УДК 517.5

В. Ф. Сторчай

Точные оценки норм в L_p на некоторых классах сопряженных функций

Пусть $W^r H_\omega$ ($r = 0, 1, \ldots$; $W^0 H_\omega = H_\omega$) — класс 2π-периодических r раз дифференцируемых функций $f(x)$, у которых модуль непрерывности r-й производной $\omega(f^r; t)$ ($f^0 = f$) не превосходит заданного модуля непрерывности $\omega(t)$.

Через $\tilde{W}^r H_\omega$ будем обозначать класс функций, тригонометрически сопряженных функциям из $W^r H_\omega$ (см. [1, с. 518]).

В наших рассуждениях существенную роль будут играть функции

$$\Omega_r(t) = \Omega_r(\omega, t) = \sup_{f \in W^r H_\omega} \max_x |f(x+t) - f(x)|,$$

$$\tilde{\Omega}_r(t) = \tilde{\Omega}(\omega, t) = \sup_{\tilde{f} \in \tilde{W}^r H_\omega} \max_x |\tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x)|.$$

Точные значения $\Omega_r(t)$ для выпуклого $\omega(t)$ и при каждом $r = 0, 1, \ldots$ найдены в [2], $\tilde{\Omega}_r(t)$ $(r = 1, 2, \ldots)$ — в [3], а случай $r = 0$ рассмотрен в [4]. В частности, в работах [2, 3] соответственно установлено, что на промежутке $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

$$\Omega_{2\nu}(t) = 2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_{2i+1}}{(2i+1)^{2\nu}} \sin(2i+1)\frac{t}{2}, \quad \nu = 0, 1, \ldots,$$

$$\tilde{\Omega}_{2\nu+1}(t) = 2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_{2i+1}}{(2i+1)^{2\nu+1}} \sin(2i+1)\frac{t}{2}, \qquad \nu = 0, 1, \ldots,$$

где

$$b_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \omega(2t) \sin mt \, dt. \tag{1}$$

Заметим, что функция $\tilde{\Omega}_r(t)$ обладает следующими свойствами:

1) $\tilde{\Omega}_r(t)$ монотонно возрастает на $(0, \pi)$:

2) $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 2\pi} \tilde{\Omega}_r(t) = \tilde{\Omega}_r(\pi)$;

3) $\tilde{\Omega}_r(\pi + t) = \tilde{\Omega}_r(\pi - t)$.

В работе [5] для выпуклого $\omega(t)$ установлено, что для любой $f \in W^r H_\omega$, 1, 2, ..., удовлетворяющей условию $\int_a f(x)\,dx = 0$, $b - a \leqslant 2\pi$,

$$\int_a^b |f(x)|^p \, dx \leqslant 2^{-p} \int_0^{b-a} \Omega_r^p(t)\, dt, \qquad 0 < p \leqslant 3. \tag{2}$$

Эта оценка на классе $W^r H_\omega$ для $r = 2\nu$ является точной. В случаях $r = 0, 1, \ldots$; $p = 1$ и $r = 0$, $0 < p \leqslant 3$ точные оценки ранее были получены в работах Н. П. Корнейчука [6, 7], а при $p = 2, 3$; $r = 2\nu$ — в работах автора [8, 9].

Здесь приводим решение аналогичной задачи для классов функций $\tilde{W}^r H_\omega$.

Используя метод Корнейчука [6] и работы [7, 5], доказываем теорему.

Теорема 1. *Если $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности, $b - a \leqslant 2\pi$, то для любой $\tilde{f} \in \tilde{W}^r H_\omega$, $r = 1, 2, \ldots$, такой, что* $\int_a^b \tilde{f}(x)\,dx = 0$,

$$\int^b \tilde{f}(x)|^p \; x \leqslant 2^{-p} \int_0^{b-a} \tilde{\Omega}_r^p(t)\, dt, \qquad 0 < p \leqslant 3. \tag{3}$$

Оценка на классе $\tilde{W}^{2\nu+1} H_\omega$ точная.

В случае $p = 1$, $r = 1, 2, \ldots$; $a = 0$, $b = 2\pi$ точная оценка приведена в [4]. Доказательство теоремы будет основываться на следующих леммах.

Лемма 1. *Пусть функция* $\tilde{f}(x) \in \tilde{W}^r H_\omega$, $r = 1, 2, \ldots$, на множестве $E = (a, b) \cup (c, d)$ $(a < b \leqslant c < d,\ d - a \leqslant 2\pi)$ *удовлетворяет такому условию: функция* $F_1(x) = \int\limits_a^x \tilde{f}(t)\,dt$ *строго возрастает (убывает) на* (a, b), *а функция* $F_2(x) = \int\limits_c^x \tilde{f}(t)\,dt$ *строго убывает (возрастает) на* (c, d), *причем* $F_1(b) = -F_2(d)$. *Тогда*

$$\int\limits_E |\tilde{f}(t)|^p\,dt \leqslant 2^{-p} \int\limits_{c-b}^{d-a} \tilde{\Omega}_r^p(t)\,dt, \qquad 0 < p \leqslant 3.$$

Доказательство. Для строго убывающей и абсолютно непрерывной на $[a, b]$ функции $\rho(x)$ (см. [10, с. 91]), которая определяется с помощью равенства $F_1(x) = F_2(\rho(x)) + F_1(b)$, $a \leqslant x \leqslant b$; $c \leqslant \rho(x) \leqslant d$, почти всюду $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(\rho(x))\,\rho'(x)$. Так как

$$\int\limits_E |\tilde{f}(t)|^p\,dt = \int\limits_a^b |\tilde{f}(t)|^p\,dt + \int\limits_c^d |\tilde{f}(t)|^p\,dt,$$

то, заменяя переменную $t = \rho(u)$ во втором интеграле и учитывая, что $\rho'(t) < 0$, получаем

$$\int\limits_E |\tilde{f}(t)|^p\,dt = \int\limits_a^b |\tilde{f}(t)|^p\,dt - \int\limits_a^b |\tilde{f}(\rho(t))|^p\,\rho'(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_a^b |\tilde{f}(\rho(t))|^p\,[|\rho'(t)|^p + |\rho'(t)|]\,dt.$$

Н. П. Корнейчуком (см. [7, с. 225]) доказано, что при всех $\beta > 0$, $0 < p \leqslant 3$ справедливо неравенство $2^p(\beta^p + \beta) \leqslant (1 + \beta)^{p+1}$, которое в случае $p > 3$ уже не имеет места для всех $\beta > 0$. В силу этого неравенства почти всюду на (a, b)

$$|\rho'(t)|^p + |\rho'(t)| \leqslant 2^{-p}(1 + |\rho'(t)|)^{p+1}, \qquad 0 < p \leqslant 3,$$

а

$$|\tilde{f}(\rho(t))|^p\,(1 + |\rho'(t)|)^{p+1} = |\tilde{f}(\rho(t))|^p\,|1 - \rho'(t)|^{p+1} =$$

$$= |\tilde{f}(\rho(t))(1 - \rho'(t))|^p\,(1 - \rho'(t)) = |\tilde{f}(\rho(t)) - \tilde{f}(t)|^p\,(1 - \rho'(t)),$$

поэтому

$$\int\limits_E |\tilde{f}(t)|^p\,dt \leqslant 2^{-p} \int\limits_a^b |\tilde{f}(\rho(t)) - \tilde{f}(t)|^p\,(1 - \rho'(t))\,dt \leqslant 2^{-p} \int\limits_{c-b}^{d-a} \tilde{\Omega}_r^p(t)\,dt.$$

Лемма 2. *Пусть функция* $g(x)$ *на множестве* $E \subset (a, b)$ $(b - a \leqslant 2\pi)$, *состоящем из конечного числа интервалов, не обращается в нуль и совпадает с* $\tilde{f}(x) \in \tilde{W}^r H_\omega$, $r = 1, 2, \ldots$, *и* $g(x) = 0$ *в остальных точках интервала* (a, b) *а функция* $F(x) = \int\limits_a^x g(t)\,dt$ *знакопостоянна на* (a, b) *и* $F(b) = 0$. *Тогда*

$$\int\limits_a^b |g(t)|^p\,dt \leqslant 2^{-p} \int\limits_0^{b-a} \tilde{\Omega}_r^p(t)\,dt, \qquad 0 < p \leqslant 3.$$

Лемма 2 доказывается с помощью леммы 1 аналогично тому, как это делалось в [8] при доказательстве леммы 3.

Доказательство теоремы. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $\tilde{f}(x) \not\equiv 0$, то в силу леммы 2 из [8], каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно указать такое множество $E(\varepsilon) \subset (a, b)$, состоящее из конечного числа интервалов, что

$$1) \qquad \tilde{f}(x) > 0, \quad x \in E;$$

$$2) \qquad \int_E \tilde{f}(x)\,dx = 0; \tag{4}$$

$$3) \qquad \int_{Q=(a,b)\setminus E} |\tilde{f}(x)|^p\,dx < \varepsilon, \qquad 0 < p < \infty.$$

Зафиксируем E и определим $g(x)$:

$$g(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x), & x \in E, \\ 0, & x \in Q. \end{cases} \tag{5}$$

Положим $F(x) = \int\limits_a^x g(t)\,dt$. Тогда из соотношений (4) и (5) следует, что $F(b) = 0$, а множество точек $x \in (a, b)$, в которых $F(x) \neq 0$ состоит из интервалов (a_k, b_k) $(k = 1, 2, \ldots, n)$, удовлетворяющих условиям $F(a_k) = F(b_k) = 0$, $|F(x)| > 0$, $a_k < x < b_k$. Применяя к каждому из этих интервалов лемму 2, получаем

$$\int_a^b |g(x)|^p\,dx = \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} |g(x)|^p\,dx \leqslant 2^{-p} \sum_{k=1}^n \int_0^{b_k - a_k} \tilde{\Omega}_r^p(t)\,dt.$$

Тогда

$$\int_a^b |\tilde{f}(x)|^p\,dx = \int_a^b |g(x)|^p\,dx + \int_Q |\tilde{f}(x)|^p dx < 2^{-p} \int_0^{b-a} \tilde{\Omega}_r^p(t)\,dt + \varepsilon.$$

Так как ε — сколь угодно малое, то неравенство (3) справедливо.

Покажем теперь, что для любого $r = 2\nu + 1$, $\nu = 0, 1, \ldots$ существует в классе $\tilde{W}^{2\nu+1}H_\omega$ функция, удовлетворяющая условиям теоремы, для которой в соотношении (3) имеет место знак равенства.

Обозначим через $f_{2\nu+1}(x)$ функцию из класса $W^{2\nu+1}H_\omega$, у которой производная порядка $2\nu + 1$ нечетна, причем

$$f_{2\nu+1}^{(2\nu+1)}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\,\omega(2x), & 0 \leqslant x \leqslant \pi/2, \\ \dfrac{1}{2}\,\omega(2\pi - 2x), & \pi/2 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Легко проверить, что

$$f_{2\nu+1}(x) = (-1)^{\nu+1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_{2i+1}}{(2i+1)^{2\nu+1}} \cos(2i+1)\,x,$$

где b_{2i+1} (коэффициенты Фурье функции $f_{2\nu+1}^{(2\nu+1)}(x)$) определены равенствами (1). Тогда тригонометрически сопряженной с функцией $f_{2\nu+1}(x)$ будет функция

$$\tilde{f}_{2\nu+1}(x) = (-1)^{\nu+1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_{2i+1}}{(2i+1)^{2\nu+1}} \sin(2i +$$

Пусть фиксирован отрезок $[a, b]$, $b - a \leqslant 2\pi$. Функция $\varphi_0(x) = \tilde{f}_{2\nu+1}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$ принадлежит классу $\tilde{W}^{2\nu+1}H_\omega$ и

$$\int_a^b \varphi_0(x)\,dx = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \tilde{f}_{2\nu+1}(x)\,dx = 0.$$

Кроме того,

$$\int_a^b |\varphi_0(x)|^p\,dx = 2\int_0^{\frac{b-a}{2}} |\tilde{f}_{2\nu+1}(x)|^p\,dx = 2^{-p}\int_0^{b-a} \tilde{\Omega}_{2\nu+1}^p(t)\,dt.$$

Если в теореме 1 положить $a = 0$, $b = 2\pi$, то придем к следующему утверждению.

Теорема 2. *Каков бы ни был выпуклый вверх модуль непрерывности* $\omega(t)$, *имеет место равенство*

$$\sup_{\tilde{f}\in\tilde{W}^{2\nu+1}H_\omega} \int_0^{2\pi} |\tilde{f}(x)|^p\,dx = 2^{-p}\int_0^{2\pi} \tilde{\Omega}_{2\nu+1}^p(t)\,dt,\ 0 < p \leqslant 3;\ \nu = 0, 1, \ldots$$

Следствие 1. *Для любого выпуклого вверх модуля непрерывности* $\omega(t)$ *имеет место равенство*

$$\sup_{\tilde{f}\in\tilde{W}^{2\nu+1}H_\omega} \|\tilde{f}\|_{L_2}^2 = \sup_{\tilde{f}\in\tilde{W}^{2\nu+1}H_\omega} \int_0^{2\pi} \tilde{f}^2(x)\,dx = \pi\sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_{2i+1}^2}{(2i+1)^{4\nu+2}} = \|\tilde{f}_{2\nu+1}\|_{L_2}^2,$$
$$\nu = 0, 1, \ldots$$

Пусть W^rK, $r = 1, 2, \ldots$, — класс 2π-периодических функций $f(x)$, у которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна и $|f^{(r)}(x)| \leqslant K$, а $\tilde{W}^rK$ — класс функций, тригонометрически сопряженный к функциям из класса W^rK.

Следствие 2. *Если* $\tilde{f}(x) \in \tilde{W}^{2\nu}K$, $\nu = 1, 2, \ldots$, *то имеют* место со*отношения*

$$\sup_{\tilde{f}\in\tilde{W}^{2\nu}K} \|\tilde{f}\|_{L_2}^2 = \frac{16K^2}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^{4\nu+2}}.$$

Справедливость этого утверждения вытекает из совпадения классов $\tilde{W}^rK$ и $\tilde{W}^{r-1}H_\omega$ при $\omega(t) = Kt$.

1. *Бари Н. К.* Тигонометрические ряды.— М. : Физматгиз, 1961.— 936 с.
2. *Корнійчук М. П.* Про екстремальні властивості періодичних функцій // Докл. АН УССР. УССР.— 1962.— № 8.— С. 993—998.
3. *Моторный В. П.* Об одном неравенстве для модулей гладкости периодических функций // Первая республиканская математическая конференция молодых исследователей.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1965.— С. 519—525.
4. *Бабенко В. Ф.* Точные оценки для норм функций из сопряженных классов в метрике C и L // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям.— Днепропетровск: Изд-во Днепропетр. ун-та, 1973.— С. 3—5.
5. *Сторчай В. Ф.* Об одной экстремальной задаче для дифференцируемых функций // Там же.— 1982.— С. 53—60.
6. *Корнейчук Н. П.* Точные оценки для норм дифференцируемых периодических функций в метрике L // Мат. заметки.— 1967.— **2**, № 6.— С. 569—576.
7. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения.— М. : Наука, 1984.— 352 с.
8. *Сторчай В. Ф.* Точные оценки для норм дифференцируемых периодических функций в метрике L_2 // Укр. мат. журн.— 1973.— **25**, № 6 — С. 835—840.
9. *Сторчай В. Ф.* О точных оценках норм дифференцируемых функций // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям.— Днепропетровск: Изд-во Днепропетр. ун-та, 1976.— С. 50—54.
10. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения.— М. : Наука, 1976.— 320 с.

Днепропетр. ун-т

Получено 30.03.87,
после доработки — 05.08.87