УДК 517.53

В. В. Маймескул

О J-свойстве жордановых дуг

Пусть L — конечная жорданова дуга комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus L$, $\Omega' = \{|w| > 1\}$, $\Psi(w)$ — функция, конформно и однолистно отображающая Ω' на Ω, нормированная условиями $\Psi(\infty) = \infty$, $\Psi'(\infty) > 0$. Через $\tilde{\Omega}$ обозначим компактификацию области Ω простыми концами по Каратеодори. Как известно, Ψ допускает продолжение до гомеоморфизма между $\overline{\Omega'}$ и $\tilde{\Omega}$. Сохраним за указанным продолжением прежнее обозначение. Через Φ обозначим обратное к Ψ отображение.

Следуя [1], будем говорить, что L является J-дугой, $L \in J$, если для любой непрерывной на L функции f существует последовательность полиномов $\{P_n\}_1^\infty$, $\deg P_n \leqslant n$ таких, что при $z \in L$

$$|f(z) - P_n(z)| \preccurlyeq \psi_f\left(\frac{1}{n}\right), \tag{1}$$

где через ω_f обозначен модуль непрерывности f на L. (Для $A > 0$, $B > 0$ символ $A \preccurlyeq B$ означает, что $A \leqslant CB$, где $C = \mathrm{const} > 0$ не зависит от A и B).

Другими словами, J-дуга — это дуга, для которой справедлива классическая теорема Джексона.

Ньюмен [1] показал, что необходимым условием для $L \in J$ является спрямляемость L, достаточным — принадлежность ее классу $C^{1+\delta}$ при некотором $\delta > 0$. Андерсен [2] предложил искать описание класса J в терминах модуля непрерывности ω функции Ψ на единичной окружности и установил, что необходимым условием для $L \in J$ является $\omega(t) = O(t^{1-\varepsilon})$ $\forall \varepsilon > 0$. Лесли [3] усилил этот результат, получив оценку $\omega(t) = O\left(t \log^3 \frac{1}{t}\right)$, которую уточнил Мамедханов [4]: $\omega(t) = O\left(t \log \frac{1}{t}\right)$.

Результатом данной статьи является следующая теорема.

Теорема. *Пусть $L \in J$. Тогда $\omega(t) = O(t)$.*

Доказательство. Используя предложенный в [5, с. 55] метод, продолжим произвольную вещественнозначную функцию $f \in H^\alpha(L)$, $1/2 < \alpha < 1$, во всю комплексную плоскость. Пусть P_n, $n = 1, 2, \ldots,$ — полиномы, аппроксимирующие f на L, для которых справедлива оценка (1), $\eta(t)$ — произвольная функция со следующими свойствами: $\eta(t) \in C^\infty_{(0,\infty)}$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, $\eta(t) = 1$ при $t \leqslant 1$, $\eta(t) = 0$ при $t \geqslant 2$. Для $z \in \Omega$, $2^{-n} \leqslant |\Phi(z)| - 1 \leqslant 2^{-n+1}$ указанное продолжение определим по формуле

$$f(z) = P_{2^n}(z) + \eta[2^n(|\Phi(z)| - 1)](P_{2^{n+1}}(z) - P_{2^n}(z)), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Положим также $f(z) = P_2(z)\,\eta[|\Phi(z)| - 1]$ при $|\Phi(z)| > 2$. Определенная таким образом функция $f(z)$ является бесконечно дифференцируемой в Ω и непрерывной в $\mathbb{C}$. Функция $F(w) = (f \circ \Psi)(w)$ определена и непрерывна в $\overline{\Omega'}$, бесконечно дифференцируема в Ω', причем $F(w) = 0$ при $|w| \geqslant 3$. Из

(1) и известной леммы Бернштейна [6, с. 26] после несложных выкладок получим следующую оценку на формальную производную $F_{\overline{w}}$ при $2^{-n} \leqslant \leqslant |w| - 1 \leqslant 2^{-n+1}$:

$$|F_{\overline{w}}(w)| \leqslant 2^n |P_{2^{n+1}}[\Psi(w)] - P_{2^n}[\Psi(w)]| \leqslant 2^{n(1-\alpha)}.$$

Следовательно, всюду в Ω'

$$|F_{\overline{w}}(w)| \leqslant (|w| - 1)^{\alpha - 1}. \tag{2}$$

Рассмотрим функцию

$$g(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Omega'} F_{\overline{w}}(w) \frac{d\sigma_w}{w - \zeta}. \tag{3}$$

В силу известных свойств таких интегралов (см., например, [7, с. 54] заключаем, что $g(\zeta)$ непрерывна в $\mathbb{C}$, аналитична при $|\zeta| < 1$ и $|\zeta| > 3$ $g(\infty) = 0$.

При $|\zeta| = \rho < 1$

$$g'(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Omega'} F_{\overline{w}}(w) \frac{d\sigma_w}{(w - \zeta)^2},$$

$$|g'(\zeta)| \leqslant \int\limits_1^3 (r-1)^{\alpha-1} \left(\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|re^{i\varphi} - \zeta|^2} \right) dr \leqslant \int\limits_1^3 \frac{(r-1)^{\alpha-1}}{r - \rho} dr \leqslant (1-\rho)^{\alpha-1}.$$

По известной теореме Харди—Литлвуда $g(\zeta) \in H^\alpha(\overline{E})$, $E = \{|\zeta| < 1\}$.

Применяя формулу Грина, имеем при $\zeta \in E$

$$g(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|W|=1} \frac{F(w)}{w - \xi} dw. \tag{4}$$

Положим при $\zeta \in \Omega'$

$$G(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=1} \frac{F(w)}{w - \zeta} dw.$$

Поскольку функция $F(w)$ вещественнозначна, справедливы следующие преобразования ($\mu = 1/\zeta$):

$$G(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \overline{\int\limits_{|w|=1} \frac{F(w)\, d\overline{w}}{\overline{w} - \overline{\zeta}}} = \frac{1}{2\pi i} \overline{\int\limits_{|w|=1} \frac{F(w)\, d\overline{w}}{\overline{w}\, \overline{\zeta} \left(\frac{1}{\overline{\zeta}} - \frac{1}{\overline{w}} \right)}} =$$

$$= \frac{\mu}{2\pi i} \overline{\int\limits_{|w|=1} \frac{F(w)\, w d\overline{w}}{\overline{\mu} - w}} = -\frac{\mu}{2\pi i} \overline{\int\limits_{|w|=1} \frac{F(w)\, dw}{w(\overline{\mu} - w)}} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \overline{\int\limits_{|w|=1} \frac{F(w)\, dw}{w}} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=1} \frac{\overline{F(w)\, dw}}{\overline{\mu} - w} = \overline{g(0)} - \overline{g(\overline{\mu})}.$$

Поэтому функция $G(\zeta)$, являясь аналитической в Ω', непрерывно продолжима в $\overline{\Omega}'$, причем $G(\zeta) \in H^\alpha(\overline{\Omega}')$. По формуле Сохоцкого—Племеля при $|\zeta| = 1$ $F(\zeta) = g(\zeta) - G(\zeta)$ и, следовательно, $F(\zeta) \in H^\alpha$ на единичной окружности. В силу произвольности f заключаем, что $\Psi(w) \in \in \mathrm{Lip}\ 1$ на единичной окружности. Действительно, в противном случае существуют последовательности точек $\{w_n\}_0^\infty$, $\{\tau_n\}_0^\infty$, лежащие на единичной окружности, такие, что $|\Psi(w_n) - \Psi(\tau_n)| > 9^n |w_n - \tau_n|$. Пусть $z_n = \Psi(w_n)$,

$\zeta_n = \Psi(\tau_n)$. Положим

$$f_0(z) = |z - z_0|^\alpha,$$

$$f_n(z) = \begin{cases} 3^{-n}|z - z_n|^\alpha, \text{ если } \sum\limits_{m=0}^{n-1} [f_m(\zeta_n) - f_m(z_n)] \geqslant 0; \\ 3^{-n}|z - \zeta_n|^\alpha \text{ — в противном случае,} \end{cases}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z).$$

Функция $f(z) \in H^\alpha(K)$ на любом компакте $K \subset \mathbb{C}$. Однако

$$|(f \circ \Psi)(\tau_n) - (f \circ \Psi)(w_n)| = |f(\zeta_n) - f(z_n)| = \Big|\sum_{m=0}^{n-1} [f_m(\zeta_n) - f_m(z_n)] +$$

$$+ f_n(\zeta_n) - f_n(z_n) + \sum_{m=n+1}^{\infty} [f_m(\zeta_n) - f_m(z_n)]\Big| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2 \cdot 3^n} |\zeta_n - z_n|^\alpha > M_n |w_n - \tau_n|^\alpha,$$

причем в случае $\alpha > 1/2$ $M_n \to \infty$ при $n \to \infty$, т. е. $(f \circ \Psi)(w) \notin H^\alpha$ на единичной окружности. Теорема доказана.

В [4] анонсировано без доказательства обратное утверждение. Таким образом, доказанная теорема вместе с результатом из [4] дает критерий принадлежности жордановых дуг классу J.

1. *Newman D. J.* Jackson's theorem on complex arcs // J. Approxim. Theory.— 1974.— 10, N 3.— P. 206—217.
2. *Andersson J. E.* On the degree of polinomial and rational approximation of holomorphic penctions.— Ph. D. Dissertation, Univ. Göteborg, 1975.
3. *Lesley F. D.* Best approximation on smooth arcs // J. Approxim. Theory.— 1976.— 18, N 4.— P. 378—382.
4. *Мамедханов Дж. И.* Вопросы наилучшей полиномиальной аппроксимации в комплексной плоскости // Теория функций и приближений: Тр. Сарат. зим. шк.— Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1983.— С. 149—156.
5. *Дынькин Е. М.* Конструктивная характеристика классов С. Л. Соболева и О. В. Бесова // Тр. Мат. ин-та им. Стеклова.— 1980.— С. 41—76.
6. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного.— М. : Наука, 1964.— 438 с.
7. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции.— М. : Физматгиз, 1959.— 628 с.

Ин-т прикл. математики и механики
АН УССР, Донецк

Получено 08.07.86