\right] + 1. \tag{10}$$

Если теперь $\Delta_p[s,t] = \bigcup_{k=1}^{m} \Delta_r^k[t_{k-1}, t_k]$ — произвольное измельчение разбиения $\Delta[s,t]$, то

$$|X_s^t(\Delta_p)|_5^2 \leqslant \prod_{k=1}^{m} \Big| \overrightarrow{\prod_{i=1}^{r_k}} (Y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} + E)\Big|_5^2. \tag{11}$$

Те из сомножителей правой части, которые соответствуют отрезкам $[t_{k-1}, t_k]$, не содержащим точек множества $\Theta^{1/2}(Y)$, оцениваются согласно определению $C_n[s,t]$, (9), (10) и следствию 1 следующим образом:

$$\Big| \overrightarrow{\prod_{i=1}^{r_k}} (Y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} + E)\Big|_5^2 \leqslant C_r^k[t_{k-1}, t_k] \leqslant (1 - |Y_{t_{k-1}}^{t_k}|_5^2)^{-1} \leqslant 2. \tag{12}$$

В каждом из оставшихся произведений $\overrightarrow{\prod\limits_{i=1}^{r_k}} (Y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} + E)$ выделим сомножители, соответствующие отрезкам $[s_{i-1}^k, s_i^k]$, содержащим точку множества $\Theta^{1/2}(Y)$. Это могут быть один или два смежных интервала. В любом случае

$$\Big| \overrightarrow{\prod_{i=1}^{r_k}} (Y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} + E)\Big|_5^2 \leqslant \Big| \overrightarrow{\prod_{i=1}^{j-1}} (Y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} + E)\Big|_5^2 |Y_{s_{j-1}^k}^{s_j^k} + E|_5^2 |Y_{s_j^k}^{s_{j+1}^k} +$$
$$+ E|_5^2 \Big| \overrightarrow{\prod_{i=j+2}^{r_k}} (Y_{s_{i+1}^k}^{s_i^k} + E)\Big|_5^2.$$

Первый и четвертый сомножители в правой части последнего неравенства (один из них может быть равен 1, если $[t_{k-1}, s_1^k] \cap \Theta^{1/2}(Y) \neq \varnothing$ или $[s_{r_k-1}^k, t_k] \cap \Theta^{1/2}(Y) \neq \varnothing$) оцениваются аналогично (12), так как $\Theta^{1/2}(Y) \cap \cap ([t_{k-1}, s_{j-1}^k] \cup [s_{j+1}^k, t_k]) = \varnothing$. А второй и третий не превышают $1 + |Y_0^T|_5^2$, поэтому

$$\Big| \overrightarrow{\prod_{i=1}^{r_k}} (Y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} + E)\Big|_5^2 \leqslant 4(1 + |Y_0^T|_5^2)^2. \tag{13}$$

Количество точек множества $\Theta^{1/2}(Y)$, принадлежащих любому отрезку $[s,t]$, не превышает $N_{1/2}$ (заметим, что согласно лемме $N_{1/2} < \infty$), поэтому из (10) — (13) следует

$$|X_s^t(\Delta_p)|_5^2 \leqslant 2^{m+2N_{1/2}} (1 + |Y_0^T|_5^2)^{2N_{1/2}} = C(Y,T) < \infty. \tag{14}$$

Неравенство (14) доказано для случая, когда $\Delta_p \supset \Delta$, однако оно верно для любого разбиения $\Delta_p[s,t]$. Действительно, из доказанной выше монотонности последовательности (7) следует $|X_s^t(\Delta_p)|_5^2 \leqslant |X_s^t(\Delta_p \cup \Delta)|_5^2 \leqslant C(Y,T)$, так как разбиение $\Delta_p \cup \Delta$ удовлетворяет всем необходимым условиям.

Последняя оценка не зависит от отрезка $[s,t]$ и разбиения $\Delta_p[s,t]$, поэтому

$$C_p[s,t] \leqslant C(Y,T) < \infty \quad \forall s,t: 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, \quad \forall \Delta_p[s,t]. \tag{15}$$

Но тогда

$$M|(X_s^t(\Delta_n)-E)x|_1^2 \leqslant \sum_{k=1}^{m_n} M\left|\overrightarrow{\prod_{i=1}^{k-1}}(Y_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}+E)Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}x\right|_1^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_n[s,t]\sum_{k=1}^{m_n} M|Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}x|_1^2 \leqslant C_n[s,t]|Y_s^t|_5^2 \leqslant C(Y,T)|Y_0^T|_5^2 < \infty.$$

Тем самым доказано, что последовательность (7) монотонна, ограничена и, следовательно, имеет конечный предел. Тогда из (8) следует, что $\forall x\in H$ последовательность $\{X_s^t(\Delta_n\}x,\ n\geqslant 1\}$ фундаментальна в смысле сходимости в среднем квадратическом в норме $|\cdot|_1$ и имеет некоторый предел $X_s^t x$. Это означает, в свою очередь, что последовательность $\{X_s^t(\Delta_n)\}$ сходится в норме $|\cdot|_5$ к некоторому пределу X_s^t, в силу замкнутости $X_s^2(H,\Omega)$ (см. [1]) также принадлежащему $X_s^2(H,\Omega)$.

Покажем теперь, что этот предел не зависит от последовательности $\Delta_n[s,t]$. Пусть $u\in[s,t]$, тогда в силу условия (2), если $u\in[t_{k_u-1}^n, t_{k_u}^n]$, то

$$\lim_{n\to\infty}|X_s^t(\Delta_n\cup\{u\})-X_s^t(\Delta_n)|_5^2 \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty}\left|\overrightarrow{\prod_{k=1}^{k_u-1}}(Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}+E)\right|_5^2 |Y_{t_{k_u-1}^n}^n Y_u^{t_{k_u}^n}|_5^2 \left|\overrightarrow{\prod_{k=k_u+1}^{m_n}}(Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}+E)\right|_5^2 = 0.$$

Следовательно, любое конечное число точек, добавленных в последовательность разбиений, не изменяют предела. Поэтому, если некоторой монотонной последовательности $\tilde{\Delta}_m$, отличной от $\{\Delta_n\}$, соответствует предел $\tilde{X}_s^t = \lim_{m\to\infty} X_s^t(\tilde{\Delta}_m)$, то

$$M|(X_s^t-\tilde{X}_s^t)x|_1^2 = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} M|(X_s^t(\Delta_n)-X_s^t(\tilde{\Delta}_m))x|_1^2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} M|(X_s^t(\Delta_n)-X_s^t(\Delta_n\cup\tilde{\Delta}_m))x|_1^2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}(M|(X_s^t(\Delta_n\cup\tilde{\Delta}_m)-E)x|_1^2 - M|(X_s^t(\Delta_n)-E)x|_1^2 =$$

$$= M|(\tilde{X}_s^t-E)x|_1^2 - M|(X_s^t-E)x|_1^2.$$

Аналогично, поменяв порядок пределов, получаем $M|(X_s^t-\tilde{X}_s^t)x|_1^2 = M|(X_s^t-E)x|_1^2 - M|(\tilde{X}_s^t-E)x|_1^2$ и, следовательно, $\forall x\in H$ $M|(X_s^t-\tilde{X}_s^t)x|_1^2=0$, т. е. $X_s^t=\tilde{X}_s^t \pmod P$. Если теперь $\{\Delta_n[s,t]\}$ — произвольная немонотонная последовательность, то нетрудно видеть, что последовательности $X_s^t\left(\bigcup_{k=1}^n \Delta_k\right)$ и $X_s^t(\Delta_n)$ имеют общий предел X_s^t.

Докажем, что X_s^t является mS-полугруппой. Для этого достаточно проверить условие (1), так как 1.1, 1.3, 1.4 из [2] для X_s^t очевидно выполняются.

Справедливость условия (1) для X_s^t вытекает из следующего (доказанного ниже) равенства:

$$\lim_{n\to\infty}\overrightarrow{\prod_{k=2}^{m_n}}(Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}+E) = \lim_{n\to\infty}\overline{X}_s^t(\Delta_n) = X_{s+}^t, \tag{16}$$

так как тогда

$$X_s^{s+}X_{s+}^t = X_s^t = \lim_{n\to\infty}X_s^t(\Delta_n) = \lim_{t_1^n\downarrow s}(Y_s^{t_1^n}+E)\lim_{n\to\infty}\overline{X}_s^t(\Delta_n) = (Y_s^{s+}+E)X_{s+}^t$$

и, переходя в этом равенстве к пределу при $t\downarrow s$, получаем $X_s^{s+}=Y_s^{s+}+E$, воспользовавшись свойствами (3), которые для первообразной X_s^t вытекают из того, что она удовлетворяет условиям 1.1, 1.3, 1.4 из [2]. Аналогично $X_{s-}^s=Y_{s-}^s+E$.

Докажем теперь равенство (16). Аналогично приведенным выше выкладкам для $X_s^t(\Delta_n)$ можно показать, что существует $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{X}_s^t(\Delta_n)=\overline{X}_s^t$, который не зависит от последовательности $\{\Delta_n\}$. Так как

$$|\overline{X}_s^t-E|_5^2=\lim_{n\to\infty}|X_s^t(\Delta_n)-E|_5^2\leqslant\lim_{n\to\infty}\sup_{|x|_1\leqslant 1}\sum_{k=2}^{m_n}M\Big|\overrightarrow{\prod_{i=2}^{k-1}}(Y_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}+E)Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}x\Big|_1^2\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{n\to\infty}C_n[s,t]\,|Y_{t_1^n}^t|_5^2\leqslant C(Y,T)\,|Y_{s+}^t|_5^2\to C(Y,T)\,|Y_{s+}^{s+}|_5^2=0$$

при $t\downarrow s$, то $\overline{X}_s^{s+}=E$. Поэтому, переходя к пределу по $\tau\downarrow s$ в очевидном равенстве $\overline{X}_s^\tau X_\tau^t=\overline{X}_s^t$, получаем $X_{s+}^t=\overline{X}_s^t$, что и следовало доказать.

Докажем наконец формулу (6). Пусть, как и прежде, $\Delta_n[s,t]=\{t_k^n\}$, $\Delta_r^k[t_{k-1}^n,t_k^n]=\{s_i^k\}$. Докажем равенство

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{r\to\infty}\Big|\sum_{k=1}^{m_n}(X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}(\Delta_r^k)-E)-Y_s^t\Big|_5^2=0,\tag{17}$$

которое равносильно утверждению: для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta_0>0$, что для любого разбиения Δ_n и его измельчений Δ_r^k, удовлетворяющих условиям $\delta_r<\delta_n<\delta_0$, выполняется

$$\Big|\sum_{k=1}^{m_n}(X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}(\Delta_r^k)-E)-Y_s^t\Big|_5^2<\varepsilon.\tag{18}$$

Для этого рассмотрим следующие соотношения:

$$M\Big|\Big(\sum_{k=1}^{m_n}(X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}(\Delta_r^k)-E)-Y_s^t\Big)x\Big|_1^2=M\Big|m_nx+\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k}Y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}+$$

$$+\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r_k}Y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}Y_{s_{j-1}^k}^{s_j^k}x+\ldots+\sum_{k=1}^{m_n}Y_{s_0^k}^{s_1^k}Y_{s_1^k}^{s_2^k}\ldots Y_{s_{r_k-1}^k}^{s_{r_k}^k}x-m_nx-$$

$$-\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k}Y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}x\Big|_1^2=M\Big|\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r_k}Y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}Y_{s_{j-1}^k}^{s_j^k}x\Big|^2+$$

$$+M\Big|\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{1\leqslant i<j<l\leqslant r_k}Y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}Y_{s_{j-1}^k}^{s_j^k}Y_{s_{l-1}^k}^{s_l^k}x\Big|_1^2+\ldots+M\Big|\sum_{k=1}^{m_n}Y_{s_0^k}^{s_1^k}Y_{s_1^k}^{s_2^k}\ldots Y_{s_{r_k-1}^k}^{s_{r_k}^k}x\Big|_1^2\leqslant$$

$$\leqslant\Big|\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r_k}Y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}Y_{s_{j-1}^k}^{s_j^k}\Big|_5^2\Big(|x|_1^2+M\Big|\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k}Y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}x\Big|_1^2+\ldots$$

$$\ldots+M\Big|\sum_{k=1}^{m_n}Y_{s_0^k}^{s_1^k}Y_{s_1^k}^{s_2^k}\ldots Y_{s_{r_k-1}^k}^{s_{r_k}^k}x\Big|_1^2\Big)\leqslant\Big|\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r_k}Y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}Y_{s_{j-1}^k}^{s_j^k}\Big|_5^2\times$$

$$\times M\Big|\overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}}\overrightarrow{\prod_{i=1}^{r_k}}(Y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}+E)x\Big|_1^2\leqslant\Big|\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{j=2}^{r_k}Y_{t_{k-1}^n}^{s_{j-1}^k}Y_{s_{j-1}^k}^{s_j^k}\Big|_5^2M\Big|X_s^t\Big(\bigcup_{k=1}^{m_n}\Delta_r^k\Big)x\Big|_1^2.$$

Отсюда в силу (15) имеем

$$\Big| \sum_{k=1}^{m_n} (X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}(\Delta_r^k) - E) - Y_s^t \Big|_5^2 \leqslant C(Y, T) \Big| \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{j=2}^{r_k} Y_{t_{k-1}^n}^{s_{j-1}^k} Y_{s_{j-1}^k}^{s_j^k} \Big|_5^2 . \qquad (19)$$

Зададим теперь некоторое $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta_1(\varepsilon)$ таким образом, чтобы для него выполнялось следствие 1 при $\alpha = \varepsilon (4C(Y, T) \mid Y_0^T |_5^2)^{-1}$ и никакие две точки множества $\Theta^\alpha(Y) = \{\tau_i, \ i = \overline{1, N_\alpha}\}$ не лежали на отрезке длины $\delta_1(\varepsilon)$.

Представим сумму в правой части (19) в виде трех сумм $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$, индексы слагаемых каждой из которых удовлетворяют одному из следующих условий соответственно:

1) $[t_{k-1}^n, \ s_{j-1}^k] \cap \Theta^\alpha(Y) = \varnothing$;

2) $s_{j-1}^k \in \Theta^\alpha(Y)$;

3) $[t_{k-1}^n, \ s_{j-1}^k) \cap \Theta^\alpha(Y) \neq \varnothing$, и оценим $|\cdot|_5^2$ каждой из указанных трех сумм в предположении, что $\delta_r < \delta_n < \delta_1(\varepsilon)$:

$$|\Sigma_1|_5^2 \leqslant \sup_{v-u<\delta_n} | Y_u^v |_5^2 \Big| \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{j=2}^{r_k} Y_{s_{j-1}^k}^{s_j^k} \Big|_5^2 \leqslant \alpha \mid Y_0^T |_5^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{4C(Y, T)} \qquad (20)$$

в силу следствия 1, так как sup берется по тем отрезкам $[u, v]$ которые не имеют общих точек с $\Theta^\alpha(Y)$; Σ_2 содержит не более N_α слагаемых, каждое из которых имеет вид $Y_u^{\tau_i} Y_{\tau_i}^v$, где $u < \tau_i < v$, $v - u < \delta_n$, поэтому

$$|\Sigma_2|_5^2 \leqslant \sum_{i=1}^{N_\alpha} \sup_{\substack{v-u<\delta_n \\ [u,v]\ni\tau_i}} | Y_u^{\tau_i} Y_{\tau_i}^v |_5^2;$$

из (2) следует, что каждое слагаемое последней суммы стремится к нулю при $v - u \downarrow 0$, поэтому существует такое $\delta_2(\varepsilon)$, что если $\delta_n < \delta_2(\varepsilon)$, то

$$|\Sigma_2|_5^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{4C(Y, T)} . \qquad (21)$$

Рассмотрим теперь произвольное слагаемое из Σ_3. Пусть $i = \min\{j : : [t_{k-1}^n, \ s_j^k) \cap \Theta^\alpha(Y) \neq \varnothing\}$. Тогда, воспользовавшись очевидным равенством $\sum_{j=2}^{r_k} Y_{t_{k-1}^n}^{s_{j-1}^k} Y_{s_{j-1}^k}^{s_j^k} = Y_{t_{k-1}^n}^{s_i^k} Y_{s_i^k}^{t_k^n} + \sum_{j=2}^{r_k} Y_{s_i^k}^{s_{j-1}^k} Y_{s_{j-1}^k}^{s_j^k}$, представим Σ_3 в виде соответствующих сумм Σ_{31} и Σ_{32}.

Так как $[s_i^k, \ s_{j-1}^k] \cap \Theta^\alpha(Y) = \varnothing$ то $|\Sigma_{32}|_5^2$ оценивается с использованием следствия 1 аналогично оценке $|\Sigma_1|_5^2$ следующим образом

$$|\Sigma_{32}|_5^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{4C(Y, T)} . \qquad (22)$$

Каждое слагаемое Σ_{31} имеет вид $Y_u^v Y_{\tau_i+\beta}^{\tau_i+\gamma}$, где $[u, v] \ni \tau_i$, $0 < \beta < \gamma \leqslant \leqslant \delta_n$, поэтому $|\Sigma_{31}|_5^2 \leqslant | Y_0^T |_5^2 \sum_{i=1}^{N_\alpha} \sup_{0<\beta<\gamma\leqslant\delta_n} | Y_{\tau_i+\beta}^{\tau_i+\gamma} |_5^2$.

Из (3) следует, что каждое слагаемое последней суммы стремится к нулю при $\beta < \gamma \downarrow 0$, а так как в силу леммы число этих слагаемых конечно, то существует такое $\delta_3(\varepsilon)$, что если $\delta_n < \delta_3(\varepsilon)$, то

$$|\Sigma_{31}|_5^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{4C(Y, T)} . \qquad (23)$$

Из (20)—(23) следует, что если $\delta_r < \delta_n < \min_{i=\overline{1,3}} \delta_i(\varepsilon)$, то выполняется неравенство (18), что равносильно справедливости равенства (17), из которого вытекает формула (6).

1. *Буцан Г. П.* Стохастические полугруппы.— Киев : Наук. думка, 1977.— 213 с.
2. *Буцан Г. П.* Стохастические полугруппы: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— Киев, 1977.— 152 с.
3. *Буцан Г. П.* Об инфинитезимальных полугруппах для одного класса стохастических полугрупп // Укр. мат. журн.— 1983.— **35**, № 2.— С. 221—224.
4. *Буцан Г. П.* О первообразных полугруппах для одного класса стохастических полугрупп // Там же.— № 4.— С. 485—489.
5. *Чани А. С.* Групповая структура множества стохастических полугрупп // Теория случайных процессов.— 1981.— Вып. 9.— С. 117—124.
6. *Лятамбур К. Н.* Об инфинитезимальных полугруппах для s-операторных мультипликативных полугрупп // Аналит. методы в теории надежности.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1985.— С. 102—106.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 22.04.86