УДК 517.923

В. С. Адамчик, А. Д. Лизарев

Вронскианы решений одного класса дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами

Многие задачи механики деформируемого твердого тела, в которых механические свойства материалов, геометрия и начальное напряженное состояние описываются непрерывными функциями координат, приводятся после разделения переменных к обыкновенному дифференциальному уравнению следующего класса [1, 2]:

$$\sum_{i=0}^{q+1} (a_i - b_i y^{\delta} - c_i y^{m\delta})\, y^i d^i w/dy^i = 0. \tag{1}$$

Здесь $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, $a_{q+1} = 1$.

К уравнениям четвертого порядка класса (1) сводятся, например, задачи о колебаниях токонесущей пластины-полосы, помещенной в магнитное поле [3], кольцевой пластины при неравномерном растяжении и сжатии [4], вращающегося диска при учете внешнего трения [5]. Частными случаями (1) являются : дифференциальное уравнение гипергеометрического типа [6] ($c_i = 0$, либо $b_i = 0$, либо $m = 1$); алгебраическое уравнение Матье [7, 8] и уравнение для волновых функций Кулона [9] (в обоих уравнениях $q = \delta = 1$, $m = 2$); уравнение для сфероидальных функций [10] ($q = 1$, $\delta = 2$, $m = 2$), функций Аппеля одной переменной [11] ($q = 2$, $\delta = 1$, $m = 2$) и др.

Таким образом, многие подробно исследованные специальные функции являются решениями уравнения (1), поэтому в настоящей работе предпринята попытка единого подхода к изучению свойств этих функций и построению фундаментальной системы решений (ФСР) уравнения (1). Первые исследования по уравнению (1) были проведены в [1].

Обозначим через ${}_{p,s}H_q$ степенной ряд вида

$${}_{p,s}H_q\left(z;\quad \begin{matrix} b \\ c \\ m \end{matrix} \left| \begin{matrix} (\alpha_p) \\ (\beta_s) \\ (\gamma_q) \end{matrix} \right.\right) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k z^k, \tag{2}$$

где

$$D_k = bD_{k-1} \frac{\prod\limits_{i=1}^{p} (\alpha_i + k - 1)}{k \prod\limits_{i=1}^{q} (\gamma_i + k - 1)} + cD_{k-m} \frac{\prod\limits_{i=1}^{s} (\beta_i + k - m)}{k \prod\limits_{i=1}^{q} (\gamma_i + k - 1)}, \tag{3}$$

$$D_0 = 1,\ D_{-n} = 0,\quad n = \overline{1, m-1},\ (\alpha_p) = \alpha_1, \ldots, \alpha_p,\quad (\beta_s) = \beta_1, \ldots, \beta_s,$$

$$(\gamma_q) = \gamma_1, \ldots, \gamma_q.$$

Ряд (2) сходится на интервале $|z| < 1$, если $p \leqslant q$, $s \leqslant q$.

Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет ${}_{p,s}H_q$-функция, имеет вид

$$z\frac{d}{dz}\prod_{j=1}^{q}\left(z\frac{d}{dz}+\gamma_j-1\right)w = bz\prod_{j=1}^{p}\left(z\frac{d}{dz}+\alpha_j\right)w +$$

$$+ cz^m\prod_{j=1}^{s}\left(z\frac{d}{dz}+\beta_j\right)w. \tag{4}$$

Частным случаем ${}_{p,s}H_q$-функций при $b=0$, либо $c=0$, либо $m=1$, либо $m=0$ являются обобщенные гипергеометрические функции ${}_pF_q$. Действительно, если $c=0$, то рекуррентное соотношение (3) принимает вид

$$D_k = b^k\prod_{j=1}^{p}(\alpha_j)_k/k!\prod_{j=1}^{q}(\gamma_j)_k,$$

$$(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1).$$

Таким образом,

$${}_{p,s}H_q\left(z;\ \begin{matrix} b\\ 0\\ m\end{matrix}\left|\begin{matrix}(\alpha_p)\\ \\ (\gamma_q)\end{matrix}\right.\right) = {}_pF_q\ ((\alpha_p);\ (\gamma_q);\ bz).$$

Остальные случаи аналогичны.

Приведем без доказательства наиболее общие формулы дифференцирования и интегрирования для ${}_{p,s}H_q$-функций:

$$\frac{d}{dz}\left[z^{\sigma}{}_{p,s}H_q\left(z;\ \begin{matrix} b\\ c\\ m\end{matrix}\left|\begin{matrix}(\alpha_p)\\ (\beta_s)\\ (\gamma_q)\end{matrix}\right.\right)\right] = \sigma z^{\sigma-1}{}_{p+2,s+2}H_{q+2}\left(z;\ \begin{matrix} b\\ c\\ m\end{matrix}\left|\begin{matrix}\sigma+1, & \sigma+1-m, & (\alpha_p)\\ \sigma+m, & \sigma-1+m, & (\beta_s)\\ \sigma, & \sigma+1-m, & (\gamma_q)\end{matrix}\right.\right), \tag{5}$$

$$\int z^{\sigma-1}{}_{p,s}H_q\left(z;\ \begin{matrix} b\\ c\\ m\end{matrix}\left|\begin{matrix}(\alpha_p)\\ (\beta_s)\\ (\gamma_q)\end{matrix}\right.\right)dz = \frac{z^{\sigma}}{\sigma}{}_{p+1,s+1}H_{q+1}\left(z;\ \begin{matrix} b\\ c\\ m\end{matrix}\left|\begin{matrix}\sigma, & (\alpha_p)\\ \sigma, & (\beta_s)\\ \sigma+1, & (\gamma_q)\end{matrix}\right.\right), \tag{6}$$

$$\int {}_{p,s}H_q\left(z;\ \begin{matrix} b\\ c\\ m\end{matrix}\left|\begin{matrix}(\alpha_p)\\ (\beta_s)\\ (\gamma_q)\end{matrix}\right.\right)\frac{dz}{z} = \ln z + z\,\frac{b\prod\limits_{i=1}^{p}\alpha_i}{\prod\limits_{i=1}^{q}\gamma_i}\times$$

$$\times\ {}_{2p+2,2+s+q}H_{2+p+q}\left(z;\ \begin{matrix} b\\ c/b\\ m-1\end{matrix}\left|\begin{matrix}1, & 1, & (\alpha_p)+1, & (\alpha_p)+2-m\\ 1, & 1, & (\beta_s), & (\gamma_q)\\ 2, & 2, & (\gamma_q)+1, & (\alpha_p)+2-m\end{matrix}\right.\right). \tag{7}$$

Построим решения уравнения (1). Для этого введем обозначения: p — индекс b_i в (1) такой, что $b_p \neq 0$, но $b_{p+1} = \dots = b_{q+1} = 0$, s — индекс c_i в (1) такой, что $c_s \neq 0$, но $c_{s+1} = \dots = c_{q+1} = 0$, x_j, u_l, v_n — корни определяющих алгебраических уравнений

$$a_0 + \sum_{i=1}^{q+1} a_i\prod_{j=1}^{i}(x-j+1) = 0,$$

$$b_0 + \sum_{i=1}^{p} b_i\prod_{j=1}^{i}(u-j+1) = 0, \tag{8}$$

$$c_0+\sum_{i=1}^{s} c_i \prod_{j=1}^{t} (v-j+1)=0,$$

$$\alpha_{rl}=\frac{x_r-u_l}{\delta}, \quad \beta_{rn}=\frac{x_r-v_n}{\delta}, \quad \gamma_{rj}=\frac{x_r-x_j}{\delta}+1.$$

Заметим, что если корни уравнений (8) известны, то уравнение (1) можно представить в виде

$$\prod_{j=1}^{q+1}\left(y\frac{d}{dy}-x_j\right)w=b_p y^{\delta}\prod_{j=1}^{p}\left(y\frac{d}{dy}-u_j\right)w+c_s y^{m\delta}\prod_{j=1}^{s}\left(y\frac{d}{dy}-v_j\right)w.$$

Теорема. *ФСР уравнения* (1) *образуют функции*

$$w_r(y)=y^{x_r}{}_{p,s}H_q\left(y^{\delta};\ \begin{array}{c|l}\tilde b & \alpha_{r1},\dots,\alpha_{rp}\\ \tilde c & \beta_{r1},\dots,\beta_{rs}\\ m & \gamma_{r1},\overset{*}{\dots},\gamma_{r,q+1}\end{array}\right), \quad r=\overline{1,q+1}, \tag{9}$$

при условии

$$(x_r-x_j)/\delta\neq 0, \pm 1, \dots, \ r\neq j, \ r, j=\overline{1, q+1}. \tag{10}$$

Здесь значок $\overset{*}{\dots}$ *означает, что в серии параметров* γ_{rj} *индекс* $r\neq j$, *а* $\tilde b$ *и* $\tilde c$ *соответственно равны* $b_p\delta^{p-q-1}$ *и* $c_s\delta^{s-q-1}$.

Перейдем к построению вронскианов $W(y)$ ФСР (9). Для гипербесселевого уравнения ($c_i\equiv 0$, $a_0=0$, $p=0$, $\delta=1$), гипергеометрического уравнения Гаусса ($c_i\equiv 0$, $a_0=0$, $b_p=1$, $\delta=1$, $q=1$) и дифференциального уравнения гипергеометрического типа ($c_i\equiv 0$) вронскианы построены соответственно в [12, 13, 14]. Для общего дифференциального уравнения класса Фукса вронскиан приведен в [15]

Будем различать девять случаев, для которых по формуле Остроградского—Лиувилля получим:

1) $p=s=q+1$:

$$W(y)=W_0\exp\left(-\int\frac{a_q-b_q y^{\delta}-c_q y^{m\delta}}{1-b_{q+1}y^{\delta}-c_{q+1}y^{m\delta}}\frac{dy}{y}\right);$$

2) $p=q+1, \ s=q$:

$$W(y)=W_0 y^{-a_q}|1-b_{q+1}y^{\delta}|^{h_1}\prod_{k=0}^{m-2}\exp\left[-\frac{c_q}{\delta b_{q+1}^{k+1}}\frac{y^{\delta(m-1-k)}}{m-1-k}\right],$$

$$h_1=\frac{1}{\delta}\left(a_q-\frac{b_q}{b_{q+1}}-\frac{c_q}{b_{q+1}^m}\right);$$

3) $p=q+1, \ s=q-1, \ q-2, \dots, 0$:

$$W(y)=W_0 y^{-a_q}|1-b_{q+1}y^{\delta}|^{h_2}, \quad h_2=\frac{1}{\delta}\left(a_q-\frac{b_q}{b_{q+1}}\right);$$

4) $p=q, \quad s=q+1$:

$$W(y)=W_0 y^{-a_q}|1-c_{q+1}y^{\delta}|^{h_3}\exp\left(b_p\int\frac{y^{\delta-1}}{1-c_{q+1}y^{m\delta}}dy\right),$$

$$h_3=\frac{1}{m\delta}\left(a_q-\frac{c_q}{c_{q+1}}\right);$$

5) $p=s=q$:

$$W(y)=W_0 y^{-a_q}\exp\left[\frac{1}{\delta}\left(b_p y^{\delta}+\frac{c_q}{m}y^{m\delta}\right)\right];$$

6) $p = q, \quad s = q-1, \quad q-2, \ldots, 0$:

$$W(y) = W_0 y^{-a_q} \exp\left(\frac{b_q}{\delta} y^\delta\right);$$

7) $p = q-1,\ q-2, \ldots, 0, \quad s = q+1$:

$$W(y) = W_0 y^{-a_q} \left| 1 - c_{q+1} y^{m\delta} \right|^{h_s};$$

8) $p = q-1,\ q-2, \ldots, 0,\ s = q$:

$$W(y) = W_0 y^{-a_q} \exp\left(\frac{c_q}{m\delta} y^{m\delta}\right);$$

9) $p = q-1,\ q-2, \ldots, 0, \quad s = q-1,\ q-2, \ldots, 0$:

$$W(y) = W_0 y^{-a_q}.$$

Определим постоянную W_0 в этих формулах.

Лемма.

$$W_0 = \prod_{q+1 \geqslant i > j \geqslant 1} (x_i - x_j). \tag{11}$$

Доказательство. Заметим, что первые $m-1$ членов асимптотического разложения функций

$$_{p,s}H_q\left(z;\ \begin{matrix} \tilde{b} \\ \tilde{c} \\ m \end{matrix} \left| \begin{matrix} (\alpha_p) \\ (\beta_s) \\ (\gamma_q) \end{matrix} \right.\right), \quad {}_pF_q\left((\alpha_p);\ (\gamma_q);\ \frac{b_p}{\delta^{q+1-p}} z\right)$$

при $z \to 0$ совпадают. Составим вронскиан из главных членов асимптотических разложений решений $w_r(y)$, а затем положим $y = 1$:

$$W_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{q+1} \\ x_1(x_1 - 1) & x_2(x_2 - 1) & \ldots & x_{q+1}(x_{q+1} - 1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \prod\limits_{k=0}^{q-1}(x_1 - k) & \prod\limits_{k=0}^{q-1}(x_2 - k) & \ldots & \prod\limits_{k=0}^{q-1}(x_{q+1} - k) \end{vmatrix}.$$

Так как $W_0 = 0$ для $x_i = x_j,\ i \neq j$, то значение определителя выражается через некоторый многочлен $P_1(x_1, \ldots, x_{q+1})$ по формуле

$$W_0 = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{q+1} (x_i - x_j)\, P_1(x_1, \ldots, x_{q+1}), \tag{12}$$

где $P_1(x_1, \ldots, x_{q+1}) \neq 0$ для $x_i = x_j,\ i \neq j$. С другой стороны, непосредственное вычисление определителя W_0 доставляет многочлен от переменных $x_1, \ldots$ $\ldots, x_{q+1}$ со старшей степенью для каждой переменной, равной q. Коэффициент при x_k^q имеет вид

$$(-1)^{k+q+1} P_2(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{q+1}), \tag{13}$$

где $P_2(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{q+1}) \neq 0$ для $x_j = x_k, \quad j, k = \overline{1, q+1}, \quad j \neq k$. Сравнив коэффициенты при x_k^q из (12) и (13), получим (11). Лемма доказана.

Сопоставляя соотношения (10) и (11), видим, что решения (9) линейно зависимы, если $x_i = x_j$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, q+1}$. Если же не выполняются условия $(x_i - x_j)/\delta \neq \pm 1, \pm 2, \ldots, i \neq j, i, j = \overline{1, q+1}$, то решения (9) не определены.

Из формул, соответствующих случаям 1—9, можно получить, как частные случаи, выражения вронскианов обобщенного гипергеометрического уравнения.

В качестве примера используем функции ${}_{p,s}H_q$ и формулы для вронскианов при интегрировании неоднородного дифференциального уравнения радиальных перемещений вращающегося диска постоянной толщины [16] с переменными вдоль радиуса модулем упругости материала $E = E(y)$, плотностью $\rho = \rho(y)$ и постоянным коэффициентом Пуассона ν. Полагая

$$E(y) = E_0 \exp(ay^{2\delta} + by^{\delta} + c),$$

$$\rho(y) = \rho_0 \exp(2(ay^{2\delta} + by^{\delta} + c)),$$

получаем уравнение

$$y^2u'' + [\delta(2ay^{2\delta} + by^{\delta}) + 1]\, yu' + [\delta\nu(2ay^{2\delta} + by^{\delta}) - 1]\, u = f(y), \tag{14}$$

$$f(y) = -By^3 \exp(ay^{2\delta} + by^{\delta} + c).$$

Здесь y — безразмерный переменный радиус, B — постоянная, зависящая от скорости вращения, a, b, c — постоянные, характеризующие закон изменения модуля упругости и плотности материала.

ФСР однородного уравнения (14), как следует из формулы (9), имеет вид

$$\begin{gathered}
u_1(y) = \frac{1}{y}\ {}_{1,1}H_1\left(y^{\delta};\ \begin{matrix} -b\delta \\ -2a\delta \\ 2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\nu-1)/\delta \\ (\nu-1)/\delta \\ 1-2/\delta \end{matrix}\right), \\
u_2(y) = y\ {}_{1,1}H_1\left(y^{\delta};\ \begin{matrix} -b\delta \\ -2a\delta \\ 2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\nu+1)/\delta \\ (\nu+1)/\delta \\ 1+2/\delta \end{matrix}\right).
\end{gathered} \tag{15}$$

Вронскиан решений (15) определяется по формуле

$$W(y) = \frac{2}{y} \exp(ay^{2\delta} + by^{\delta}).$$

Подставляя в частное решение неоднородного уравнения (14)

$$u_*(y) = -u_1(y) \int \frac{u_2(y) f(y)}{W(y)}\, dy + u_2(y) \int \frac{u_1(y) f(y)}{W(y)}\, dy$$

решения (15), значение функции $f(y)$ и вронскиана $W(y)$, получаем

$$u_*(y) = \frac{Be^c}{2}\left[-\frac{y^4}{4}\, u_2(y)\ {}_{2,2}H_2\left(y^{\delta};\ \begin{matrix} -b\delta \\ -2a\delta \\ 2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 4/\delta, & (\nu-1)/\delta \\ 4/\delta, & (\nu-1)/\delta \\ 1+4/\delta, & 1-2/\delta \end{matrix}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{y^6}{6}\, u_1(y)_{2,2}H_2\left(y^{\delta};\ \begin{matrix} -b\delta \\ -2a\delta \\ 2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 6/\delta, & (\nu+1)/\delta \\ 6/\delta, & (\nu+1)/\delta \\ 1+6/\delta, & 1+2/\delta \end{matrix}\right)\right].$$

1. *Лизарев А. Д., Кленов В. И.* Аналитические решения класса уравнений с полиномиальными коэффициентами // Дифференц. уравнения.— 1978.— **14**, № 12.— С. 2158—2163.
2. *Лизарев А. Д.* О решениях задач теории колебаний и устойчивости неоднородных упругих и вязкоупругих тел // Докл. АН БССР.— 1982.— **26**, № 6.— С. 519—522.

3. *Лизарев А. Д.* О решениях задач теории колебаний и устойчивости токонесущей пластины // Изв. АН АрмССР. Механика.— 1981.— **34**, № 4.— С. 79—86.
4. *Лизарев А. Д.* Свободные колебания и устойчивость кольцевых пластин при неравномерном растяжении и сжатии // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1982.— № 5.— С. 136—142.
5. *Лизарев А. Д., Кузьменцов В. П.* Влияние внешнего трения на колебания вращающихся дисков // Трение и износ.— 1982.— **3**, № 2.— С. 249—255.
6. *Лизарев А. Д.* О дифференциальных уравнениях гипергеометрического типа // Мат. физика.— 1980.— Вып. 27.— С. 106—111.
7. *Мак-Лахлан Н. В.* Теория и приложения функций Матье.— М. : 1953.— 475 с.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье.— М. : Наука, 1967.— 299 с.
9. *Справочник* по специальным функциям / Ред. Абрамовиц М., Стиган И.— М. : Наука, 1979.— 830 с.
10. *Комаров И. В., Пономарев Л. И., Славянов С. Ю.* Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции.— М. : Наука, 1976.— 319 с.
11. *Burchnall J. L.* Differential equations associated with hypergeometric functions / Quart. J. Math.— 1942.— **13**,— P. 90—106.
12. *Ключанцев М. И.* Сингулярные дифференциальные операторы с $r - 1$ параметром и функции Бесселя векторного индекса // Сиб. мат. журн.— 1983.— **24**, № 13.- С. 47—62.
13. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации.— М. : Мир, 1980.— 608 с.
14. *Адамчик В. С.* Вронскианы дифференциальных уравнений гипергеометрического типа // Дифференциальные и интегральные уравнения.— Куйбышев: 1987.— С. 67—70.
15. *Дзядык В. К.* К теории линейных уравнений типа Фукса // Успехи мат. наук.— 1985.— **40**, вып. 4.— С. 163—164.
16. *Демьянушко И. В., Биргер И. А.* Расчет на прочность вращающихся дисков.— М. : 1978.— 247 с.

Белорус. ун-т

Получено 25.12.85,
после доработки — 06.04.87