УДК 519.21

Б. В. Бондарев, М. Е. Королев (Донец. ун-т)

НЕРАВЕНСТВО С. Н. БЕРНШТЕЙНА ПРИ УСРЕДНЕНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПЕРИОДИЧЕСКИХ СЛУЧАЙНЫХ СРЕДАХ

We construct an exponential Bernshtein inequality for normed fluctuations of a solution of a Dirichlet problem with rapidly oscillating periodic random coefficients with respect to a solution of an averaged Dirichlet problem.

Побудована експоненціальна нерівність С. Н. Бернштейна для нормованих флуктуацій розв'язку задачі Діріхле з швидкоосцилюючими періодичними випадковими коефіцієнтами відносно розв'язку усередненої задачі Діріхле.

В работах [1 – 8] найдены естественные ограничения на коэффициенты операторов, обеспечивающие сближение решений уравнений в частных производных с быстроосциллирующими по пространственной переменной случайными коэффициентами с решением усредненного уравнения. Естественным образом возникает вопрос об оценке скорости сходимости решений, о больших уклонениях решений исходных систем от решений усредненных систем (которые, как правило, оказываются детерминированными).

В работе [9] рассматривалась двухточечная задача

$$\frac{d}{dx}\left[K\left(x\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right)\frac{du_\varepsilon}{dx}\right] = f(x) + \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \qquad u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0, \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $[\;]$ — целая часть, $K(x)$ — периодическая с периодом 1 неслучайная функция, $\eta(t)$, $t \geq 0$, — случайный процесс с нулевым средним, удовлетворяющий какому-либо из условий слабой зависимости [10, 11]. Задачей (1) может, например, описываться стационарный температурный режим в сплошной среде с быстроменяющимся коэффициентом теплопроводности $K\left(x\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right)$, если источник распределен по закону $f(x)$ при наложении быстроосциллирующих флуктуаций $\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $x \in [0, 1]$. Наряду с задачей (1) в [9] рассматривалась „усредненная" двухточечная задача

$$\bar{k}\,\frac{d^2u_0}{dx^2} = f(x), \qquad u_0(0) = u_0(1) = 0. \tag{2}$$

Здесь

$$\bar{k} = \left(\int_0^1 \frac{dx}{K(x)}\right), \quad 0 < k_0 \leq K(x) \leq k_1 < +\infty.$$

Предполагалось, что справедлива оценка

$$P\{\|\zeta_\varepsilon\|_2 > R\} \leq c_1 \exp\{-c_2 R^{\alpha}\} + \rho_\varepsilon, \tag{3}$$

где $\rho_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $\alpha > 0$ — некоторые известные постоянные,

$$\|\varphi\|_2 = \left(\int_0^1 \varphi^2(x)\,dx\right)^{1/2}, \qquad \zeta_\varepsilon(x) = \sqrt{\varepsilon}\int_0^{x/\varepsilon} \eta(t)\,dt.$$

Было показано, что в норме $\|\cdot\|_2$ обобщенное решение (1) „близко" к

$$u_\varepsilon^1(x) = u_0(x) + \varepsilon N\left(x\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right)\frac{du_0}{dx}. \tag{4}$$

Здесь

$$N(x) = \int_0^x \left(\frac{\bar{k}}{K(y)} - 1\right) dy,$$

$u_0(x)$ — решение задачи (2). Близость решений, а именно скорость сближения, определялись из полученной оценки

$$P\{\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^1\|_2 > \sqrt{\varepsilon}R + \varepsilon c_3\} \le c_1 \exp\{-c_2 R^\alpha k_0^\alpha 2^{\alpha/2}\} + \rho_\varepsilon, \tag{5}$$

где

$$c_3 = \frac{k_1}{k_0}\sqrt{\frac{f_0}{2}}\left(1 + \frac{k_1}{k_0}\right), \qquad \|f\|_2^2 \le f_0 < +\infty.$$

В частности, из неравенства (5) при $R = \varepsilon^{-\beta}$, $0 < \beta < 1/2$, следует

$$P\{\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^1\| < \varepsilon^{1/2-\beta} + \varepsilon c_3\} \ge 1 - c_1 \exp\{-c_2 \varepsilon^{-\alpha\beta} k_0^\alpha 2^{\alpha/2}\} - \rho_\varepsilon,$$

т. е. с вероятностью, близкой к 1, решения $u_\varepsilon(x)$ и $u_\varepsilon^1(x)$ в норме $\|\cdot\|_2$ не будут расходиться далее, чем на $\varepsilon^{1/2-\beta} + \varepsilon c_3$.

Естественным образом возникает следующая постановка, обобщающая постановку из [9]:

1) коэффициент $K(x)$ считать случайной функцией;

2) вместо аргумента $x\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ рассмотреть аргумент $\frac{x}{\varepsilon}$;

3) рассмотреть случай классического решения задачи (1) и построить аналог (5) в равномерной метрике.

1. Постановка задачи, предположения, основной результат. Рассмотрим на $[0, 1]$ краевую задачу

$$\frac{d}{dx}\left[K\left(\xi_\varepsilon\left[\frac{x}{\varepsilon}\right]\right)\frac{du_\varepsilon}{dx}\right] = f(x) + \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$
$$u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0, \tag{6}$$

где случайный процесс $\eta(t)$, $t \ge 0$, стационарный в узком смысле, имеет нулевое среднее.

Случайная функция $\xi_\varepsilon(t)$, $t \ge 0$, является решением стохастического дифференциального уравнения

$$\frac{d\xi_\varepsilon}{dt} = a(\xi_\varepsilon(t)) + \frac{1}{\varepsilon^r} X\left(\frac{t}{\varepsilon^{2r}}\right),$$
$$\xi_\varepsilon(0) = \xi_0. \tag{7}$$

Здесь $X(t)$, $t \ge 0$, — стационарный в узком смысле случайный процесс с нулевым средним, удовлетворяющий условию равномерно сильного перемешивания [10] с коэффициентом перемешивания $\varphi(\tau) \underset{\tau \to +\infty}{\to} 0$; функции $a(x)$, $K(x)$, $f(x)$ — неслучайные, периодические с периодом 1, удовлетворяющие условию Липшица с постоянной $L > 0$, причем наряду с задачей (6) рассмотрим задачу

$$\bar{k}\,\frac{d^2u_0}{dx^2} = f(x), \quad u_0(0) = u_0(1) = 0, \tag{8}$$

где

$$\bar{k} = \left(\int_0^1 \frac{\rho(x)}{K(x)}\,dx\right)^{-1}$$

$\rho(x)$ определяется формулой [11]

$$\rho(x) = \frac{V(1)\int_0^1 V(y)\,dy + \int_x^1 V(y)\,dy}{V(x)\int\limits_0^1 \frac{V(1)\int_0^z V(y)\,dy + \int_z^1 V(y)\,dy}{V(z)}\,dz}, \tag{9}$$

а

$$V(x) = \exp\left\{-\frac{2}{\sigma^2}\int_0^x a(y)\,dy\right\}.$$

Основным результатом данной статьи является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие предположения:*

а) *для процесса* $\eta(t)$ *справедлива оценка*

$$P\{\|\zeta_\varepsilon\|_1 > R\} \le c_1\exp\{-c_2R^\alpha\} + \rho_\varepsilon, \tag{10}$$

$$\|\varphi\|_1 = \int_0^1 |\varphi(x)|\,dx, \quad \zeta_\varepsilon(x) = \sqrt{\varepsilon}\int_0^{x/\varepsilon}\eta(t)\,dt,$$

где $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $\alpha > 0$ *— известные постоянные,* $\rho_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$ *— известная функция;*

б) *для процесса* $X(t)$ *коэффициент перемешивания* $\varphi(\tau)$ *такой, что*

$$\int_0^\infty \varphi^{1/2}(\tau)\,d\tau < +\infty, \tag{11}$$

выполнено условие Крамера [10]

$$M|X(t)|^m \le \frac{b^2H^{m-2}}{2}\,m!, \quad m \ge 2, \tag{12}$$

$$0 < \sigma^2 = 2\int_0^\infty MX(0)\,X(s)\,ds < +\infty.$$

Тогда верна оценка

$$P\left\{\sup_{0\le x\le 1}|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon|\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} > \right.$$

$$\left. > 2\left[\frac{k_1}{k_0}\right] + \|f\|_1\left(1 + \frac{k_0^2}{k_1}\right)R + 2c_0\,\|f\|_1\left(1 + \frac{2k_0^2}{k_1}\right)\sqrt{\varepsilon}\right\} \le$$

$$\le c_1\exp\{-c_2R^\alpha\} + \rho_\varepsilon + 2\exp\left\{-\frac{(R-\sqrt{\varepsilon})^2\sigma^2}{2c_0^2}\right\} +$$

$$+\left(1+\frac{1}{\varepsilon^{1+2r}}\right)\exp\left\{-\left[\frac{1}{\varepsilon^{r}}-4bce\right]\frac{1}{2Hc}\right\}. \tag{13}$$

Здесь

$$u_\varepsilon^1(x) = u_0(x) + \varepsilon N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left[\frac{du_0}{dx}-\frac{1}{\bar k}\int_0^1(1-y)f(y)\,dy\right],$$

$$u_0(x) = \frac{x}{\bar k}\int_0^x(1-y)f(y)\,dy+\frac{(1-x)}{\bar k}\int_x^1 yf(y)\,dy$$

— *решение задачи* (8),

$$N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \int_0^{x/\varepsilon}\left(\frac{\bar k}{K(\xi_\varepsilon(t))}-1\right)dt,$$

$$c_0 = \left(1+\frac{k_1}{k_0}\right)\exp\left\{\frac{8L}{\sigma^2}\right\}, \quad c = \int_0^{+\infty}\varphi^{1/2}(\tau)\,d\tau.$$

2. Доказательство вспомогательных результатов.

Теорема 2. *Пусть* $X(t)$, $t\geq 0$, — *стационарный в узком смысле случайный процесс с нулевым средним, удовлетворяющий условию равномерно сильного перемешивания с коэффициентом* $\varphi(\tau)$, $\tau>0$,

$$c = \int_0^{+\infty}\varphi^{1/2}(\tau)\,d\tau < +\infty.$$

Предположим также, что выполняется условие Крамера

$$M|X(t)|^m \leq \frac{b^2H^{m-2}}{2}m!, \quad m\geq 2.$$

Тогда справедливо представление

$$\nu_\varepsilon(t) = \varepsilon^r\int_0^{\varepsilon^{t/(2r)}}X(s)\,ds = \sigma\varepsilon^r W\left(\frac{t}{\varepsilon^{2r}}\right)+\varepsilon^r\eta_0\left(\frac{t}{\varepsilon^{2r}}\right), \tag{14}$$

причем справедлива оценка

$$P\left\{\varepsilon^r\sup_{0\leq t\leq 1/\varepsilon}\left|\eta_0\left(\frac{t}{\varepsilon^{2r}}\right)\right|>\delta\right\}\leq$$

$$\leq\left(1+\frac{1}{\varepsilon^{1+2r}}\right)\exp\left\{-\left[\frac{\delta}{\varepsilon^r}-4ebc\right]\frac{1}{8Hc}\right\}. \tag{15}$$

Доказательство теоремы 2. Справедливость представления (14) следует из работы [12], остается доказать оценку (15).

Пусть F_0^t — минимальная σ-алгебра, порожденная процессом

$$X(s), \quad 0\leq s\leq t, \quad F_{t+\tau}^{+\infty}, \quad t+\tau\leq s<+\infty.$$

Тогда [10] имеем

$$\sup_{A\in F_0^t,\ B\in F_{t+\tau}^{+\infty}}|P(B/A)-P(B)| = \varphi(\tau) \underset{\tau\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{16}$$

и если $M|X(t)|^p<+\infty$, $p>1$, то при $s\geq t$

$$M\left|M\left\{X(s)/F_0^t\right\}\right|^p \le 2^p[\varphi(s-t)]^{p-1}M|X(s)|^p. \tag{17}$$

Действительно, пусть сначала $X(s)$ представима как конечная сумма вида

$$X(s) = \sum_j \lambda_j X(B_j),$$

где $\chi(B_j)$ — индикатор множества B_j.

Пусть $A_i \in F_0^t$, $X(s)$ — $F_{t+\tau}^{+\infty}$-измерима, тогда

$$\left|M\left\{X(s)/F_0^t\right\}\right| \le \sum_j |\lambda_j|\,|P(B_j/A_i)-P(B_j)| \le$$

$$\le \sum_j |\lambda_j|^p\,[P(B_j/A_i)+P(B_j)]^{1/p}\left(\sum_j |P(B_j/A_i)-P(B_j)|\right)^{1/q} \le$$

$$\le \left(\sum_j |\lambda_j|^p\,[P(B_j/A_i)+P(B_j)]\right)^{1/p}\left(\left|P\left(\cup^+ B_j/A_i\right)-P\left(\cup^+ B_j\right)\right| +\right.$$

$$\left. + \left|P\left(\cup^- B_j/A_i\right)-P\left(\cup^- B_j\right)\right|^{1/q}\right). \tag{18}$$

Здесь [10] $\cup^+ B_j$ — объединение тех множеств B_j, для которых $P(B_j/A_i)-$ $-P(B_j)\ge 0$, $\cup^- B_j$ — объединение тех множеств B_j, для которых

$$P(B_j/A_i)-P(B_j) < 0.$$

Из (18) с учетом (17) получаем

$$\left|M\left\{X(s)/F_0^t\right\}\right| \le \left(\sum_j |\lambda_j|[P(B_j/A_i)+P(B_j)]\right)^{1/p}[2\varphi(\tau)]^{1/q},$$

откуда

$$M\left|M\left\{X(s)/F_0^t\right\}\right|^p \le \sum_i\sum_j |\lambda_j|^p\,[P(B_j/A_i)+P(B_j)]\,P(A_i)\,[2\varphi(\tau)]^{p/q} \le$$

$$\le 2\sum_j |\lambda_j|^p P(B_j)\,[2\varphi(\tau)]^{p/q}. \tag{19}$$

Из (19) с учетом того, что $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1-p}{q}$, имеем оценку (17) для случая, когда $X(s)$ представима в виде конечной суммы. Чтобы доказать оценку (17) полностью, надо построить последовательность $x_n(s)$, которые представимы как конечные суммы и для которых

$$M|X_n(s)-X(s)|^p \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Далее, пусть

$$\mu_t = \int_0^{+\infty} M\left\{X(s)/F_0^t\right\}ds - \eta_0,$$

$$\eta_t = \int_t^{+\infty} M\left\{X(s)/F_0^t\right\}ds, \quad t\ge 0;$$

случайный процесс η_t в условиях теоремы 2 определен. Действительно, в силу (17) при $t \geq 0$ имеем

$$\int_t^{+\infty} M\left|M\left\{X(s)/F_0^t\right\}\right| ds \leq \int_t^{+\infty} \left(M\left|M\left\{X(s)/F_0^t\right\}\right|^2\right)^{1/2} ds \leq$$

$$\leq \int_t^{+\infty} \left(M|X(s)|^2 2^2 \varphi(s-t)\right)^{1/2} ds = 2|b| \int_0^{+\infty} \varphi^{1/2}(\tau)\, d\tau < +\infty.$$

Более того, при $m \geq 2$ справедлива оценка

$$M|\eta_0(t)|^m \leq \frac{4b^2c^2(2Hc)^{m-2}m!}{2}, \tag{20}$$

где

$$c = \int_0^{+\infty} \varphi^{1/2}(\tau)\, d\tau .$$

Действительно, в силу того что

$$M|\xi_1 \ldots \xi_m| \leq (M|\xi_1|^m)^{1/m} \ldots (M|\xi_m|^m)^{1/m}$$

(в справедливости последнего убеждаемся по индукции), имеем

$$M|\eta_0(t)|^m \leq \int_t^{+\infty} \ldots \int_t^{+\infty} M\left|M\left\{X(s_1)/F_0^t\right\}\right| \ldots \left|M\left\{X(s_m)/F_0^t\right\}\right| ds_1 \ldots ds_m \leq$$

$$\leq \left(\int_t^{+\infty} \left(M\left|M\left\{X(s)/F_0^t\right\}\right|^m\right)^{1/m} ds\right)^m \leq$$

$$\leq \left(\int_t^{+\infty} \left(2^m[\varphi(s-t)]^{m-1} M|X(s)|^m\right)^{1/m} ds\right)^m \leq$$

$$\leq 2^m \left(\int_0^{+\infty} \varphi^{1/2}(\tau)\, d\tau\right)^m M|X(t)|^m.$$

Отсюда в силу условия Крамера, наложенного на стационарный процесс, имеем оценку (20). Далее,

$$\int_0^{+\infty} M\left|M\left\{X(s)/F_0^t\right\}\right| ds = \int_0^t M\left|M\left\{X(s)/F_0^t\right\}\right| ds + \int_t^{+\infty} M\left|M\left\{X(s)/F_0^t\right\}\right| ds \leq$$

$$\leq \int_0^t M|X(s)|\, ds + \int_t^{+\infty} M\left|M\left\{X(s)/F_0^t\right\}\right| ds < +\infty,$$

т. е. мартингал μ_t также определен.

Пусть

$$\nu(t) = \int_0^t X(s)\, ds .$$

Этот процесс [13, 14] является спиралью и имеет модификацию, являющуюся мартингалом и спиралью [13, 15]. Процесс μ_t является квадратично интегрируемым мартингалом [13].

Поскольку μ_t — спираль, то его квадратическая характеристика $\langle \mu, \mu \rangle_t$ также является спиралью [15]. Используя леммы 2 и 3 из [13], получаем

$$M\mu_t^2 = tM\mu_1^2 = t\sigma^2, \tag{21}$$

где

$$\sigma^2 = 2\int_0^{+\infty} MX(0)\,X(s)\,ds.$$

Следует отметить [10], что

$$0 < \sigma^2 \le 2\int_0^{+\infty} |MX(0)\,X(s)|\,ds \le 2M|X(s)|^2 \int_0^{+\infty} \varphi^{1/2}(\tau)\,d\tau \le b^2c < +\infty,$$

$$\varepsilon^{2r} M\langle \mu, \mu \rangle_{t/\varepsilon^{2r}} = 2t\int_0^{+\infty} MX(0)\,X(s)\,ds = \sigma^2 t.$$

Пусть $n = \left[\frac{1}{\varepsilon^{1+2r}}\right]$, тогда

$$P\left\{\sup_{0\le t\le 1/\varepsilon}\left|\eta_0\left(\frac{t}{\varepsilon^{2r}}\right)\right| > \frac{\delta}{\varepsilon^r}\right\} \le \sum_{k=1}^{n+1} P\left\{\eta_k > \frac{\delta}{\varepsilon^r}\right\}. \tag{22}$$

Здесь $\eta_k = \sup\limits_{k-1\le t\le k} |\eta_0(t)|$, $k = \overline{1, n-1}$.

Как отмечалось в [13], при $0 \le t \le 1$

$$\eta_0(t) = \int_t^{+\infty} M\left\{X(s)/F_0^t\right\} ds \le M\left\{\left[\eta_0(1) + \int_t^1 X(s)\,ds\right] \Big/ F_0^t\right\},$$

а следовательно,

$$|\eta_0(t)| \le M\left\{\left[|\eta_0(1)| + \int_0^1 |X(s)|\,ds\right] \Big/ F_0^t\right\} = \zeta_t.$$

Очевидно, что ζ_t — мартингал относительно потока F_0^t, $t \ge 0$. Используя неравенство Дуба для мартингалов [16], имеем

$$M\sup_{0\le t\le 1} |\eta_0(t)|^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p M|\zeta_1|^p \le$$

$$\le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p M\left[|\eta_0(1)| + \int_0^1 |X(s)|\,ds\right]^p \le$$

$$\le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p 2^{p-1}\left(M|\eta_0(1)|^p + M\left[\int_0^1 |X(s)|\,ds\right]^p\right).$$

Далее в силу неравенства (20) получаем

$$M|\eta_0(1)|^m \le \frac{4b^2c^2(2Hc)^{m-2}}{2}\,m!,$$

$$M\left[\int_0^1 |X(s)|\,ds\right]^m \le M|X(s)|^m \le \frac{b^2H^{m-2}}{2}m!.$$

Таким образом,

$$M\sup_{0\le t\le 1}|\eta_0(t)|^m \le \left(\frac{m}{m-1}\right)^m 2^{m-1}\left[\frac{4b^2c^2(2Hc)^{m-2}}{2}m! + \frac{b^2H^{m-2}}{2}m!\right] \le$$

$$\le 2e^2\frac{4b^2c^2(2Hc)^{m-2}}{2}m! \tag{23}$$

(не нарушая общности считаем, что $2c > 1$). Используя неравенства (23) и (22), при $0 < z \le \dfrac{1}{8Hc}$ получаем

$$P\left\{\sup_{0\le t\le 1/\varepsilon}\left|\eta_0\left(\frac{t}{\varepsilon^{2r}}\right)\right| > \frac{\delta}{\varepsilon^r}\right\} \le \sum_{k=1}^{n+1}P\left\{\eta_k > \frac{\delta}{\varepsilon^r}\right\} \le$$

$$\le \exp\left\{-\frac{z\delta}{\varepsilon^r}\right\}\sum_{k=1}^{n+1}M\exp\{z\eta_k\} \le \exp\left\{-\frac{z\delta}{\varepsilon^r}\right\}\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{M(z\eta_k)^m}{m!} \le$$

$$\le \exp\left\{-\frac{z\delta}{\varepsilon^r}\right\}\sum_{k=1}^{n+1}\left(1 + zM|\eta_k| + \sum_{m=2}^{+\infty}\frac{M(z|\eta_k|)^m}{m!}\right) \le$$

$$\le \left(1+\frac{1}{\varepsilon^{1+2r}}\right)\exp\left\{-\frac{z\delta}{\varepsilon^r}\right\}\left(1 + z|b| + 4e^2b^2c^2z^2\sum_{m=2}^{+\infty}(2zHc)^{m-2}\right) \le$$

$$\le \left(1+\frac{1}{\varepsilon^{1+2r}}\right)\exp\left\{-\frac{z\delta}{\varepsilon^r}\right\}(1 + z|b| + 8e^2b^2c^2z^2) \le$$

$$\le \left(1+\frac{1}{\varepsilon^{1+2r}}\right)\exp\left\{-\left[-\frac{\delta}{\varepsilon^r} - 4ebc\right]\frac{1}{8Hc}\right\}. \tag{24}$$

3. ***Доказательство теоремы* 1.** Запишем уравнение (7) в интегральном виде

$$\xi_\varepsilon(t) = \xi_0 + \int_0^t a(\xi_\varepsilon(s))\,ds + \sigma\varepsilon^r W\left(\frac{t}{\varepsilon^{2r}}\right) + \varepsilon^r\eta_0\left(\frac{t}{\varepsilon^{2r}}\right). \tag{25}$$

В силу того что

$$\xi_\varepsilon(t),\quad W\left(\frac{t}{\varepsilon^{2r}}\right),\quad \eta_0\left(\frac{t}{\varepsilon^{2r}}\right),\quad F_0^{t/\varepsilon^{2r}}$$

— измеримые функции, уравнение (25) можно записать в виде

$$y_\varepsilon(t) = \xi_0 + \int_0^t b_\varepsilon(s, y_\varepsilon(s))\,ds + \sigma W_\varepsilon(t), \tag{26}$$

где

$$W_\varepsilon(t) = \varepsilon^r W\left(\frac{t}{\varepsilon^{2r}}\right), \qquad b_\varepsilon(t,x) = a\left(x + \varepsilon^r\eta_0\left(\frac{t}{\varepsilon^{2r}}\right)\right),$$

$F_0^{t/\varepsilon^{2r}}$-измеримая функция; $y_\varepsilon(t) = \xi_\varepsilon(t) - \varepsilon^r\eta_0\left(\dfrac{t}{\varepsilon^{2r}}\right)$ — также $F_0^{t/\varepsilon^{2r}}$-измеримая, т. е. уравнение (26) является уравнением без упреждения, а значит, в расчетах может быть применена формула Ито. Подставив разложение

$$u_\varepsilon^1(x) = u_0(x) + \varepsilon N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left[\frac{du_0}{dx} - \frac{1}{\bar{k}}\int_0^1 (1-y)\, f(y)\, dy\right]$$

в уравнение (6), получим

$$\frac{d}{dx}\left[K\left(\xi_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\frac{du_\varepsilon^1}{dx}\right] = f(x) + \varepsilon\frac{d}{dx}\left[K\left(\xi_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{d^2u_0}{dx^2}\right] +$$

$$+ \frac{1}{\bar{k}}\int_0^1 (1-y)\, f(y)\, dy \frac{d}{dx}\left[\bar{k} - K\left(\xi_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\right]. \tag{27}$$

Действительно,

$$K\left(\xi_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\frac{du_\varepsilon^1}{dx} = K\left(\xi_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\frac{du_0}{dx} + \varepsilon K\left(\xi_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{d^2u_0}{dx^2} +$$

$$+ \left[\bar{k} - K\left(\xi_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\right]\left[\frac{du_0}{dx} - \frac{1}{\bar{k}}\int_0^1 (1-y)\, f(y)\, dy\right] =$$

$$= \bar{k}\frac{du_0}{dx} - \int_0^1 (1-y)\, f(y)\, dy + \varepsilon K\left(\xi_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{d^2u_0}{dx^2} +$$

$$+ \frac{1}{\bar{k}}\left[\bar{k} - K\left(\xi_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\right]\int_0^1 (1-y)\, f(y)\, dy.$$

Отсюда и следует (27). Из (6) и (27) имеем

$$\frac{d}{dx}\left[K\left(\xi_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\frac{d[u - u_\varepsilon^1]}{dx}\right] =$$

$$= -\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\bar{k}}\int_0^1 (1-y)\, f(y)\, dy \frac{d}{dx}\left[\bar{k} - K\left(\xi_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\right] +$$

$$+ \varepsilon\frac{d}{dx}\left[K\left(\xi_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{d^2u_0}{dx^2}\right]. \tag{28}$$

Кроме того,

$$u_\varepsilon(0) - u_\varepsilon^1(0) = u_\varepsilon(1) - u_\varepsilon^1(1) = 0. \tag{29}$$

Функция Грина для задачи Дирихле с уравнением (28) и краевыми условиями (29) имеет вид [17, с. 79]

$$G_\varepsilon(x, y) = \begin{cases} g_\varepsilon(x) - \dfrac{g_\varepsilon(x)\, g_\varepsilon(y)}{g_\varepsilon(1)}, & 0 \le x \le y; \\[2ex] g_\varepsilon(y) - \dfrac{g_\varepsilon(x)\, g_\varepsilon(y)}{g_\varepsilon(1)}, & y \le x \le 1. \end{cases} \tag{30}$$

Здесь

$$g_\varepsilon(x) = \varepsilon\int_0^{x/\varepsilon}\frac{dt}{K(\xi_\varepsilon(t))}. \tag{31}$$

Из (28) и (29) имеем

$$u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon^1(x) = -\int_0^1 G_\varepsilon(x,y)\,\eta\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)dy +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{\bar{k}}\int_0^1 G_\varepsilon(x,y)\frac{d}{dy}\left[K\left(\xi_\varepsilon\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\right)N\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)f(y)\right]dy +$$

$$+ \int_0^1 G_\varepsilon(x,y)\frac{d}{dy}\left[\bar{k} - K\left(\xi_\varepsilon\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\right)\right]dy\ \frac{1}{\bar{k}}\int_0^1 (1-y)\,f(y)\,dy. \qquad (32)$$

Используя явный вид функции Грина, построим оценки слагаемых правой части (32):

$$\left|\int_0^1 G_\varepsilon(x,y)\,\eta\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)dy\right| = \sqrt{\varepsilon}\left|\int_0^1 G_\varepsilon(x,y)\,d\zeta_\varepsilon(y)\right| \le \sqrt{\varepsilon}\,\frac{1}{k_0}\|\zeta_\varepsilon\|_1, \qquad (33)$$

$$\varepsilon\left|\int_0^1 G_\varepsilon(x,y)\frac{d}{dy}\left[K\left(\xi_\varepsilon\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\right)f(y)\right]dy\right| \le \varepsilon\|f\|_1 \sup_{0\le x\le 1}\left|\dot{N}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|, \qquad (34)$$

$$\left|\frac{1}{\bar{k}}\int_0^1 (1-y)\,f(y)\,dy\int_0^1 G_\varepsilon(x,y)\frac{d}{dy}\left[\bar{k} - K\left(\xi_\varepsilon\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\right)\right]dy\right| \le$$

$$\le \frac{2\|f\|_1}{k_0}\,\varepsilon \sup_{0\le x\le 1}\left|N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right| \qquad (35)$$

Из (32) – (35) имеем

$$\sup_{0\le x\le 1}|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon^1(x)|\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \le$$

$$\le \frac{k_1}{k_0}\|\zeta_\varepsilon\|_1 + \sqrt{\varepsilon}\|f\|_1(1 + k_0^2 k_1)\sqrt{\varepsilon}\sup_{0\le x\le 1}\left|N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|. \qquad (36)$$

Займемся построением экспоненциального неравенства для величины $\sqrt{\varepsilon}\sup_{0\le x\le 1}|N(x/\varepsilon)|$. Для этого рассмотрим на $[0,1]$ вспомогательную краевую задачу

$$Lu = f,$$
$$u(0) = u(1) = 0. \qquad (37)$$

Здесь

$$Lu = \frac{\sigma^2}{2}\frac{d^2u}{dx^2} + a(x)\frac{du}{dx}.$$

Нетрудно проверить (см., например, [11]), что это решение задачи (37) в классе $C^2[0,1]$ имеет вид

$$u(x) = -g_2(x)\int_0^x g_1(y)\,G(y)\,f(y)\,dy - g_1(x)\int_x^1 g_2(y)\,G(y)\,f(y)\,dy, \qquad (38)$$

где $g_1(x) = \int_0^x V(y)\,dy$, $g_2(x) = \int_x^1 V(y)\,dy$, $V(x)$ определено в (12),

$$G(y) = \frac{2}{\sigma^2 V(y)} \left[\int_0^1 V(u)\, du \right]^{-1}$$

Рассмотрим вспомогательное стохастическое уравнение

$$dz_\varepsilon(t) = a(z_\varepsilon(t))\, dt + \sigma\, dW_\varepsilon(t). \tag{39}$$

Плотность инвариантной меры для уравнения (39) имеет вид [11, 18]

$$p(x) = G_0(x) \left[\int_0^1 G_0(y)\, dy \right]^{-1}, \quad x \in [0, 1].$$

Легко убедиться в том, что $p(x) \in C^2[0, 1]$ и $\dfrac{\sigma^2}{2} \dfrac{d^2 p}{dx^2} - \dfrac{d[pa]}{dx} = 0$ на $[0, 1]$. Решение последней задачи определяется однозначно (8) условием нормировки.

Возьмем в качестве $f(x)$ задачи (37) функцию

$$f(x) = \frac{\bar{k}}{K(x)} - 1.$$

Нетрудно заметить, что в данном случае

$$\int_0^1 f(x)\, p(x)\, dx = 0.$$

Тогда в силу теорем Фредгольма [18] решение задачи (37) единственно с точностью до постоянного слагаемого, причем справедливы оценки

$$\sup_{0 \le x \le 1} |u(x)| \le c_0 < +\infty, \qquad \sup_{0 \le x \le 1} \left| \frac{du}{dx} \right| \le c_0 < +\infty, \tag{40}$$

где

$$c_0 = \left(1 + \frac{k_1}{k_0} \right) \exp\left\{ \frac{8L}{\sigma^2} \right\}.$$

Далее

$$\sqrt{\varepsilon} \left| N\left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right| = \sqrt{\varepsilon} \left| \int_0^{x/\varepsilon} \left(\frac{\bar{k}}{K(\xi_\varepsilon(t))} - 1 \right) dt \right| \le$$

$$\le \frac{\sqrt{\varepsilon}\, \bar{k}}{k_0^2} \int_0^{1/\varepsilon} |K(\xi_\varepsilon(t)) - K(y_\varepsilon(t))|\, dt + \sqrt{\varepsilon} \left| \int_0^{x/\varepsilon} \left(\frac{\bar{k}}{K(y_\varepsilon(t))} - 1 \right) dt \right| \le$$

$$\le \frac{\sqrt{\varepsilon}\, k_1 L}{k_0^2} \sup_{0 \le x \le 1/\varepsilon} |\xi_\varepsilon(x) - y_\varepsilon(x)| + \sqrt{\varepsilon} \left| \int_0^{x/\varepsilon} \left(\frac{\bar{k}}{K(y_\varepsilon(t))} - 1 \right) dt \right|. \tag{41}$$

Пусть $U(x)$ — решение задачи (37), $y_\varepsilon(t)$ — решение уравнения (26). Используя формулу Ито, получаем

$$\sqrt{\varepsilon} \left[U\left(y_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) - U(\xi_0) \right] =$$

$$= \sqrt{\varepsilon} \int_0^{x/\varepsilon} \left[\frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2 U}{dy^2}(y_\varepsilon(t)) + b_\varepsilon(t, y_\varepsilon(t)) \frac{dU}{dy}(y_\varepsilon(t)) \right] dt +$$

$$+ \sqrt{\varepsilon}\sigma \int_0^{x/\varepsilon} \frac{dU}{dy}(y_\varepsilon(t))\, dW_\varepsilon(t) =$$

$$= \sqrt{\varepsilon} \int_0^{x/\varepsilon} LU(y_\varepsilon(t))\, dt + \sqrt{\varepsilon} \int_0^{x/\varepsilon} [b_\varepsilon(t, y_\varepsilon(t)) - a(y_\varepsilon(t))] \frac{dU}{dy}\, dt +$$

$$+ \sqrt{\varepsilon}\sigma \int_0^{x/\varepsilon} \frac{dU}{dy}(y_\varepsilon(t))\, dW_\varepsilon(t).$$

Отсюда имеем

$$\sqrt{\varepsilon} \int_0^{x/\varepsilon} \left(\frac{\bar{k}}{K(y_\varepsilon(t))} - 1 \right) dt = \sqrt{\varepsilon} \left[U\left(y_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) - U(\xi_0) \right] -$$

$$- \sqrt{\varepsilon} \int_0^{x/\varepsilon} [b_\varepsilon(t, y_\varepsilon(t)) - a(y_\varepsilon(t))] \frac{dU}{dy}(y_\varepsilon(t))\, dt - \sqrt{\varepsilon}\sigma \int_0^{x/\varepsilon} \frac{dU}{dy}(y_\varepsilon(t))\, dW_\varepsilon(t).$$

Из последнего соотношения получаем

$$\sqrt{\varepsilon} \left| \int_0^{x/\varepsilon} \left(\frac{\bar{k}}{K(y_\varepsilon(t))} - 1 \right) dt \right| \le 2c_0 \sqrt{\varepsilon} +$$

$$+ \sqrt{\varepsilon} L c_0 \sup_{0 \le x \le 1/\varepsilon} \varepsilon^r \left| \eta_0\left(\frac{t}{\varepsilon^{2r}}\right)\right| + \sqrt{\varepsilon}\sigma \left| \int_0^{x/\varepsilon} \frac{dU}{dy}(y_\varepsilon(t))\, dW_\varepsilon(t) \right|. \tag{42}$$

Согласно [20, с. 172] справедлива оценка

$$P\left\{ \sup_{0 \le x \le 1} \left| \sqrt{\varepsilon} \int_0^{x/\varepsilon} \sigma \frac{dU}{dy}(y_\varepsilon(t))\, dW_\varepsilon(t) \right| > z \right\} \le 2 \exp\left\{ -\frac{z^2 \sigma^2}{2c_0^2} \right\}, \tag{43}$$

а в силу оценки (24)

$$P\left\{ \varepsilon^r \sup_{0 \le t \le 1/\varepsilon} \left| \eta_0\left(\frac{t}{\varepsilon^{2r}}\right) \right| > \delta \right\} \le$$

$$\le \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^{1+2r}} \right) \exp\left\{ -\left[\frac{\delta}{\varepsilon^r} - 4ebc \right] \frac{1}{8Hc} \right\} \tag{44}$$

Из (41) с учетом (42) – (44) имеем оценку

$$P\left\{ \sqrt{\varepsilon} \sup_{0 \le t \le 1} \left| N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right| > R + 2c_0\sqrt{\varepsilon} \right\} \le$$

$$\le P\left\{ \frac{\sqrt{\varepsilon} k_1^2}{k_0^2} L \sup_{0 \le t \le 1/\varepsilon} \varepsilon^r \left| \eta_0\left(\frac{t}{\varepsilon^{2r}}\right) \right| + \right.$$

$$+ 2c_0\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon} L c_0 \sup_{0 \le t \le 1/\varepsilon} \varepsilon^r \left| \eta_0\left(\frac{t}{\varepsilon^{2r}}\right) \right| +$$

$$\left. + \sup_{0 \le x \le 1/\varepsilon} \left| \sqrt{\varepsilon} \int_0^{x/\varepsilon} \sigma \frac{dU}{dy}(y_\varepsilon(t))\, dW_\varepsilon(t) \right| > R + 2c_0\sqrt{\varepsilon} \right\} \le$$

$$\leq P\left\{\sup_{0\leq x\leq 1}\left|\sqrt{\varepsilon}\int\limits_0^{x/\varepsilon}\sigma\frac{dU}{dy}\,dW_\varepsilon(t)\right| > R-\delta\right\} +$$

$$+ P\left\{\sup_{0\leq t\leq 1/\varepsilon}\varepsilon^r\left|\eta_0\left(\frac{t}{\varepsilon^{2r}}\right)\right|\left(\frac{k_1^2}{k_1^2}+Lc_0\right) > \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}\right\} \lneq$$

$$\leq 2\exp\left\{-\frac{(R-\delta)^2\sigma^2}{2c_0^2}\right\} + \left(1+\frac{1}{\varepsilon^{1+2r}}\right)\exp\left\{-\left[\frac{\delta}{\varepsilon^{r+1/2}}-4ebc\right]\frac{1}{8Hc}\right\}.$$

Отсюда при $\delta=\sqrt{\varepsilon}$ следует утверждение теоремы 1.

1. *Фрейдлин М. И.* Задача Дирихле для уравнения с периодическими коэффициентами, зависящими от малого параметра // Теория вероятностей и ее применение. – 1964. – **9**, вып. 1. – С. 133–139.
2. *Козлов С. М.* Усреднение случайных структур // Докл. АН СССР. – 1978. – **241**, № 5. – С. 1016–1019.
3. *Юринский В. В.* О погрешности усреднения многомерной диффузии // Теория вероятностей и ее применение. – 1988. – **33**, вып. 1. – С. 14–24.
4. *Жауров Ю. В.* Асимптотика флуктуаций в схеме усреднения для эллиптических уравнений со случайными коэффициентами // Теория случайных процессов. – 1983. – Вып. 11. – С. 31–38.
5. *Пожидаев А. В.* Скорость сходимости в принципе усреднения для эллиптических уравнений со случайными коэффициентами // Там же. – 1984. – Вып. 12. – С. 59–63.
6. *Пожидаев А. В., Юринский В. В.* О погрешности усреднения симметричных эллиптических систем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1989. – **53**, № 4. – С. 851–867.
7. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. Г.* Усреднение процессов в периодических средах. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
8. *Bensoussan H. C., Lions J. L., Papanicolaou G.* Asymptotic analysis for periodic structures. – North-Holland publ., 1978. – 700 p.
9. *Бондарев Б. В.* Об усреднении в периодических средах при слабо зависимых случайных воздействиях. I // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1991. – № 5. – С. 12–20.
10. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связные величины. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
11. *Сафонова О. А.* Об асимптотическом поведении интегральных функционалов от диффузионных процессов с периодическими коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 2. – С. 245–252.
12. *Чикин Д. О.* Функциональная предельная теорема для стационарных процессов. Мартингальный подход // Теория вероятностей и ее применение. – 1989. – **34**, вып. 4. – С. 731–741.
13. *Sam Lazaro J. de'Meyer P. A.* Questions de théorie des flots // Lect. Notes Math. – 1975. – **B465**. – P. 1–96.
14. *Protter P.* Semimartingales and measure preserving flows // Ann. Inst. H. Poincare. Sect. B. – 1986. – **22**, № 2. – P. 124–147.
15. *Мейер П. А.* Вероятность и потенциалы. – М.: Мир, 1973. – 324 с.
16. *Ширяев А. Н.* Вероятность. – М.: Наука, 1980. – 576 с.
17. *Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А. и др.* Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 447 с.
18. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 365 с.
19. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1966. – 351 с.
20. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциалбные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 353 с.

Получено 25.05.94