УДК 519.248

Д. Г. Кореневский

Алгебраический критерий абсолютной (по нелинейности) устойчивости стохастических систем автоматического регулирования с нелинейной обратной связью

В данной работе результаты предыдущих исследований [1—3] по устойчивости линейных систем развиваются и применяются для получения алгебраических коэффициентных условий асимптотической устойчивости с вероятностью 1 положения равновесия стохастических нелинейных систем автоматического регулирования — систем с нелинейной обратной связью (систем Лурье—Постникова) [4]. Как в [1—3], условия устойчивости выражены в терминах алгебраических матричных уравнений Сильвестра и некоторых неулучшаемых неравенств.

1. Постановка задачи. Математической моделью рассматриваемых систем автоматического регулирования являются векторно-матричные системы нелинейных (со специфическими скалярными нелинейностями — нелинейностями в гурвицевом углу, гурвицевом секторе) стохастических дифференциальных уравнений Ито вида

$$d\tilde{x}(t) = [A\tilde{x}(t) + g\varphi(\sigma)]\,dt + B\tilde{x}(t)\,dw(t), \quad 0 \leqslant t, \quad \tilde{x}(0) = x_0,$$

$$\tilde{x} \in \mathbb{R}^n, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

возникающие из детерминированных систем автоматического регулирования Лурье — Постникова

$$dx(t) = [Ax(t) + g\varphi(\sigma)]\,dt, \quad 0 \leqslant t, \quad x(0) = x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

при возмущении матрицы Adt случайной добавкой $B\,dw(t)$.

Здесь нелинейная дифференцируемая функция $\varphi \in \mathrm{R}^1$ удовлетворяет ограничениям

$$0 \leqslant \varphi(\sigma)/\sigma \leqslant h, \quad h = \mathrm{const} \in (0, \infty), \quad \varphi(0) = 0, \tag{3}$$

$\sigma = l^{\mathrm{T}}x$ в случае уравнений (2) и $\sigma = l^{\mathrm{T}}\tilde{x}$ в случае уравнений (1); l, g — постоянные вектор-столбцы; A, B — постоянные матрицы размера $n \times n$; $w(t)$ — скалярный стандартный винеровский процесс; x_0 — детерминированное начальное условие.

Предполагается, что замкнутая нелинейной обратной связью $g\varphi(\sigma)$ детерминированная динамическая система (2) имеет лишь одно стационарное состояние — положение равновесия (нулевое решение) $x = 0$, а матрицы A и $A + hgl^{\mathrm{T}}$ гурвицевы. Это естественные предположения, которые всегда постулируются в теории абсолютной устойчивости (устойчивости в гурцевом углу $[0, h]$) детерминированных систем, так как являются необходимыми для корректной постановки задач об абсолютной устойчивости. Заметим, что при $gl^{\tau} > O_{n\times n}$ ($O_{n\times n}$ — нулевая матрица размера $n \times n$) из того, что $A + hgl^{\tau}$ гурвицева, следует, что матрица A не просто устойчива (гурвицева), а обладает некоторым запасом устойчивости, т. е. экспоненциально устойчива.

Ставится задача: если состояние равновесия $x = 0$ детерминированной системы автоматического регулирования (2) абсолютно устойчиво в гурвицевом углу $[0, h]$, то как влияют случайные возмущения $Bdw(t)$ матрицы Adt ее линейной части на устойчивость, при каких интенсивностях случайных возмущений (т. е. при какой матрице B) состояние равновесия $\tilde{x} = 0$ системы (1) будет абсолютно устойчиво с вероятностью 1 и возможно ли построить алгебраические коэффициентные критерии такой устойчивости?

Под *абсолютной устойчивостью с вероятностью* 1 состояния равновесия систем автоматического регулирования (1) понимается асимптотическая устойчивость по Ляпунову с вероятностью 1 при любых начальных состояниях x_0 ($\| x_0 \| < \infty$) и любых нелинейных функциях $\varphi(\sigma)$, принадлежащих гурвицевому углу (сектору) $[0, h]$. Определение асимптотической устойчивости с вероятностью 1 содержится в [3].

Теория абсолютной (по нелинейности в гурвицевом углу $[0, h]$) устойчивости детерминированных ($B = O_{n\times n}$) систем Лурье—Постникова и достигнутые на сегодня результаты по разработке критериев устойчивости (в том числе и с помощью функций Ляпунова) представлены в исследованиях многих авторов (см., например, [4—7] и имеющуюся там библиографию). Известные алгебраические условия абсолютной устойчивости детерминированных систем носят, как правило, частотный вид (представлены через передаточную матрицу-функцию частотного параметра, соответствующую линейной части замкнутой системы уравнений), хотя имеются и условия, выраженные через коэффициенты системы в терминах матричных уравнений Ляпунова и некоторых алгебраических неравенств (см., например, [6]).

Обзор исследований по разработке достаточных условий и критериев устойчивости стохастических систем автоматического регулирования (1) содержится в статье [8]. В представленных в этом обзоре работах получены алгебраические частотные условия абсолютной устойчивости в среднем квадратичном, сформулированные в терминах частотных характеристик линейной части динамической системы.

Ниже нами получены эффективные (т. е. просто проверяемые) необходимые и достаточные алгебраические коэффициентные условия абсолютной (по нелинейности в гурвицевом углу $[0, h]$) устойчивости с вероятностью 1 нулевого решения $\tilde{x} = 0$ динамической системы (1).

При этом используется стохастическая функция Ляпунова (СФЛ), строящаяся в виде линейной комбинации «квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности». Условия абсолютной устойчивости с вероятностью 1 выражены в терминах матричных алгебраических уравнений Сильвестра, конструируемых непосредственно по уравнениям движения (1), и некоторых матричных неравенств и согласуются с известными условиями абсолютной устойчивости детерминированной системы (2) в случае, когда (1) в нее вырождается.

Так как рассматриваемая стохастическая система автоматического регулирования (1) является квазилинейной и матрицы A и $A + hgl^{\tau}$ гурвицевы, то общая теорема стохастической устойчивости с вероятностью 1 (см., например, [9], теорема 4.3), сформулированная в терминах функций Ляпунова вида «квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности» допускает обращение, как это имеет место для линейных стохастических систем. Поэтому среди СФЛ, строящихся в виде линейной комбинации «квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности». находится и та СФЛ, которая доставляет не только достаточные условия абсолютной устойчивости с вероятностью 1, но и необходимые условия такой устойчивости, т. е. доставляет критерий устойчивости.

2. Основной результат. Итак, рассмотрим систему (1). Для получения критерия абсолютной устойчивости с вероятностью 1 состояния равновесия $\tilde{x} = 0$ применим метод функций Ляпунова. Будем искать СФЛ $V(\tilde{x})$ в виде линейной комбинации квадратичной формы и интеграла от нелинейности

$$V(\tilde{x}) = \tilde{x}^{\mathrm{T}} H \tilde{x} + \varkappa \int_0^{\sigma} \varphi(y)\, dy \tag{4}$$

(положительно определенная матрица H $(H = H^{\mathrm{T}} > O_{n\times n})$ и число $\varkappa$ в которой пока неизвестны) такую, чтобы математическое ожидание ее полной производной по времени на решениях $\tilde{x}$ системы (1) было отрицательной величиной. Если нам удастся найти алгебраические уравнения или неулучшаемые неравенства, из которых можно однозначно определить матрицу $H > O_{n\times n}$ и число $\varkappa \neq 0$, то тем самым будет в явном виде построена функция $V > 0$; следовательно, можно будет вычислить математическое ожидание ее полной производной по времени на решениях системы (1) и в итоге получить надлежащий критерий стохастической устойчивости.

Далее обнаружится, что положительно определенная матрица H должна быть решением соответствующего системе (1) матричного алгебраического уравнения Сильвестра, а число $\varkappa$ в СФЛ (4) обязательно должно быть отрицательным, и оценка $\varkappa$ снизу определяется коэффициентами обратной связи l, g, характеристикой гурвицевого угла h и матрицей H.

Используя формулу Ито стохастического дифференцирования для дифференциала dV СФЛ (4) на решениях системы (1) получаем представление

$$\begin{aligned} dV(\tilde{x})|_{(1)} = {} & \tilde{x}^{\mathrm{T}} (A^{\mathrm{T}} H + HA + B^{\mathrm{T}} HB)\, \tilde{x}\, dt + [\varphi(\sigma)\, g^{\mathrm{T}} H \tilde{x} + \tilde{x} H g \varphi(\sigma)]\, dt + \\ & + \varkappa [\varphi(\sigma)\, l^{\mathrm{T}} A \tilde{x} + \varphi(\sigma)\, l^{\mathrm{T}} g \varphi(\sigma)]\, dt + \frac{1}{2} \varkappa \dot{\varphi}(\sigma)\, (l^{\mathrm{T}} B \tilde{x})^2 dt + \\ & + \{x^{\mathrm{T}} (B^{\mathrm{T}} H + HB)\, x + \varkappa \varphi(\sigma)\, l^{\mathrm{T}} Bx\}\, dw(t). \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь через $\dot{\varphi}$ обозначена производная $d\varphi/d\sigma$.

Для математического ожидания полной производной по времени $\mathbf{M}\{dV/dt\}$ на решениях системы (1) имеем равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\left\{\frac{dV(\tilde{x})}{dt}\bigg|_{\substack{(1)\\ \tilde{x}\equiv x}}\right\} = {} & x^{\mathrm{T}} (A^{\mathrm{T}} H + HA + B^{\mathrm{T}} HB)\, x + \varphi(\sigma)\, (g^{\mathrm{T}} H + \varkappa l^{\mathrm{T}} A)\, x + \\ & + x^{\mathrm{T}} H g \varphi(\sigma) + \varkappa \varphi(\sigma)\, l^{\mathrm{T}} g \varphi(\sigma) + \frac{1}{2} \varkappa \dot{\varphi}(\sigma)\, x^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} l l^{\mathrm{T}} Bx. \end{aligned} \tag{6}$$

Правую часть равенства (6) можно рассматривать как квадратичную форму физической фазовой переменной x и фиктивных, искусственно введенных фазовых переменных φ и $\sqrt{\dot{\varphi}}\,x$. Тогда (6) можно переписать в следующем векторно-матричном виде:

$$\mathbf{M}\left\{\frac{dV(\tilde{x})}{dt}\bigg|_{\substack{(1)\\ \tilde{x}\equiv x}}\right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} x \\ \varphi \\ \sqrt{\dot{\varphi}}\,x \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} H + HA + B^{\mathrm{T}} HB & Hg + \frac{1}{2} \varkappa A^{\mathrm{T}} l & 0_{n\times n} \\ g^{\mathrm{T}} H + \frac{1}{2} \varkappa l^{\mathrm{T}} A & \varkappa l^{\mathrm{T}} g & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times n} & 0_{n\times 1} & \frac{1}{2} \varkappa B^{\mathrm{T}} l l^{\mathrm{T}} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varphi \\ \sqrt{\dot{\varphi}}\,x \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Математическое ожидание (7) отрицательно на решениях $\tilde{x}$ системы (1) тогда и только тогда, когда (симметричная) матрица $A^{\mathrm{T}}H + HA + B^{\mathrm{T}}HB$ отрицательно определена, а блочная (симметричная) матрица, стоящая в правой части (7), неположительно определена,

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}H + HA + B^{\mathrm{T}}HB & Hg + \frac{1}{2}\varkappa A^{\mathrm{T}}l & 0_{n\times n} \\ g^{\mathrm{T}}H + \frac{1}{2}\varkappa l^{\mathrm{T}}A & \varkappa l^{\mathrm{T}}g & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times n} & 0_{n\times 1} & \frac{1}{2}\varkappa B^{\mathrm{T}}ll^{\mathrm{T}}B \end{bmatrix} \leqslant 0_{(2n+1)\times(2n+1)}. \quad (8)$$

Матрица $A^{\mathrm{T}}H + HA + B^{\mathrm{T}}HB$ отрицательно определена тогда и только тогда, когда матрица H является решением матричного уравнения Сильвестра

$$A^{\mathrm{T}}H + HA + B^{\mathrm{T}}HB = -G, \quad (9)$$

где G — какая-либо произвольно выбранная симметричная положительно определенная матрица ($G = G^{\mathrm{T}} > O_{n\times n}$). В качестве G может быть принята единичная матрица E. Так как по предположению матрица A гурвицева, то в силу непрерывной зависимости решение $H > O_{n\times n}$ уравнения Сильвестра (9) для малой по норме матрицы B всегда существует.

Исследуем теперь матрицу (8). Она неположительно определена лишь в случае, когда неположительно определены остальные матрицы-блоки, стоящие на ее главной диагонали. Проанализируем эти матрицы-блоки. Матрица $\frac{1}{2}\varkappa B^{\mathrm{T}}ll^{\mathrm{T}}B$ при $\varkappa \neq 0$ неположительно определена тогда и только тогда, когда число $\varkappa < 0$. Отсюда вытекает оговоренная выше при рассмотрении функции (4) рекомендация, что в ней искомое число $\varkappa$ должно быть отрицательным.

Далее, если $\varkappa < 0$, то число $\varkappa l^{\mathrm{T}}g$ отрицательно тогда, когда коэффициенты обратной связи — векторы l и g — удовлетворяют условию

$$l^{\mathrm{T}}g > 0. \quad (10)$$

Итак, для неположительной определенности блочной матрицы (8) при условиях $\varkappa < 0$, (9) и (10) требуется также неположительная определенность матрицы

$$\begin{bmatrix} -G & Hg + \frac{1}{2}\varkappa A^{\mathrm{T}}l \\ g^{\mathrm{T}}H + \frac{1}{2}\varkappa l^{\mathrm{T}}A & \varkappa l^{\mathrm{T}}g \end{bmatrix} \leqslant 0_{(2n+1)\times(2n+1)}. \quad (11)$$

Требование (10) фактически означает, что матрица $A + hgl^{\mathrm{T}}$ гурвицева, что в свою очередь означает, что A должна быть не просто гурвицевой (устойчивой), а обладать некоторым запасом устойчивости, т. е. быть экспоненциально устойчивой.

Чтобы найти нижнюю границу для искомого отрицательного числа $\varkappa$, возвратимся к функции (4) и рассмотрим ее значение на линейной характеристике гурвицевого угла: $\varphi(\sigma) = h\sigma$. Получим

$$V|_{\varphi(\sigma)=h\sigma} = \tilde{x}^{\mathrm{T}}H\tilde{x} + \varkappa\int_0^{\sigma} hy\,dy = \tilde{x}^{\mathrm{T}}H\tilde{x} + \frac{1}{2}\varkappa hy^2\Big|_{y=0}^{y=l^{\mathrm{T}}\tilde{x}} = \tilde{x}^{\mathrm{T}}\left(H + \frac{1}{2}\varkappa hll^{\mathrm{T}}\right)\tilde{x}. \quad (12)$$

При $\varkappa < 0$ функция (4) положительна (т. е. сохраняет одно из свойств функций Ляпунова), если является положительно определенной матрица $H + \frac{1}{2}\varkappa hll^{\mathrm{T}}$,

$$H + \frac{1}{2}\varkappa hll^{\mathrm{T}} > 0_{n\times n}. \quad (13)$$

Из матричного неравенства (13) следует (после умножения слева на l^{τ} и справа на l) скалярное неравенство

$$l^{\tau}Hl+\frac{1}{2}\varkappa h(l^{\tau}l)^{2}>0, \qquad (14)$$

откуда получаем оценку нижней границы для искомого числа $\varkappa$,

$$-\frac{2l^{\tau}Hl}{h(l^{\tau}l)^{2}}<\varkappa, \qquad (15)$$

где H — решение уравнения Сильвестра (9).

Оценка нижней границы для допустимых значений числа $\varkappa$ (15) не является достаточной для выполнения матричного неравенства (13), а является только необходимой и представляет собой, так сказать, приближенный ориентир при выборе $\varkappa$.

Покажем, что неулучшаемой нижней границей числа $\varkappa$ является величина $-\dfrac{2}{hl^{\tau}H^{-1}l}$, т. е. искомое число $\varkappa$ должо выбираться из интервала

$$-\frac{2}{hl^{\tau}H^{-1}l}<\varkappa<0. \qquad (16)$$

При этом неравенство (15) совпадает с неравенством (16) тогда, когда вектор параметров обратной связи l является собственным вектором матрицы H — решения уравнения Сильвестра.

Итак, положительно определенная матрица H всегда представима в виде $H=PP^{\tau}$, где P —некоторая невырожденная матрица того же размера. Умножая (13) слева и справа соответственно на P^{-1} и $P^{-1\tau}$, приходим к эквивалентному неравенству

$$Q\equiv E+\frac{1}{2}\varkappa hzz^{\tau}>0_{n\times n}, \qquad (17)$$

где E — единичная матрица размера $n\times n$, $z=P^{-1}l$. Если через Z обозначить $n(n-1)$-матрицу, столбцы которой ортогональны вектору z и в совокупности с ним составляют квадратную невырожденную матрицу $W=[z,\ Z]$, то неравенство (17) эквивалентно скалярному неравенству $1+\dfrac{1}{2}\varkappa hz^{\tau}z>0$, которое, как нетрудно видеть, совпадает с (16).

Тот факт, что неравенство (16) сильнее, чем неравенство (15), т. е.

$$-\frac{l^{\tau}Hl}{(l^{\tau}l)^{2}}\leqslant-\frac{1}{l^{\tau}H^{-1}l}, \qquad (18)$$

причем знак равенства в (18) достигается, если l — собственный вектор матрицы H, может быть доказан, если рассмотреть для матриц H и H^{-1} выражения $(l^{\tau}Hl)/(l^{\tau}l)$, $(l^{\tau}H^{-1}l)/(l^{\tau}l)$, предварительно введя какой-либо базис $(e_1,\ldots,e_n)$ и использовав разложение вектора l в этом базисе.

В результате изложенного выше анализа матрицы (8) можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема (критерий абсолютной устойчивости). *Положение равновесия (состояние $\tilde{x}=0$) динамической системы* (1) *абсолютно устойчиво с вероятностью* 1 *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*:

1) *матрицы* A *и* $A+hg\,l^{\tau}$ *гурвицевы*, $0<l^{\tau}g$;

2) *существует положительно определенное решение* $H\,(H=H^{\tau}>0_{n\times n})$ *матричного уравнения Сильвестра* (9);

3) *имеет место матричное неравенство* (11), *в котором произвольное отрицательное число* $\varkappa$ *из интервала* (16) *выбирается как можно ближе к своей нижней границе* $\left(\varkappa\downarrow-\dfrac{2}{hl^{\tau}H^{-1}l}\right)$.

Разумеется, чем ближе число $\varkappa$ к числу $-\frac{2}{hl^{\mathrm{T}}H^{-1}l}$, тем больше расширяется в пространстве коэффициентов динамической системы область достаточных условий абсолютной устойчивости, доставляемых СФЛ (4), приближаясь к области необходимых и достаточных условий при $\varkappa \downarrow -\frac{2}{hl^{\mathrm{T}}H^{-1}l}$.

В теореме условия 1 означают асимптотическую устойчивость по Ляпунову замкнутой детерминированной системы на линейных граничных характеристиках угла $[0, h]$, условие 2 — асимптотическую устойчивость по Ляпунову с вероятностью 1 замкнутой стохастической системы на этих же характеристиках.

При отсутствии случайных возмущений ($B = O_{n \times n}$) из теоремы 1 следует критерий абсолютной устойчивости для детерминированной системы автоматического регулирования, который ранее не был известен.

3. **Обобщение на системы с векторным винеровским процессом.** Рассмотрим детерминированную систему (2) и возникающую из нее путем возмущения матрицы Adt случайными матричными добавками с векторным r-мерным стандартным винеровским процессом $w(t) = \{w_1(t), \ldots, w_r(t)\}$ следующую стохастическую систему:

$$d\tilde{x}(t) = [A\tilde{x}(t) + g\varphi(\sigma)]\,dt + \sum_{i=1}^{r} B_i\tilde{x}(t)\,dw_i(t). \qquad (19)$$

В данном случае теорема справедлива и для (19), если в ней условие существования положительно определенного решения матричного уравнения Сильвестра (9) заменить условием существования положительно определенного решения такого $(r+2)$-членного уравнения Сильвестра

$$A^{\mathrm{T}}H + HA + \sum_{i=1}^{r} B_i^{\mathrm{T}}HB_i = -G.$$

В заключение отметим, что вопросы существования решений уравнений Сильвестра и библиография работ, относящихся к этому направлению, изложены в [10].

1. *Кореневский Д. Г.* Необходимые и достаточные (и близкие к ним) коэффициентные условия асимптотической устойчивости и ограниченности с вероятностью единица линейных параметрических стохастических систем Ито // Мат. физика и нелинейн. механика.— 1986.— Вып. 6.— С. 20—27.
2. *Кореневский Д. Г.* Коэффициентные критерий и достаточные условия асимптотической устойчивости с вероятностью единица линейных систем стохастических дифференциальных уравнений Ито // Докл. АН СССР.— 1986.— **290**, № 5.— С. 1041—1044.
3. *Кореневский Д. Г., Митропольский Ю. А.* К алгебраическим критериям асимптотической устойчивости с вероятностью единица решений систем линейных стохастических дифференциальных и разностных уравнений Ито, не приведенных к форме Коши // Численно-аналит. методы исслед. динамики и устойчивости многомерных систем.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1985.— С. 152—170.
4. *Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р.* Абсолютная устойчивость регулируемых систем.— М. : Изд-во АН СССР, 1963.— 140 с.
5. *Либерзон М. Р.* Новые результаты по абсолютной устойчивости нестационарных систем (обзор) // Автоматика и телемеханика.— 1979.— № 8.— С. 29—48.
6. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения.— М. : Физматгиз, 1959.— 211 с.
7. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения.— 2-е изд., испр. и доп.— М. : Наука, 1966.— 530 с.
8. *Пакшин П. В.* Устойчивость линейных и специальных нелинейных стохастических систем с параметрическими шумами // Динамика неоднородных систем: Материалы семинара.— М. : ВНИИ систем. исслед., 1983.— С. 26—40.
9. *Гихман И. И.* Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений // Предельные теоремы и статист. выводы.— Ташкент: Фан, 1966.— С. 14—45.
10. *Кореневский Д. Г., Мазко А. Г.* Положительно определенные решения матричных уравнений Сильвестра — Ляпунова.— Киев, 1986.— 52 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.41).

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 09.07.87