УДК 519.21

И. К. Мацак

Замечание о центральной предельной теореме в банаховом пространстве

Пусть X — сепарабельное банахово пространство, (Ω, A, P) — вероятностное пространство. Измеримое отображение $\xi : \Omega \to X$ будем называть случайным элементом (с. э.) [1] (гл. 2). Положим $S_n = \sum_1^n \xi_k$, $n=1, 2, \ldots;$

$(\xi_k)_1^\infty$ — последовательность независимых копий ξ. Говорят, что с. э. ξ удовлетворяет центральной предельной теореме (ЦПТ), если существует гауссовский с. э. Γ в X такой, что распределение $S_n/\sqrt{n}$ слабо сходится к распределению с. э. Γ в X.

Обозначим через ε симметричную случайную величину (с. в.) Бернулли, $P(\varepsilon = \pm 1) = 1/2$, γ — стандартная гауссовская с. в. в R^1, $M\gamma = 0$, $M\gamma^2 = 1$, $(\varepsilon_i)_1^\infty$ и $(\gamma_i)_1^\infty$ — независимые копии ε и γ соответственно, $(x_i)_1^\infty$ — неслучайная последовательность из X. Для с. в $\alpha_i \in R^1$ выражение $\sum_1^\infty \alpha_i x_i \in X$ почти наверное (п. н.) означает, что ряд $\sum_1^\infty \alpha_i x_i$ сходится в X п. н.

Теорема. *Пусть* $\xi = \sum_1^\infty \eta_i x_i \in X$ *п. н.,* $\Gamma' = \sum_1^\infty \gamma_i x_i \in X$ *п. н.,*

$$M \sup_{i \geqslant 1} |\eta_i|^2 = K < \infty, \tag{1}$$

где $(\eta_i)_1^\infty$ — *последовательность независимых с. в. в* R^1, $M\eta_i = 0$, $i \geqslant 1$. *Тогда с. э.* ξ *удовлетворяет ЦПТ.*

Следствие. *Пусть* $\xi = \sum_1^\infty \varepsilon_i x_i \in X$ *п. н.,* ξ *имеет гауссовский корреляционный оператор* [1, с. 260]. *Тогда с. э.* ξ *удовлетворяет ЦПТ.*

Приведенные утверждения усиливают теорему 1 работы [2]. В [2] имеются также ссылки на предшествующие работы.

При доказательстве теоремы нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $(a_k)_1^n$ — *неслучайная последовательность из* R^1, $\Phi(t)$ — *функция распределения с. в.* γ, $f = \gamma\left(n^{-1}\sum_1^n a_k^2\right)^{1/2}$, $q = n^{-1/2}\sum_1^n \varepsilon_k a_k$, $C_1 = 2(1 - \Phi(3))^{-1}$. *Тогда для любого* $t > 0$ $P(|q| > t) \leqslant C_1 P(\sqrt{2}|f| > t)$.

Доказательство леммы 1. Положим $y = t/\left(2n^{-1}\sum_1^n a_k^2\right)^{1/2}$. Для с. в. Бернулли хорошо известна экспоненциальная оценка [3, с. 70]:

$$P(|q| > t) \leqslant 2\exp(-y^2), \tag{2}$$

и неравенство $P(|\gamma| > t) \geqslant 2(\sqrt{2\pi}t^2)^{-1}\exp(-t^2/2)$, $t \geqslant 2$, [1, с. 255] позволяют вывести при $y \geqslant 3$ оценки

$$P(\sqrt{2}|f| > t) \geqslant 2(\sqrt{2\pi}y^2)^{-1}\exp(-y^2/2) \geqslant 2\exp(-y^2) \geqslant P(|q| > t).$$

При $0 \leqslant y < 3$ очевидно $C_1 P(\sqrt{2}|f| > t) \geqslant 1 \geqslant P(|q| > t)$, т. е. лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть* (η_{ki}), $k = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, N}$ — *совокупность симметричных н. с. в. в* R^1, *не зависящая от последовательности* $(\gamma_i)_1^\infty$, $Z_k = \sum_{i=1}^N \eta_{ki} x_i$, $Z = \sum_{i=1}^N \gamma_i \left(n^{-1}\sum_{k=1}^n \eta_{ki}^2\right)^{1/2} x_i$. *Тогда* $M\left\| n^{-1/2}\sum_{k=1}^n Z_k\right\|^2 \leqslant 4C_1^3 \times M\|Z\|^2$, *где* C_1 *определено в лемме* 1.

Доказательство леммы 2. Предположим, что $\eta_{ki} = \varepsilon_{ki} a_{ki}$, где (ε_{ki}) — двумерная совокупность независимых копий ε, (a_{ki}) — неслучайные величины из R^1, $i = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, n}$, $q_i = n^{-1/2}\sum_{k=1}^n \varepsilon_{ki} a_{ki}$, $f_i = \gamma_i\left(n^{-1}\sum_{k=1}^n a_{ki}^2\right)^{1/2}$. Из леммы 1 имеем $P(|q_i| > t) \leqslant C_1 P(\sqrt{2}|f_i| > t)$, $i = \overline{1, N}$, $t > 0$. Известно

[1, с. 245] (теорема 4.5), что тогда

$$M\left\| n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n} Z_k\right\|^2 = M\left\|\sum_{i=1}^{N} q_i x_i\right\|^2 \leqslant 4C_1^3 M\left\|\sum_{i=1}^{N} f_i x_i\right\|^2 = 4C_1^3 M\,\|Z\|^2.$$

Общий случай получаем отсюда стандартным образом на основании теоремы Фубини и представления симметричной с. в. η в виде $\eta = \varepsilon\overline{\eta}$, где ε и $\overline{\eta}$ независимы, η и $\overline{\eta}$ одинаково распределены [1, с. 209].

Доказательство теоремы. Рассмотрим сначала случай симметрично распределенного с. э. ξ. Пусть $\xi_k = \sum_{i=1}^{\infty}\eta_{ki}x_i,\ \ k\geqslant 1,$ — независимые копии ξ, $\xi_{km} = \sum_{i=1}^{m}\eta_{ki}x_i$, последовательность $(\gamma_i)_1^\infty$ не зависит от $(\xi_k)_1^\infty$. Применив лемму 2, получим

$$M\left\| n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \xi_{km})\right\|^2 \leqslant 4C_1^3 M\left\|\sum_{i>m}\gamma_i\left(n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\eta_{ki}^2\right)^{1/2} x_i\right\|^2. \qquad (3)$$

Сходимость ряда $\sum_{i\geqslant 1}\gamma_i\left(n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\eta_{ki}^2\right)^{1/2}x_i$ вытекает из сходимости ряда $\sum_{i\geqslant 1}\gamma_i x_i$ и условия (1) [1, с. 246]. Более того из неравенства Хофмана — Йоргенсена [1, с. 246] и условия (1) имеем

$$M\left\|\sum_{i>m}\gamma_i\left(n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\eta_{ki}^2\right)^{1/2}x_i\right\|^2 \leqslant 4M\sup_{i\geqslant 1}\left(n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\eta_{ki}^2\right)\times$$

$$\times M\left\|\sum_{i>m}\gamma_i x_i\right\|^2 \leqslant 4KM\left\|\sum_{i>m}\ {}_i x_i\right\|^2.$$

Известно [1] (гл. 5), что в условиях теоремы $\lim_{m\to\infty} M\left\|\sum_{i>m}\gamma_i x_i\right\|^2 = 0$. Отсюда с учетом неравенства (3)

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{n\geqslant 1} M\left\| n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \xi_{km})\right\|^2 = 0. \qquad (4)$$

Так как с. э. ξ_{1m} лежит в конечномерном пространстве и удовлетворяет ЦПТ, то в силу известного результата Пизье [4, с. 68] из (4) получаем, что и с. э. ξ удовлетворяет ЦПТ.

Пусть ξ — произвольный с. э., который удовлетворяет условиям теоремы, тогда и ξ^s удовлетворяет этим условиям, где $\xi^s = \xi - \xi'$ — симметризация ξ, ξ и ξ' независимы и одинаково распределены. Следовательно, [1, с. 255],

$$\sup_{n\geqslant 1} M\left\| n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \xi_{km})\right\|^2 \leqslant \sup_{n\geqslant 1} M\left\| n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k^s - \xi_{km}^s)\right\|^2 \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

и нам остается сослаться на упоминавшийся выше результат Пизье. Доказательство закончено.

1. *Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах.— М. : Наука, 1985.— 368 с.
2. *Мацак И. К., Пличко А. Н.* Центральная предельная теорема в пространстве Банаха // Укр. мат. журн.— 1988.— **40**, N 2.— С. 234—239.
3. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин.— М. : Наука, 1972.— 414 с.
4. *Marcus M. B., Pisier G.* Random fourier series with applications to harmonic analysis.— Princeton: Princeton univ. press, 1981.— 150 p.

Киев. ун-т — Получено 28.11.86