УДК 517.5

В. Т. Гаврилюк

О классах насыщения линейных методов суммирования рядов Фурье

Пусть X — одно из пространств C или L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 2π-периодических функций $f(x)$ соответственно непрерывных и суммируемых с p-й степенью, $\|f\|_C = \max|f(x)|$, $\|f\|_p = \left\{\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^p dx\right\}^{1/p}$, $1 \leqslant p < \infty$, $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}|f(x)|$, $p = \infty$, V — множество функций $g(x)$, имеющих ограниченную вариацию на каждом конечном отрезке. При этом $g(x) = [g(x+0) + g(x-0)]/2$, $g(x+2\pi) = g(x) + [g(2\pi) - g(0)]$, $\|g\|_V = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|dg(x)|$,

$$S[f] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikx}, \quad c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \tag{1}$$

— ряд Фурье функции $f \in X$,

$$S[dg] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(dg) e^{ikx}, \quad c_k(dg) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} d(g(x)), \tag{2}$$

— ряд Фурье — Стилтьеса функции $g \in V$.

Пусть, далее, $\psi(k)$, $k = 1, 2, \ldots$,— произвольная функция натурального аргумента. Если ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\psi(|k|)} c_k(f) e^{i(kx+\beta\pi/2 \operatorname{sign} k)} \quad \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' = \sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right) \tag{3}$$

является рядом Фурье некоторой периодической функции из пространства X, то эту функцию обозначим f_β^ψ и назовем (ψ, β)-производной функции f [1—4].

Обозначим через X_0^ψ одно из множеств

$$C_0^\psi L_\infty = \{f : f \in C,\ f_0^\psi \in L_\infty\},$$

$$S_0^\psi = \left\{f : f \in L,\ \frac{1}{\psi(|k|)} c_k(f) = c_k(dg),\ g \in V\right\},$$

$$L_0^\psi L_p = \{f : f \in L_p, f_0^\psi \in L_p\}.$$

Множество функций $f \in C_0^\psi L_\infty$, для которых $\|f_0^\psi\|_\infty \leqslant 1$, обозначим через $C_{0,\infty}^\psi$ [2, 3].

В дальнейшем нам понадобятся следующие определения и обозначения [1, 4—8].

Пусть $\mathscr{T}$ — множество рядов вида

$$y(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \tag{4}$$

и $\gamma(k)$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, — фиксированная числовая последовательность. Каждому $y \in \mathscr{T}$ поставим в соответствие элемент $z \in \mathscr{T}$ согласно формуле

$$z(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) c_k e^{ikx}. \tag{5}$$

Всякая последовательность $\{\gamma(k)\}$ задает оператор M_γ, действующий из $\mathscr{T}$ в $\mathscr{T}$. Этот оператор называют мультипликатором. Важный класс мультипликаторов составляют те, которые переводят ряд Фурье каждой функции пространства $Y_1 \subset X$ в ряд вида (5), являющийся рядом Фурье функций из пространства $Y_2 \subset X$. Множество таких мультипликаторов обозначим через M. Если y и z связаны соотношениями (4), (5) и ряды (4), (5) являются рядами Фурье соответственно функций y и z, $y \in Y_1$, $z \in Y_2$, то условимся писать $M_\gamma y(x) = z(x)$ и называть M_γ мультипликатором типа (Y_1, Y_2). В этом случае будем иметь

$$c_k(M_\gamma y) = \gamma(k) c_k(y) = c_k(z), \quad y \in Y_1, \quad z \in Y_2. \tag{6}$$

Оператор $M_\gamma \subset$ M является линейным и ограниченным [4, с. 266].

Аналогично определяется мультипликатор типа (V, V). Только в этом случае оператор M_γ действует из V в V таким образом, что интеграл Фурье—Стилтьеса $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(df) e^{ikx}$ функции $f \in V$ преобразуется в ряд Фурье — Стилтьеса $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) c_k(df) e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(dg) e^{ikx}$ функции $g \in V : M_\gamma f(x) = g(x)$. При этом

$$c_k(dM_\gamma f) = \gamma(k) c_k(df) = c_k(dg). \tag{7}$$

Через $\| M_\gamma \|_{[Y_1, Y_2]}$ будем обозначать норму M_γ как оператора из Y_1 в Y_2. Если $\gamma = \gamma^{(n)}$ зависит от параметра n, $n = 1, 2, \ldots$, и $\| M_{\gamma(n)} \|_{[Y_1, Y_2]} = O(1)$, где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по n, то такой мультипликатор будем называть равномерно ограниченным.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}_{k=0}^{n-1}$ — треугольная матрица чисел, порождающая линейный метод приближения $U(\Lambda)$, для которого средние ряда (1) образуются следующим образом:

$$U_n(f, x, \Lambda) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} \lambda_{|k|}^{(n)} c_k(f) e^{ikx}. \tag{8}$$

В дальнейшем $\lambda_0^{(n)} = 1$. Через $\| U_n \|$ будем обозначать нормы $U_n(\Lambda)$ как операторов из C в C; $f(n) = o(\varphi(n))$ означает, что $\lim_{n \to \infty} f(n)/\varphi(n) = 0$, $f(n) = O(\varphi(n))$ означает, что $|f(n)/\varphi(n)|$ остается ограниченным при $n \to \infty$.

Определение [1, 4, 8]. *Пусть X — одно из пространств C или L_p, $1 \leqslant p < \infty$, и $U_n(\Lambda)$ — линейный метод, для которого средние ряда* (1) *имеют вид* (8). *Если существует положительная функция $\varphi(n) \downarrow 0$ при $n \to \infty$ такая, что из соотношения $\| f(x) - U_n(f, x, \Lambda) \|_X = o(\varphi(n))$, $n \to \infty$, следует, что $f =$ const при $X = C$ и $f =$ const почти везде при $f \in L_p$ и существует хотя бы одна функция, отличная от постоянной (или отличная от постоянной почти везде при $X = L_p$) такая, что*

$$\| f(x) - U_n(f, x, \Lambda) \|_X = O(\varphi(n)), \tag{9}$$

то говорят, что метод $U_n(\Lambda)$ является насыщенным в пространстве X. Множество функций, удовлетворяющих условию (9), *называется классом насыщения метода $U_n(\Lambda)$, а функция $\varphi(n)$ — порядком насыщения.*

Класс насыщения метода $U(\Lambda)$ будем обозначать $F(X, \Lambda)$.

В работах [1, 4, 8] доказано, что если треугольная матрица чисел $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}_{k=0}^{n-1}$ такая, что существует положительная монотонно стремящаяся к нулю при $n \to \infty$ функция $\varphi(n)$ и числа $\psi(k) \neq 0$ такие, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 - \lambda_k^{(n)}}{\varphi(n)} = \frac{1}{\psi(k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

то для линейного метода $U_n(\Lambda)$, образованного с помощью такой матрицы, из выполнения соотношения

$$\| f - U_n(f, \Lambda) \|_X = o(\varphi(n)) \tag{11}$$

следует, что $f = \text{const}$ при $X = C$ и $f = \text{const}$ почти везде, если $X = L_p$.

Если же для $f \in X$ выполняется соотношение (9), то $f \in X_0^{\psi}$, т. е.

$$F(X, \Delta) \subset X_0^{\psi}. \tag{12}$$

Если элементы матрицы $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}_{k=0}^{n-1}$ таковы, что выполняется условие (10), последовательность

$$\gamma_{|k|}^{(n)} = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ \dfrac{1 - \lambda_{|k|}^{(n)}}{\varphi(n)} \psi(|k|), & k \neq 0 \end{cases}$$

порождает равномерно ограниченный мультипликатор, типа (L_∞, L_∞), если $f \in C$, типа (L_p, L_p), если $f \in L_p$, $1 < p < \infty$, и типа (V, V), если $f \in L$ и, кроме того, $\| U_n(\Lambda) \| = O(1)$, то в соотношении (12) имеет место знак равенства, т. е. в этом случае класс насыщения $F(X, \Lambda)$ метода $U_n(\Lambda)$ совпадает с X_0^{ψ}.

В настоящей работе рассматривается задача о насыщении линейных методов суммирования рядов Фурье с треугольными матрицами, удовлетворяющими условию (10) без предположения равномерной ограниченности $\| U_n(\Lambda) \|$. В этом случае справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если для элементов треугольной матрицы* $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}_{k=0}^{n-1}$, *с помощью которой образованы средние* (8), *выполняется условие* (10) *и функция* $\psi(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, *такова, что последовательность*

$$\gamma_{|k|}^{(n)} = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ \dfrac{1 - \lambda_{|k|}^{(n)}}{\varphi(n)} \psi^*(|k|), & k \neq 0 \quad (\psi^*(|k|) \leqslant \psi(|k|)) \end{cases} \tag{13}$$

порождает равномерно ограниченный мультипликатор $M_{\gamma(n)}$ *типа* (L_∞, L_∞), *если* $f \in C$, *типа* (L_p, L_p), *если* $f \in L_p$, $1 < p < \infty$, *и типа* (V, V), *если* $f \in L$, *то* $\forall f \in C_0^{\psi^*} L_\infty$ *справедливо соотношение*

$$\| f - U_n(f, \Lambda) \|_X = O(\varphi(n)), \tag{14}$$

т. е. $X_0^{\psi^*} \subseteq F(X, \Lambda) \subseteq X_0^{\psi}$.

Доказательство. Поскольку матрица Λ удовлетворяет условию (10), то метод $U_n(\Lambda)$ насыщен с порядком насыщения $\varphi(n)$ и классом насыщения $F(X, \Lambda) \subset X_0^{\psi}$ [1, 4, 8]. Покажем, что $X_0^{\psi^*} \subset F(X, \Lambda)$. Идея доказательства содержится в [4].

Тригонометрический полином $U_n(f, x, \Lambda)$ можно представить в виде свертки

$$U_n(f, x, \Lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t) \sum_{k=-n+1}^{n-1} \lambda_{|k|}^{(n)} e^{ikt} dt. \tag{15}$$

Пусть $f \in C_0^{\psi^*} L_\infty$. Это значит, что $\dfrac{1}{\psi^*(|k|)} c_k(f) = c_k(g)$, $g \in L_\infty$. По условию теоремы последовательность (13) порождает мультипликатор $M_{\gamma(n)}$ типа (L_∞, L_∞) такой, что $c_k[M_{\gamma(n)} g] = c_k(g_1)$, $g, g_1 \in L_\infty$.

При каждом фиксированном n имеем

$$c_k[f(x) - U_n(f, x, \Lambda)/\varphi(n)] = \frac{1 - \lambda_{(k)}^{(n)}}{\varphi(n)} \psi^*(|k|) \frac{c_k(f)}{\psi^*(|k|)} =$$

$$= \gamma_{|k|}^{(n)} c_k(g) = c_k[M_{\gamma(n)} g], \quad g \in L_\infty. \tag{16}$$

В силу единственности разложения суммируемой функции в ряд Фурье из (16) следует, что почти везде

$$[M_{\gamma(n)}g](x) = \frac{f(x) - U_n(f, x, \Lambda)}{\varphi(n)}. \tag{17}$$

Согласно условиям теоремы $M_{\gamma(n)}$ — равномерно ограниченный мультипликатор типа (L_∞, L_∞). Так как $(f(x) - U_n(f, x, \Lambda))/\varphi(n)$ является непрерывной функцией при каждом фиксированном n, то из (17) $\forall f \in C_0^{\psi^*} L_\infty$ следует

$$\left\| \frac{f - U_n(f, \Lambda)}{\varphi(n)} \right\|_C = \left\| \frac{f - U_n(f, \Lambda)}{\varphi(n)} \right\|_\infty = \| M_{\gamma(n)}g \|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant \| M_{\gamma(n)} \|_{[L_\infty, L_\infty]} \| \eta \|_\infty = O(\varphi(n)). \tag{18}$$

Отсюда $\forall f \in C_0^{\psi^*} L_\infty$

$$\| f - U_n(f, \Lambda) \|_C = O(\varphi(n)). \tag{19}$$

Это значит, что

$$C_0^{\psi^*} L_\infty \subset F(C, \Lambda). \tag{19'}$$

Пусть $f \in L_0^{\psi^*} L_p$, $1 < p < \infty$ $\left(\text{т. е. } \frac{1}{\psi^*(|k|)} c_k(f) = c_k(g),\ g \in L_p\right)$ и последовательность (13) порождает равномерно ограниченный мультипликатор $M_{\gamma(n)}$ типа (L_p, L_p). Тогда аналогично случаю $X = C$ имеем

$$\left\| \frac{f - U_n(f, x, \Lambda)}{\varphi(n)} \right\|_p \leqslant \| M_{\gamma(n)} \|_{[L_p, L_p]} \| g \|_p = O(1). \tag{20}$$

Это означает, что

$$L_0^{\psi^*} L_p \subset F(L_p, \Lambda). \tag{20'}$$

Пусть теперь $f \in S_0^{\psi^*}$, т. е. $\forall f \in S_0^{\psi^*}$ существует функция $g \in V$ такая, что

$$\frac{1}{\psi^*(|k|)} c_k(f) = c_k(dg) \tag{21}$$

и последовательность (13) в этом случае порождает равномерно ограниченный мультипликатор $M_{\gamma(n)}$ типа (V, V). При этом

$$c_k(dM_{\gamma(n)}g) = \gamma_{|k|}^{(n)} c_k(dg) = c_k d(g_1). \quad g,\ g_1 \in V. \tag{22}$$

Учитывая (21) и (22), имеем

$$c_k \left[d \int_{-\pi}^{t} \frac{f(x) - U_n(f, x, \Lambda)}{\varphi(n)} dx \right] = \frac{1 - \lambda_{|k|}^{(n)}}{\varphi(n)} c_k(f) =$$

$$= \frac{1 - \lambda_{|k|}^{(n)}}{\varphi(n)} \psi^*(|k|) \frac{1}{\psi^*(|k|)} c_k(f) = \gamma_{|k|}^{(n)} c_k(dg) = c_k [M_{\gamma(n)}g]. \tag{23}$$

В силу теоремы единственности разложения функции ограниченной вариации в ряд Фурье — Стилтьеса из (23) следует

$$\int_{-\pi}^{t} (f(x) - U_n(f, x, \Lambda)/\varphi(n)\, dx = [M_{\gamma(n)}g](t) + \text{const}.$$

Отсюда получаем

$$\left\| \frac{f - U_n(f, \Lambda)}{\varphi(n)} \right\|_1 = \| M_{\gamma(n)}g \|_V \leqslant \| M_{\gamma(n)} \|_{[V, V]} \| g \|_V. \tag{24}$$

Поскольку по условию $M_{\gamma(n)}$ — равномерно ограниченный мультипликатор, то из (24) $\forall f \in S_0^{\psi^*}$ следует

$$\| f - U_n(f, \Lambda) \|_1 = O(\varphi(n)) \Rightarrow f \in F(L, \Lambda^*). \tag{25}$$

Таким образом, из соотношений (12), (19) — (21) и (25) вытекает

$$X_0^{\psi^*} \subset F(X, \Lambda) \subset X_0^{\psi}. \tag{26}$$

Теорема 1 доказана.

Рассмотрим теперь линейный метод $U_n(\Lambda^*)$ суммирования рядов Фурье, являющийся аналогом метода Зигмунда [9], на примере которого увидим, что при выполнении для элементов матрицы $\Lambda^* = \{\lambda_k^{(n)}\}_{k=0}^{n-1}$ условия (10), но без предположения равномерной ограниченности $\| U_n(\Lambda^*) \|$, класс насыщения $F(C, \Lambda^*) \neq C_0^{\psi} L_\infty$.

Пусть

$$S[f] = a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f, x) \tag{27}$$

— ряд Фурье функции $f \in C$ и $\Lambda^* = \{\lambda_k^{(n)}\}_{k=0}^{n-1}$ — треугольная матрица чисел

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 1 - \psi(n)/\psi(k), & k = 1, \dots, n-1; \\ 0, & k \geqslant n, \end{cases} \tag{28}$$

где $\psi(k)$ — значения в точках $x = k$ непрерывной выпуклой вниз функции $\psi(x)$, $x \geqslant 1$, $\psi(x) \to 0$, $x \to \infty$. В этом случае линейные средние вида (15) ряда (27) будут представлять собой полиномы вида

$$U_n(f, x, \Lambda^*) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^{(n)} A_k(f, x). \tag{29}$$

В работе [10] с помощью функции $\mu(x) = x/(\eta(x) - x)$, $\eta(x) = \psi^{-1}\left[\frac{1}{2}\psi(x)\right]$ ($\psi^{-1}(\cdot)$ — обратная функция к функции $\psi(\cdot)$) из множества выпуклых вниз убывающих функций $\{\psi(x)\}$ выделены классы функций $\psi \in \mathfrak{M}_0$, если $0 < \mu(x) < K_1$; $\psi \in \mathfrak{M}_C$, если $K_2 \leqslant \mu(x) \leqslant K_3$, K_1, K_2, $K_3 = \mathrm{const}$, и $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, если $\mu(x)$ монотонно возрастает и неограничена сверху.

Учитывая эту терминологию, сформулируем следующую теорему.

Теорема 2. *Для каждой функции $f \in C_0^{\psi} L_\infty$, $\psi \in \mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}_\infty$, справедлива оценка*

$$\| f - U_n(f, \Lambda^*) \|_C = O(\varphi(n) \, | \ln[\min \mu(n), n] |), \; n > 1. \tag{30}$$

Доказательство. Пусть

$$\{\lambda_n(v)\} = \begin{cases} 1 - \psi(n)/\psi(1) \cdot nv, & 0 \leqslant v \leqslant 1/n; \\ 1 - \psi(n)/\psi(nv), & 1/n \leqslant v \leqslant 1; \\ 0, & v \geqslant 1 \end{cases}$$

— последовательность функций, заданных на $[0, 1]$, таких, что $\lambda_n(k/n) = \lambda_k^{(n)}$, где $\lambda_k^{(n)}$ — элементы матрицы Λ^*. Положим

$$\tau_n^*(v) = \tau_n^*(v, \Lambda^*) = \begin{cases} (1 - \lambda_n(v))\, \psi(1), & 0 \leqslant v \leqslant 1/n; \\ (1 - \lambda_n(v))\, \psi(nv), & 1/n \leqslant v \leqslant 1; \\ \psi(nv), & v \geqslant 1. \end{cases} \tag{31}$$

Если преобразование Фурье $\hat{\tau}_n^*(t)$ непрерывной функции $\tau_n^*(v)$ суммируемо на всей числовой оси, то согласно теореме 1 из работы [3] для каждой функции $f \in C_0^{\psi} L_\infty$ уклонение $\rho_n(f, x, \Lambda^*) = f(x) - U_n(f, x, \Lambda^*)$ можно представить в виде

$$\rho_n(f, x, \Lambda^*) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_0^{\psi}\left(x + \frac{t}{n}\right) \hat{\tau}_n^*(t)\, dt. \tag{32}$$

Чтобы можно было воспользоваться этим представлением, покажем, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\hat{\tau}_n^*(t)|\, dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \int\limits_0^{\infty} \tau_n^*(v) \cos vt dv \right| dt = O(1). \tag{33}$$

Для этого достаточно показать, что

$$J = \int\limits_0^{\infty} |\hat{\tau}_n^*(t)|\, dt = O(1). \tag{34}$$

С учетом (31) имеем

$$I = \int\limits_0^{\infty} \left| n\psi(n) \int\limits_0^{1/n} v \cos vt dv + \psi(n) \int\limits_{1/n}^{1} \cos vt dv + \int\limits_1^{\infty} \psi(nv) \cos vt dv \right| dt =$$

$$= \int\limits_0^{\infty} \left| -\frac{2n\psi(n)\sin^2 \frac{t}{2n}}{t^2} + \frac{\psi(n)\sin t}{t} + \int\limits_1^{\infty} \psi(nv) \cos vt dv \right| dt. \tag{35}$$

Оценим интеграл

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{2n \sin^2 \frac{t}{2n}}{t^2} dt = \int\limits_0^{n} \frac{2n \sin^2 \frac{t}{2n}}{t^2} dt + \int\limits_n^{\infty} \frac{2n \sin^2 \frac{t}{2n}}{t^2} dt \leqslant \int\limits_0^{n} \frac{dt}{2n} + \int\limits_1^{\infty} \frac{dt}{t^2} \leqslant \frac{3}{2}\,. \tag{36}$$

Отсюда и из (35) следует

$$I \leqslant \frac{3}{2}\psi(n) + \int\limits_0^{\infty} \left| \psi(n) \frac{\sin t}{t} + \int\limits_1^{\infty} \psi(nv) \cos vt dv \right| dt = \frac{3}{2}\psi(n) + \left(\int\limits_0^{\mu(n)} + \int\limits_{\mu(n)}^{\infty} \right) \Bigg| \times$$

$$\times \frac{\psi(n)\sin t}{t} + \int\limits_1^{\infty} \psi(nv) \cos vt dv \Bigg| dt. \tag{37}$$

Далее имеем

$$I \leqslant 5{,}5\psi(n) + \psi(n) \int\limits_{\pi/2}^{\mu(n)} \frac{|\sin t|}{t} dt + \int\limits_0^{\mu(n)} \left| \int\limits_1^{\infty} \psi(nv) \cos vt dv \right| dt +$$

$$+ \int\limits_{\mu(n)}^{\infty} \left| \frac{n}{t} \int\limits_1^{\infty} \psi'(nv) \sin vt dv \right| dt. \tag{38}$$

В работе [3] доказано, что если $\psi \in \mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}_\infty$, то

$$\int\limits_0^{\mu(n)} \left| \int\limits_1^{\infty} \psi(nv) \cos vt dv \right| dt = A_1 \psi(n), \quad A_1 = \text{const}, \tag{39}$$

$$\int\limits_{\mu(n)}^{\infty} \left| \frac{n}{t} \int\limits_1^{\infty} \psi'(nv) \sin vt dv \right| dt \leqslant A_2 \psi(n), \quad A_2 = \text{const}. \tag{40}$$

Из соотношений (35)—(40) следует справедливость (34), а следовательно, и справедливость представления (32). Используя (32), покажем, что для каждой $f \in C_0^{\psi} L_\infty$ справедливо соотношение

$$|\rho_n(f, x, \Lambda^*)| = \frac{\psi(n)}{\pi} \int\limits_{0 \leqslant |t| \leqslant \min(\mu(n), n)} \left| f_0^{\psi}\left(x + \frac{t}{n}\right) \frac{\sin t}{t} dt \right| + O(\psi(n)). \tag{41}$$

Сначала покажем, что

$$|\rho_n(f, x, \Lambda^*)| = \frac{\psi(n)}{\pi} \left| \int\limits_{0 \leqslant |t| \leqslant \mu(n)} f_0^{\psi}\left(x + \frac{t}{n}\right) \frac{\sin t}{t} dt \right| + O(\psi(n)). \tag{42}$$

В силу (32), (35) и (36), (39) и (40) имеем

$$|\rho_n(f,x,\Lambda^*)|\frac{1}{\pi}\left|\left(\int\limits_{0\leqslant|t|\leqslant\mu(n)}+\int\limits_{|t|\geqslant\mu(n)}\right)f_0^{\psi}\left(x+\frac{t}{n}\right)\hat{\tau}_n^*(t)\,dt\right|=$$

$$=\frac{\psi(n)}{\pi}\left|\int\limits_{0\leqslant|t|\leqslant\mu(n)}f_0^{\psi}\left(x+\frac{t}{n}\right)\left[\frac{\sin t}{t}+\int\limits_1^{\infty}\psi(nv)\cos vtdv\right]dt\right|+$$

$$+\left|\int\limits_{|t|\geqslant\mu(n)}f_0^{\psi}\left(x+\frac{t}{n}\right)\frac{n}{t}\int\limits_1^{\infty}\psi'(nv)\cos vtdvdt\right|+O(\psi(n))=$$

$$=\frac{\psi(n)}{\pi}\left|\int\limits_{0\leqslant|t|\leqslant\mu(n)}f_0^{\psi}\left(x+\frac{t}{n}\right)\frac{\sin t}{t}\,dt\right|+O(\psi(n)). \qquad (43)$$

Если $\mu(n)\geqslant n\pi$, то из леммы 5 работы [3] следует

$$\left|\int\limits_{n\pi\leqslant|t|\leqslant\mu(n)}f_0^{\psi}\left(x+\frac{t}{n}\right)\frac{\sin t}{t}\,dt\right|=O(1).$$

Поэтому с учетом того соотношения из (43) следует

$$|\rho_n(f,x,\Lambda^*)|=\frac{\psi(n)}{\pi}\left|\int\limits_{0\leqslant|t|\leqslant n\pi}f_0^{\psi}\left(x+\frac{t}{n}\right)\frac{\sin t}{t}\,dt\right|+O(\psi(n))=$$

$$=\frac{\psi(n)}{\pi}\left|\int\limits_{\frac{2\pi}{n}}^{\pi}f_0^{\psi}(x+t)\,\frac{\sin nt}{t}\,dt\right|+O(\psi(n))=O(\psi(n)\ln n). \qquad (44)$$

В случае $\mu(n)\leqslant n\pi$ из соотношения (43) получаем

$$|\rho_n(f,x,\Lambda^*)|=O(\psi(n)\ln\mu(n)). \qquad (45)$$

Если через $f_n(x)$ обозначить функцию из класса $C_0^{\psi}L_{\infty}$, производная $f_{n0}^{\psi}(x)$ которой на $[2\pi/n,\pi]$ совпадает с функцией $\operatorname{sign}\sin nt$, то получим [3, с. 126]

$$|\rho_n(f_n,0,\Lambda^*)|=\frac{4\psi(n)}{\pi^2}\,|\ln\min(\mu(n),n)|+O(\psi(n)). \qquad (46)$$

Из соотношений (44)—(46) следует справедливость (30). Теорема 2 доказана.

Элементы матрицы Λ^* удовлетворяют условию (10). Поэтому метод $U_n(\Lambda^*)$ насыщен с порядком насыщения $\psi(n)$ и классом насыщения $F(C,\Lambda^*)\subset C_0^{\psi}L_{\infty}$. Если $\psi\in\in\mathfrak{M}_0\supset\mathfrak{M}_C$, то, как показано в [11], $F(C,\Lambda^*)=C_0^{\psi}L_{\infty}$. В случае $\psi\in\mathfrak{M}_{\infty}$ из теоремы 2 следует, что $F(C,\Lambda^*)\neq C_0^{\psi}L_{\infty}$. Справедливо следующее утверждение.

Пусть $\psi\in\mathfrak{M}_{\infty}$, с помощью которой определена треугольная матрица (28), *тем самым и линейный метод $U_n(\Lambda^*)$.*

Пусть $\psi^*\in\mathfrak{M}_{\infty}$ такая, что

$$\psi^*(n)\ln(n+1)=K\psi(n),\quad \psi^*/\psi\in\mathfrak{M}_0, \qquad (47)$$

где $K=K(\psi,\psi^*)$ — постоянная, не зависящая от n. Тогда

$$C_0^{\psi^*}L_{\infty}\subset F(C,\Lambda^*)\subset C_0^{\psi}L_{\infty}. \qquad (48)$$

Действительно, в силу (28) имеем

$$|f(x)-U_n(f,x;\Lambda^*)|=\left|f(x)-\frac{a_0}{2}-\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{\psi(n)}{\psi(k)}\right)A_k(f,x)\right|=$$

$$=|-\psi(n)[f_0^{\psi}(x)-S_{n-1}(f_0^{\psi}(x))]+[f(x)-S_{n-1}(f,x)]+\psi(n)f_0^{\psi}(x)|, \qquad (49)$$

где $S_{n-1}(\varphi,x)$ — частичная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье (29) функции φ.

Поскольку $f\in C_0^{\psi^*}L_{\infty}$, то $f_0^{\psi}\in C_0^{\psi^*/\psi}L_{\infty}$ и $\psi^*/\psi\in\mathfrak{M}_0$ и (см. [12, 13])

$$\psi(n)\,|f_0^{\psi}-S_{n-1}(f_0^{\psi})|\leqslant C_1(f)\left[\psi(n)\,\frac{\psi^*(n)}{\psi(n)}\ln n+\psi(n)\right],$$

$$|f-S_{n-1}(f)|\leqslant C_2(f)\,\psi^*(n)\ln n. \qquad (50)$$

Из соотношений (49) и (50) следует $|f - U_n(f, \Lambda^*)| \leqslant C(f)[\psi^*(n)\ln n + \psi(n)]$. Отсюда в силу (47) $\forall f \in C_0^{\psi^*}L_\infty$ имеем $|f - U_n(f, \Lambda^*)| \leqslant C(f)\psi(n)$. А это и означает справедливость соотношения (48).

1. *Sunouchi G*. Characterisation of certain classes of functions // Tohoku Math. J.— 1962.— **14**, N 1.— P. 127—134.
2. *Степанец А. И*. Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье // Докл. АН СССР.— 1984.— **277**, № 5.— С. 1074—1077..
3. *Степанец А. И*. Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1986.— **50**, № 1.— С. 101—136.
4. *Butzer P., Nessel R*. Fourir analysis and approximation.— Basel; Stuttgart : Bizkhäser Verlag, 1971.— V. 1.— 554 p.
5. *Зигмунд А*. Тригонометрические ряды: В 2-х т.— М. : Мир, 1965.— Т. 1.— 616 с.
6. *Степанец А. И*. Скорость сходимости рядов Фурье в пространстве L^ψ.— Киев, 1986.— 56 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.66).
7. *Favard J*. Sur la saturation des prosedes de sommation // J. Math. pures et appl.— 1957.— **36**, N 4.— P. 359—372.
8. *Харшиладзе Ф. И*. Классы насыщения для некоторых процессов суммирования // Докл. АН СССР.— 1957.— **122**, № 3.— С. 352—355.
9. *Zygmund A*. The approximation of functions by typical means of their Fourier series // Duke Math. J.— 1945.— **12**, N 4.— P. 695—704.
10. *Степанец А. И*. Модули полураспада монотонных функций и скорость сходимости рядов Фурье // Укр. мат. журн.— 1986.— **38**, № 5.— С. 618—624.
11. *Гаврилюк В. Т*. О характеристике класса насыщения $C_0^\psi L_\infty$ // Там же.— № 4.— С. 421—427.
12. *Степанец А. И*. Приближение суммами Фурье функций с медленно убывающими коэффициентами Фурье // Там же.— № 6.— С. 755—762.
13. *Степанец А. И*. Классификация и приближение периодических функций.— Киев : Наук. думка, 1987.— 268 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев
Получено 03.04.87