УДК 517.9

Ю. И. Петунин, В. И. Савкин

Сходимость, порожденная аналитическими функционалами, и изоморфизм алгебр аналитических функций

Напомним некоторые определения теории аналитических функций в пространстве $\mathbb{C}^n$.

Пусть K — компактное подмножество в $\mathbb{C}^n$. Через $P(K)$ будем обозначать равномерное замыкание на K алгебры полиномов от $z_1, \dots, z_n$. Пусть K — ограниченное множество в $\mathbb{C}^n$. Полиномиально выпуклая оболочка $\hat{K}$ множества K состоит из всех $z \in \mathbb{C}^n$, для которых $|P(z)| \leqslant \sup\limits_{w \in K} |P(w)|$ при любом полиноме P. Ограниченное множество K в $\mathbb{C}^n$ полиномиально выпукло, если $\hat{K} = K$. Подмножество K в $\mathbb{C}^n$ называется закругленным, если для любой точки $(z_1, \dots, z_n) \in K$ и любых комплексных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ с единичным модулем имеем $(\lambda_1 z_1, \dots, \lambda_n z_n) \in K$ [1, с. 101].

Пусть K — компактное множество в $\mathbb{C}^n$. Обозначим через $A(K)$ банахово пространство функций, непрерывных на K и аналитических внутри K с равномерной нормой. Положим $B^k = \left\{z \in \mathbb{C}^n : \sum\limits_{i=1}^{k} |z_i|^2 \leqslant 1\right\}$, $D^k = \{z \in \mathbb{C}^n : : |z_i| \leqslant 1, i = 1, \dots, k\}$. Предположим, что K_1, K_2 — компактные подмножества в $\mathbb{C}^n$, причем внутренность множества K_1 $\operatorname{int} K_1 \neq \varnothing$ и $\varphi : K_1 \to K_2$ — гомеоморфизм K_1 на K_2. В силу теоремы Брауэра об инвариантной области [2, с. 132] $\operatorname{int} K_2 \neq \varnothing$ и $\varphi(\operatorname{int} K_1) = \operatorname{int} K_2$. Компактные множества K_1 и K_2 с непустой внутренностью будем называть биголоморфно эквивалентными, если существует гомеоморфизм $\varphi : K_1 \to K_2$ множества K_1 на K_2 такой, что сужение φ на $\operatorname{int} K_1$ является биголоморфным отображением множества $\operatorname{int} K_1$ на $\operatorname{int} K_2$.

Т е о р е м а 1. *Пусть K_1, K_2 — компактные полиномиально выпуклые закругленные множества в $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющие условию: замыкания $\overline{\operatorname{int} K_1} = K_1$, $\overline{\operatorname{int} K_2} = K_2$. Алгебры функций $A(K_1)$ и $A(K_2)$ алгебраически изоморфны тогда и только тогда, когда множества K_1 и K_2 биголоморфно эквивалентны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Д о с т а т о ч н о с т ь. Если h — биголоморфное отображение множества K_1 на K_2, то формула $Hg = g \circ h$, $g \in A(K_2)$, очевидно, определяет алгебраический изоморфизм алгебры $A(K_2)$ на $A(K_1)$.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $H : A(K_2) \to A(K_1)$ — алгебраический изоморфизм алгебры $A(K_2)$ на $A(K_1)$. Так как $A(K_i)$, $i = 1, 2$, является коммутативной полупростой банаховой алгеброй, то H будет топологическим изоморфизмом $A(K_2)$ на $A(K_1)$ [3, с. 34], Отсюда в силу предложения 6. § 4, гл. IV из работы [4, с. 254] сопряженный оператор H^* будет $*$-слабым гомеоморфизмом пространства $A(K_1)^*$ на $A(K_2)^*$, причем, как легко видеть, $H^*(\mu_1) = \mu_2$, где μ_i, $i = 1, 2$,— множество мультипликативных функционалов, заданных на алгебре $A(K_i)$. Поскольку по условию теоремы K_i— компактные полиномиально выпуклые закругленные подмножества в $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющие условию $\overline{\operatorname{int} K_1} = K_1$, $\overline{\operatorname{int} K_2} = K_2$, то по теореме 3.5 из работы [1, с 107] $P(K_i) = A(K_i)$, $i = 1,2$. Так как пространство максимальных идеалов алгебры $P(K)$ совпадает с полиномиально выпуклой оболочкой $\hat{K}$ компакта K (теорема 1.2 из [1, с. 95]), то отображение g_1 (g_2), действующее из K_1 (K_2) в сопряженное пространство $A(K_1)^*$ $(A(K_2)^*)$ по формуле $F_z = g_1(z)$, где $F_z(f) = f(z)$ $\forall f \in A(K_1)$, $z \in K_1$ $(G_w = g_2(w)$, где $G_w(g) = g(w)$ $\forall g \in A(K_2)$, $w \in K_2)$ осуществляет гомеоморфизм компакта $K_1(K_2)$ на $\mu_1(\mu_2)$. Отсюда следует, что отображение $h = g_2^{-1} H^* g_1$ является гомеоморфизмом K_1 на K_2 и $Hg(z) = gh(z)$ $\forall g \in A(K_2)$, $z \in K_1$, т. е. $gh \in A(K_1)$. Поскольку сужение на K_2 любого линейного функционала φ, заданного на $\mathbb{C}^n$, принадлежит алгебре $A(K_2)$, то для всякого такого φ функция $\varphi \circ h$ является аналитической на $\operatorname{int} K_2$. Следовательно, h — гомеоморфное отображение множества $\operatorname{int} K_1$ на $\operatorname{int} K_2$. Так как взаимно однозначное гомеоморфное отображение $F : \Omega \to \mathbb{C}^n$, где Ω — область в пространстве $\mathbb{C}^n$ является биголоморфным отображением Ω на $F(\Omega)$ (см. теорему 15. 1. 8 из работы [5, с. 314]), то h — биголоморфное отображение множества K_1 на K_2. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Все банаховы алгебры $A(D^k)$, $A(B^n)$, $k \geqslant 1$, $n \geqslant 2$, попарно не изоморфны.*

Доказательство. Действительно, если алгебра $A(D^k)$ изоморфна $A(B^k)$, $k > 1$, то по теореме 1 множество $\operatorname{int} D^k$ биголоморфно эквивалентно множеству $\operatorname{int} B^k$, что противоречит следствию из теоремы 2.2.4 из работы [5, с. 35]. Рассмотрим теперь второй случай: пусть $A(D^k)$ изоморфно алгебре $A(D^l)$ и $l \neq k$; тогда, как и в теореме 1, построим гомеоморфизм $h: D^k \to D^l$, что противоречит теореме Брауэра об инвариантной области. Исследование других возможных случаев проводится аналогично второму; оказывается что они также не могут иметь места. Следствие доказано.

Пусть X, Y — комплексные банаховы пространства и D — область из X. Отображение $f: D \to Y$, определенное на D со значениями в Y, называется аналитическим в D, если оно однозначно, локально ограничено и дифференцируемо по Гато в D [6, с. 126].

Лемма. *Пусть X — комплексное банахово пространство, X^* — его сопряженное пространство и $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — $*$-слабо сходящаяся к нулю последовательность из X^*. Тогда отображение $F: X \to \mathbb{C}$, определенное по формуле $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(x)]^n$, является аналитическим функционалом из X в $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Действительно, так как по условию $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ $\forall x \in X$, то $|F(x)| < \infty$ $\forall x \in X$. Отсюда в силу теоремы 26.6.4 из работы [6, с. 783], F будет аналитической функцией из X в $\mathbb{C}$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть X — комплексное банахово WCG-пространство и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность элементов из X, слабо сходящаяся к нулю и удовлетворяющая условию $\inf_n \|x_n\| > 0$. Тогда существуют две подпоследовательности $\{y_k^{(i)}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $i = 1, 2$, и аналитическая функция $F: X \to \mathbb{C}$ такие, что $F(y_k^{(1)}) = 1$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $F(y_k^{(2)}) = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ и $F(0) = 0$.*

Доказательство. Как известно [7, с. 5], всякая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов банахова пространства, слабо сходящаяся к нулю и удовлетворяющая условию $\inf_n \|x_n\| > 0$, содержит базисную подпоследовательность $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$. Обозначим через Y замкнутое подпространство в X, натянутое на $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$. Всякий элемент $y \in Y$ имеет представление $y = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m(y) z_m$, где $\{\alpha_m\}_{m=1}^{\infty}$ — последовательность непрерывных линейных функционалов на Y, биортогональных к $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$. Так как для всякого $y \in Y$ ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m(y) z_m$ сходится, то $\|\alpha_m(y) z_m\| \to 0$ при $m \to \infty$, а поскольку $\inf_m \|z_m\| > 0$, то $\alpha_m(y) \to 0$ при $m \to \infty$. Таким образом, последовательность $\{\alpha_m\}_{m=1}^{\infty} \subset Y^*$ $*$-слабо сходится к нулю, поэтому по теореме Банаха—Штейнгауза $\sup_m \|\alpha_m\| < \infty$. В силу теоремы Хана—Банаха о расширении линейного функционала каждый из функционалов α_m можно продолжить с сохранением нормы на все пространство X. Пусть $\bar{\alpha}_m$ — указанное продолжение функционала α_m. Имеем $\sup_m \|\bar{\alpha}_m\| = \sup_m \|\alpha_m\| < \infty$, т. е. все функционалы $\bar{\alpha}_m$ лежат в некотором замкнутом шаре пространства X^*. На основании следствия 3 теоремы 2 из работы [8, с. 114] замкнутый шар пространства X^* является секвенциально $*$-слабо компактным множеством. Поэтому из последовательности $\{\bar{\alpha}_m\}_{m=1}^{\infty}$ можно выделить подпоследовательность $\{\bar{\alpha}_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $*$-слабо сходящуюся к некоторому элементу α из X^*. Заметим, что $\alpha(y) = 0$ $\forall y \in Y$ и рассмотрим последовательность $\{\overline{\alpha}_{m_k} - \alpha\}_{k=1}^{\infty}$ функционалов на X. Очевидно, эта последовательность $*$-слабо сходится к нулю. В силу леммы отображение $F: X \to \mathbb{C}$, определяемое по формуле $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [(\overline{\alpha}_{m_{2k-1}} - \alpha)(x)]^{2k-1}$, является аналитическим и, как легко видеть, $F(z_{m_{2k-1}}) = 1 \ \forall k \in \mathbb{N}$, $F(z_{m_{2k}}) = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$ и $F(0) = 0$. Теорема доказана.

Определение. *Пусть X — комплексное банахово пространство и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность элементов из X. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ A-сходится к элементу $x \in X$, если для всякой аналитической функции $F: X \to \mathbb{C}$, заданной на X со значениями в $\mathbb{C}$, выполняется условие $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x)$.*

Теорема 3. *Пусть X — комплексное банахово WCG-пространство и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность элементов из X. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к элементу x из X по норме тогда и только тогда, когда $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ A-сходится к x.*

Доказательство. Необходимость очевидна, поскольку сходимость по норме влечет A-сходимость.

Достаточность. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ A-сходится к элементу x из X, т. е. для всякой аналитической функции $F: X \to \mathbb{C}$ выполняется условие $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x)$. Тогда последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $z_n = x_n - x$, A-сходится к нулю. Действительно, поскольку отображение $U: X \to X$, определенное с помощью формулы $U(y) = y - x \ \ \forall y \in X$, является биголоморфным, то для всякой аналитической функции $F: X \to \mathbb{C}$, заданной на X со значениями в $\mathbb{C}$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} F(z_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n - x) = \lim_{n\to\infty} FU(x_n) = FU(x) = F(0).$$

Итак, последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ A-сходится к нулю. Отсюда вытекает, что последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ слабо сходится к нулю. Покажем, что $\|z_n\| = \|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$. Предположим противное: пусть существует число $\varepsilon > 0$ такое, что вне открытого шара $S(\theta, \varepsilon)$ с центром в нуле радиуса ε содержится подпоследовательность $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. Мы получаем последовательность $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$, слабо сходящуюся к нулю и удовлетворяющую условию $\inf_k \|y_k\| \geqslant \varepsilon > 0$. По теореме 2 существует подпоследовательность $\{y_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$ последовательности $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ и аналитическая функция $F: X \to \mathbb{C}$ такие, что $F(y_{k_m}) = 1 \ \forall m \in \mathbb{N}$ и $F(0) = 0$, что противоречит A-сходимости к нулю последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. Полученное противоречие показывает, что $\|z_n\| \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к x по норме пространства X. Теорема доказана.

Замечание 1. Г. М. Хенкин [9] доказал, что при $n \geqslant 1$, $k \geqslant 2$ $A(D^k)$ и $A(B^n)$ не изоморфны как банаховы пространства. В силу следствия из теоремы 1 $A(D^k)$ и $A(D^i)$, $k \neq i$, не изоморфны как банаховы алгебры; аналогичное утверждение справедливо и для банаховых алгебр $A(B^k)$ и $A(B^i)$. Проблема изоморфизма $A(D^k)$ и $A(D^i)$, а также $A(B^k)$ и $A(B^i)$ по структурам банаховых пространств остается открытой.

Замечание 2. Понятие A-сходимости в банаховых пространствах, по-видимому, ранее не рассматривалось.

Замечание 3. Анализ доказательства теоремы 3 показывает, что она справедлива для более широкого класса пространств, чем WCG. А именно, если пространство X удовлетворяет условию: для любого сепарабельного замкнутого линейного многообразия Y из X существует дополняемое в X сепарабельное замкнутое подпространство Z, содержащее Y, то в пространстве X A-сходимость совпадает со сходимостью по норме.

З а м е ч а н и е 4. Проблема существования комплексного банахова пространства, в котором A-сходимость и сходимость по норме не совпадают, является открытой.

1. *Гамелин Г.* Равномерные алгебры.— М. : Мир, 1973.— 336 с.
2. *Гуревич В., Волмэн Г.* Теория размерности.— М. : Изд-во иностр. лит., 1948.— 232 с.
3. *Бурбаки Н.* Спектральная теория.— М. : Мир, 1872.— 184 с.
4. *Бурбаки Н.* Топологические векторные пространства.— М. : Изд-во иностр. лит., 1959.— 410 с.
5. *Рудин У.* Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$.— М. : Мир, 1984.— 456 с.
6. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 832 с.
7. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. Vol. 1: sequence spaces.— Berlin etc.: Springer, 1977.— 188 p.
8. *Дистель Д.* Геометрия банаховых пространств.— Киев : Вища шк., 1980.— 216 с.
9. *Хенкин Г. М.* Банаховы пространства аналитических функций в шаре и бицилиндре неизоморфны // Функцион. анализ и его прил.— 1968.— 2, 4.— С. 82—91.

Киев. ун-т Получено 01.04. 87