УДК 519.21

А. Б. Харазишвили

О борелевских мерах в пространстве R^{α}

Пусть R — вещественная прямая, I — произвольное множество индексов, R^I — топологическое векторное пространство (относительно обычных структур произведения), образованное всевозможными отображениями из I в R. Если card $(I) = \alpha$, то очевидно, что пространство R^{α} можно отождествить с пространством R^I. В дальнейшем будем предполагать, что $\alpha \geqslant \omega$, где ω — первое бесконечное кардинальное число, и рассмотрим некоторые вопросы, связанные с существованием в пространстве R^{α} различных борелевских мер, инвариантных (соответственно, квазиинвариантных) относительно всюду плотных подгрупп этого пространства. Символом R^I, как обычно, будем обозначать векторное подпространство в R^I, образованное всевозможными финитными отображениями из I в R. Ясно, что множество R^I всюду плотно в пространстве R^I.

Хорошо известно, что на пространстве R^{ω} нельзя задать вероятностную борелевскую меру, квазиинвариантную по отношению ко всей аддитивной группе R^{ω} (см., например, [1, 2]). Отсюда непосредственно вытекает, что и для $\alpha > \omega$ на пространстве R^{α} нельзя задать вероятностную борелевскую меру, квазиинвариантную по отношению к аддитивной группе R^{α}. Более точный результат содержится в следующем утверждении.

Предложение 1. *Пусть S — цилиндрическая σ-алгебра множеств в пространстве R^I, порожденная семейством проекций pr_i, $i \in I$,* и пусть $G = \{x \in R^I : \text{card}(\{i \in I : pr_i(x) \neq 0\}) \leqslant \omega\}$. *Тогда на σ-алгебре S не существует вероятностной меры, квазиинвариантной относительно векторного пространства G.*

С другой стороны, для топологического векторного пространства R^{ω} легко строятся вероятностные борелевские меры, квазиинвариантные относительно некоторых всюду плотных векторных подпространств в R^{ω} (например, относительно аддитивной группы $R^{(\omega)}$). Более того, как показано в работе [3], на борелевской σ-алгебре пространства $R^{(\omega)}$ существует ненулевая σ-конечная мера μ, инвариантная относительно группы $R^{(\omega)}$. Меру μ можно строить таким образом, чтобы она оказалась сосредоточенной на любом из сепарабельных банаховых пространств l^p, $1 \leqslant p < +\infty$, и давала бы в любом из этих пространств соответствующую ненулевую σ-конечную борелевскую меру, инвариантную относительно всюду плотной группы $R^{(\omega)}$. Отметим также, что для банахова пространства l^∞ не существует ненулевой σ-конечной борелевской меры, инвариантной относительно какой-либо всюду плотной подгруппы аддитивной группы l^∞. Причиной этого является несепарабельность пространства l^∞. Можно сформулировать и более сильный результат. Действительно, справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть $(B_n)_{n\in N}$ — произвольное счетное семейство шаров в пространстве l^∞, являющееся покрытием этого пространства, и Γ — произвольная всюду плотная подгруппа аддитивной группы l^∞. Тогда на l^∞ не существует ненулевой σ-конечной Γ-квазиинвариантной меры, в области определения которой содержатся все шары B_n, $n \in N$. С другой стороны, каково бы ни было сепарабельное банахово пространство, в нем существует вероятностная борелевская мера, квазиинвариантная относительно всюду плотного векторного подпространства.*

Возвращаясь к упомянутой выше мере μ, заметим, что она обладает свойством метрической транзитивности (свойством исчерпывания), но в отличие от классической лебеговской меры на евклидовом пространстве R^n не обладает свойством единственности. Далее, ясно, что мера μ не может быть локально ограниченной (в частности, радоновой), поскольку на каждом непустом открытом подмножестве пространства R^ω она принимает бесконечное значение. Что же касается значений этой меры на компактных подмножествах из R^ω, то справедливо следующее общее утверждение.

Предложение 3. *Пусть λ — произвольная ненулевая σ-конечная борелевская мера в пространстве R^ω, инвариантная относительно аддитивной группы $R^{(\omega)}$. Тогда найдется компактное множество $K \subset R^n$, для которого $\lambda(K) = +\infty$. В частности, мера λ не является локально ограниченной.*

Очевидно, что в формулировке предложения 3 множество K можно считать совпадающим с некоторым счетным произведением сегментов, взятых на вещественной прямой R.

Перейдем к рассмотрению топологического векторного пространства R^I, где card $(I) = \alpha > \omega$. В этом пространстве особо выделяются две канонические σ-алгебры множеств: борелевская σ-алгебра и цилиндрическая σ-алгебра, порожденная семейством проекций pr_i, $i \in I$. Эти σ-алгебры существенно отличаются одна от другой: борелевская σ-алгебра всегда строго содержит в себе цилиндрическую. Естественно возникает вопрос о возможности построения ненулевых σ-конечных квазиинвариантных (соответственно, инвариантных) мер на этих σ-алгебрах. В работе [4] доказано, что на борелевской σ-алгебре пространства R^α существует вероятностная мера ν, квазиинвариантная относительно аддитивной группы $R^{(\alpha)}$. При доказательстве этого факта используется некоторое вложение пространства R^α в компактную коммутативную группу T^α, где T — группа всех собственных вращений евклидовой плоскости R^2 вокруг ее начала координат. При указанном вложении образом пространства R^α служит некоторое неизмеримое массивное подмножество группы T^α, причем неизмеримость и массивность подразумеваются относительно обычной вероятностной меры Хаара в T^α. Если пространство R^α отождествить с его образом, то можно утверждать, что мера ν представляет собой след меры Хаара на множестве R^α.

Неизвестно, существует ли на борелевской σ-алгебре топологического векторного пространства R^α, $\alpha > \omega$, ненулевая σ-конечная мера, инвариантная по отношению к аддитивной группе $R^{(\alpha)}$. В то же время легко доказывается, что при $\alpha > \omega$ на цилиндрической σ-алгебре пространства R^α нельзя определить какую-либо меру, инвариантную относительно группы $R^{(\alpha)}$ и принимающую хотя бы одно строго положительное конечное значение. С другой стороны, на этой же цилиндрической σ-алгебре существует вероятностная мера, квазиинвариантная относительно группы $R^{(\alpha)}$.

Такой мерой, например, является сужение указанной выше меры ν на цилиндрическую σ-алгебру пространства R^α.

Если отбросить требование σ-конечности рассматриваемых мер, то доказательство существования инвариантных (соответственно, квазиинвариантных) мер, определенных на цилиндрической или борелевской σ-алгебре пространства R^α, не будет представлять значительных трудностей. Действительно, стандартная конструкция произведения мер непосредственно приводит к некоторой не σ-конечной мере в пространстве R^α, инвариантной относительно всей аддитивной группы R^α. Больший интерес представляет вопрос о существовании в пространстве R^α инвариантных борелевских мер, удовлетворяющих так называемому свойству Суслина (или условию счетных цепей). Напомним, что данная мера λ называется мерой, удовлетворяющей свойству Суслина, если всякое дизъюнктное семейство, состоящее из λ-измеримых множеств со строго положительными мерами, не более чем счетно. Очевидно, что каждая σ-конечная мера является мерой, удовлетворяющей свойству Суслина, а обратное утверждение, конечно, не верно. Заметим, что класс всех мер, удовлетворяющих свойству Суслина, замкнут относительно операции перехода к гомоморфным образам, в то время как класс всех σ-конечных мер не замкнут относительно этой операции; другими словами, гомоморфный образ меры, удовлетворяющий свойству Суслина, также удовлетворяет свойству Суслина, а гомоморфный образ σ-конечной меры, вообще говоря, не является σ-конечной мерой.

В связи с изложенным выше отметим, что справедливо следующее утверждение.

Предложение 4. *На борелевской σ-алгебре пространства R^α существует ненулевая мера δ, удовлетворяющая свойству Суслина и инвариантная относительно аддитивной группы R^α. Для любого борелевского множества $B \subset R^\alpha$ значение $\delta(B)$ меры δ на этом множестве задается с помощью формулы*

$$\delta(B) = \begin{cases} 0, & \text{если } B \text{ — множество первой категории}, \\ +\infty, & \text{если } B \text{ — множество второй категории}. \end{cases}$$

Для того чтобы проверить корректность определения меры δ, достаточно убедиться в выполнении следующих двух соотношений:

1) каждое непустое открытое подмножество в R^α не является множеством первой категории (т. е. является множеством второй категории);

2) топологическое пространство R^α удовлетворяет топологическому свойству Суслина (т. е. всякое дизъюнктное семейство, состоящее из непустых открытых подмножеств в R^α, не более чем счетно).

В соотношении 1 утверждается, что топологическое пространство R^α является бэровским пространством. Это действительно так, поскольку вещественная прямая R представляет собой пример полного по Чеху топологического пространства, а любое произведение полных по Чеху топологических пространств является бэровским пространством. Соотношение 2 легко вытекает из следующего общего факта: всякое произведение сепарабельных топологических пространств удовлетворяет топологическому свойству Суслина.

Выше мы рассматривали инвариантные (соответственно, квазиинвариантные) меры, задаваемые в коммутативных топологических группах. Отметим, что, исходя из теоремы существования вероятностной меры Хаара на любой некоммутативной компактной топологической группе, с помощью конструкции произведения мер можно строить различные некоммутативные не локально компактные (и даже несепарабельные) топологические группы, для которых существуют ненулевые σ-конечные борелевские меры, инвариантные (квазиинвариантные) относительно некоторых связных всюду плотных подгрупп этих групп.

1 *Скороход А. В.* Интегрирование в гильбертовом пространстве.— М. : Наука, 1975.— 232 с.

2. *Харазишвили А. Б.* Топологические аспекты теории меры.— Киев : Наук . думка, 1984.— 120 с.
3. *Харазишвили А. Б.* Об инвариантных мерах в гильбертовом пространстве // Сообщ. АН ГССР.— 1984.— **114**, № 1.— С. 45—48.
4. *Харазишвили А. Б.* К существованию квазиинвариантных мер // Там же.— **115**, № 1.— С. 37—40.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 19.02.87