УДК 517.5

А. И. Степанец

Суммы Фурье: новые результаты и нерешенные задачи

Пусть $f(\cdot)$ — суммируемая, 2π-периодическая функция

$$S[f]=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}A_k(f;x) \tag{1}$$

— ее ряд Фурье и $S_n(f;x)$ — частная сумма порядка n этого ряда — сумма Фурье функции $f(x)$.

В настоящей работе излагаются новые результаты, связанные с исследованием величины

$$\rho_n(f;x)=f(x)-S_{n-1}(f;x), \tag{2}$$

характеризующей скорость сходимости ряда $S[f]$ в равномерной и интегральной метриках на заданных классах 2π-периодических функций, определяющихся при помощи мультипликаторов и сдвигов по аргументу, а также отмечаются вопросы, которые, по мнению автора, требуют своего решения.

Первые результаты по оценкам величин $\rho_n(f;x)$ для непрерывных 2π-периодических функций $f\in C$ были получены еще в начале века. В 1909 г. А. Лебег [1] показал, что

$$\|\rho_n(f;x)\|_C\leqslant(\ln n+3)E_n(f), \tag{3}$$

где $E_n(f)=E_n(f)_C$ — наилучшее приближение функции $f(\cdot)$ тригонометрическими полиномами $T_{n-1}(\cdot)$ порядка $n-1$ в равномерной метрике:

$$E_n(f)=\inf_{T_{n-1}}\|f(x)-T_{n-1}(x)\|_C=\inf_{T_{n-1}}\max_x|f(x)-T_{n-1}(x)|. \tag{4}$$

В сочетании с теоремами Д. Джексона об оценках значений $E_n(f)$ (см., например, [2]), неравенство Лебега содержит большую часть ранних результатов по оценкам величин $\rho_n(f;x)$ и не теряет своего значения и в настоящее время: на всем классе C оно является точным по порядку и удобно в приложениях. Например, если $f(\cdot)$ имеет производную порядка r, ограниченную, предположим, единицей, то $E_n(f)<\pi n^{-r}/2$ и тогда из (3) следует $\|\rho_n(f;x)\|_C<\pi n^{-r}(\ln n+3)/2$.

Что же касается пространств L_p функций $f\in L(0,2\pi)$ с конечной нормой

$$\|f\|_p\equiv\|f\|_{L_q}=\Big(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^p dt\Big)^{1/p}, \tag{5}$$

то также еще в начале века было известно, что при $p\in(1,\infty)$ операторы, ставящие в соответствие каждой функции $f\in L_p$ ее частную сумму Фурье или же частную сумму $\tilde{S}_n(f;x)$ ряда, тригонометрически сопряженного с $S[f]$, являются равномерно ограниченными. Отсюда сразу следует, что $\forall f\in L_p$, $1<p<\infty$

$$C_p^{(1)}E_n(f)_p\leqslant\|\rho_n(f;x)\|_p\leqslant C_p^{(2)}E_n(f)_p, \tag{6}$$

где $C_p^{(1)}$ и $C_p^{(2)}$ — постоянные, которые могут зависеть только от p, а

$E_n(f)_p$ — наилучшее приближение функции $f(\cdot)$ тригонометрическими полиномами $T_{n-1}(\cdot)$ в метрике пространства L_p:

$$E_n(f)_p = \inf_{T_{n-1}} \| f(\cdot) - T_{n-1}(\cdot) \|_p. \qquad (7)$$

При $p = 2$ суммы Фурье осуществляют наилучшее приближение функции $f(\cdot)$ и тогда

$$\| \rho_n(f; x) \|_2^2 = E_n^2(f)_2 = \pi \sum_{k=n}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2), \qquad (8)$$

где $a_k = a_k(f)$ и $b_k = b_k(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f(\cdot)$.

Столь хорошие аппроксимационные свойства сумм $S_n(f; x)$ — традиционного предмета исследований теории рядов Фурье — поставили их в ряд важнейших объектов и теории приближения функций.

Начало нового периода более глубокого исследования величин $\rho_n(f; x)$ относится к 30—40-м годам. Оно связано с именами А. Н. Колмогорова и С. М. Никольского. В 1935 г. А. Н. Колмогоров [3] рассмотрел величину

$$\mathcal{E}_n(W) = \sup \{ \| \rho_n(f; x) \|_C : f \in W^r \}, \quad W^r = \{ f : f \in C, \operatorname{ess\,sup} | f^{(r)} | \leqslant 1 \}, \quad (9)$$

где r — натуральное число, и показал, что при $n \to \infty$

$$\mathcal{E}_n(W^r) = \frac{4 \ln n}{\pi^2 n^r} + O(n^{-r}). \qquad (10)$$

Затем В. Т. Пинкевичем [4] было установлено, что это соотношение остается верным и для любых $r > 0$, если под выражениями $f^{(r)}(\cdot)$ понимать производные по Вейлю, т. е. функции, для которых

$$S[f^{(r)}] = \sum_{k=1}^{\infty} k^r (a_k \cos(kx + r\pi/2) + b_k \sin(kx + r\pi/2)), \qquad (11)$$

где a_k и b_k — коэффициенты Фурье функции $f(\cdot)$.

Следующий существенный шаг в этом вопросе принадлежит С. М. Никольскому [5—7], обобщившему упомянутые результаты на классы $W^r H^\alpha$, $W^r H^\alpha = \{ f : f \in C^r, | f^{(r)}(x) - f^{(r)}(x') | \leqslant | x - x' |^\alpha \}$, $\alpha \in (0, 1]$, и на более общие классы $W^r H_\omega$, задающиеся мажорантой $\omega = \omega(t)$ модулей непрерывности $\omega(f^{(r)}, t)$ производных $f^{(r)}(\cdot)$: $W^r H_\omega = \{ f : f^{(r)} \in H_\omega \}$, $H_\omega = \{ \varphi : \omega(\varphi; t) \leqslant \omega(t) \}$, где $\omega(t)$ — фиксированный модуль непрерывности. В частности, С. М. Никольский установил, что $\forall r \geqslant 0$ и $\forall \alpha \in (0, 1]$ выполняется равенство

$$\mathcal{E}_n(W^r H^\alpha) = \frac{2^{\alpha+1} \ln n}{\pi^2 n^{r+\alpha}} \int_0^{\pi/2} t^\alpha \sin t\, dt + O(n^{-(r+\alpha)}). \qquad (12)$$

Кроме того, С. М. Никольский решил аналогичную задачу для случая, когда вместо сумм $S_n(f; x)$ берутся суммы Фейера. Он получил также основополагающие результаты по изучению величин $\rho_n(f; x)$ и установлению для них асимптотических равенств вида (10) и (11) в интегральной метрике. Тем самым была указана возможность распространения постановки задачи, рассмотренной А. Н. Колмогоровым, и ее решения на более общих классах функций, для других приближающих агрегатов и функциональных пространств.

Эти исследования А. Н. Колмогорова и С. М. Никольского положили начало новому направлению в теории приближения функций и в теории рядов Фурье. Задача, связанная с отысканием асимптотических равенств для величин $\mathcal{E}(\mathfrak{N}; U_n) = \sup \{ \| f(x) - U_n(f; x) \| : f \in \mathfrak{N} \}$, где $\mathfrak{N}$ — фиксированный класс 2π-периодических функций, $U_n(f; x)$ — последовательность полиномов, порождаемая конкретным методом U_n суммирования рядов Фурье, а $\| \cdot \|$ — некоторая норма, стала одной из наиболее важных в теории приближения и в теории рядов Фурье. Ее мы называем задачей Колмогорова — Никольского (задачей К—Н), и если в явном виде найдена функция $\varphi(n) = \varphi(\mathfrak{N}; U_n; n)$ такая, что при $n \to \infty$

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; U_n) = \varphi(n) + o(\varphi(n)),$$

то говорим, что решена задача К—Н для класса $\mathfrak{N}$ и метода U_n.

Эта задача имеет богатую историю связанную с именами крупнейших специалистов по теории функций (подробнее об этом см. в [8]).

В настоящей работе задача К—Н для сумм Фурье рассматривается в пп. 2—4. Новым элементом здесь являются классы функций, которые вводятся в п. 1. Тематика п. 5 связана с изучением величин $\rho_n(f; x)$ на новых классах функций.

1. Классификация периодических функций. В 1983 г. автором была предложена классификация 2π-периодических функций, суть которой состоит в следующем.

Пусть $f \in L(0, 2\pi)$ и $a_k = a_k(f)$, $b_k = b_k(f)$, $k = 0, 1, \ldots,$— ее коэффициенты Фурье. Пусть, далее, $\psi(k)$, $k \in N$,— произвольная функция натурального аргумента и β — фиксированное действительное число, $\beta \in R$. Предположим, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k \cos(kx + \beta\pi/2) + b_k \sin(kx + \beta\pi/2)\right) \tag{13}$$

является рядом Фурье некоторой функции из $L(0, 2\pi)$. Эту функцию обозначим $f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$ и назовем (ψ, β)-производной функции $f(\cdot)$. Множество функций, имеющих (ψ, β)-производные, обозначим через L^{ψ}_{β}. Пусть еще $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из $L(0, 2\pi)$. Тогда, если $f \in L^{\omega}_{\beta}$ и при этом $f^{\psi}_{\beta} \in \mathfrak{N}$, то будем говорить, что $f(\cdot)$ принадлежит классу $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Подмножества непрерывных функций из L^{ψ}_{β} и $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ обозначаются, соответственно, через C^{ψ}_{β} и $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. При $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, классы $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ переходят в хорошо известные классы $W^{r}_{\beta}\mathfrak{N}$ Вейля — Надя, которые, в свою очередь, при $\beta = r$ совпадают с классами Вейля $W^{r}\mathfrak{N}$. При натуральных r и $\beta = r$ получаем классы 2π-периодических функций, r-е производные которых находятся в классе $\mathfrak{N}$.

Если $\psi(k)$ такова, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos(kx + \beta\pi/2) \tag{14}$$

является рядом Фурье некоторой функции $\Psi_{\beta}(x)$ из $L(0, 2\pi)$, классы $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ содержат множества функций $f(\cdot)$, представимых свертками

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + (\varphi * \Psi_{\beta})\, x, \quad \varphi \in \mathfrak{N}, \tag{15}$$

которые изучались многими авторами (см., например, [9—23]).

Предлагаемый подход позволяет классифицировать широкий спектр периодических функций, включая функции с расходящимися рядами Фурье, функции с конечной степенью гладкости, а также бесконечно дифференцируемые, в том числе аналитические и целые функции.

К настоящему времени на новых классах рассмотрены практически все основные задачи теории приближений, которые раньше ставились на классах дифференцируемых функций, и получены результаты в той же степени законченности, в которой они были известны ранее для классов, определяющихся посредством дробных производных по Вейлю. Результаты по приближениям формулируются в терминах параметров, которыми задаются классы. Они охватывают известные утверждения для классов дифференцируемых функций и, как следовало ожидать, вскрывают новые эффекты, которые наблюдать ранее не представлялось возможным (см., например, [9—15]).

В настоящей статье мы ограничиваемся кратким обзором основных результатов, связанных, за небольшим исключением, только с исследованием величин $\rho_n(f;x)$ на множествах $L^\psi_\beta\mathfrak{N}$ в пространствах C и L.

Аппроксимативные свойства классов $L^\psi_\beta\mathfrak{N}$ существенно зависят от функций $\psi(k)$. При рассмотрении задач мы предполагаем, что $\psi(k)$ — бесконечно малая выпуклая вниз последовательность, члены которой являются значениями некоторой выпуклой вниз при $v \geqslant 1$ функции $\psi(v)$ непрерывного аргумента. Множество таких функций обозначим $\mathfrak{M}$. Если $\psi \in \mathfrak{M}$ и

$$\int\limits_1^\infty v^{-1}\psi(v+1)\,dv < \infty, \tag{16}$$

то полагаем $\psi \in F$.

Далее, каждой функции $\psi \in \mathfrak{M}$ поставим в соответствие пару функций $\eta(t) = \eta(\psi; t)$ и $\mu(t) = \mu(\psi; t)$ посредством формул

$$\eta(t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right), \quad \mu(t) = t(\eta(t) - t)^{-1}, \tag{17}$$

где $\psi^{-1}(\cdot)$ — функция, обратная к $\psi(\cdot)$, и положим

$$\mathfrak{M}_C = \{\psi : \psi \in \mathfrak{M},\ 0 < K_1 \leqslant \mu(\psi; t) \leqslant K_2\}, \tag{18}$$

$$\mathfrak{M}_0 = \{\psi : \psi \in \mathfrak{M},\ 0 < \mu(\psi; t) \leqslant K_3\}. \tag{19}$$

Здесь и в дальнейшем K, K_i, $i = 1, 2, \ldots,$ — абсолютные положительные постоянные. Обозначим еще через $\mathfrak{M}_\infty$ подмножество функций $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых величина $\mu(\psi; t)$ монотонно возрастает и не ограничена сверху:

$$\mathfrak{M}_\infty = \{\psi :\ \psi \in \mathfrak{M},\ \mu(\psi; t) \uparrow \infty\}. \tag{20}$$

Естественными представителями множеств $\mathfrak{M}_\infty$ являются функции $\psi_2(v) = \exp(-\delta v^r)$, $r > 0$, $\delta > 1$, множеств $\mathfrak{M}_C$ — функции $\varphi_r(v) = v^{-r}$, $r > 0$. Множество $\mathfrak{M}_0$ включает в себя $\mathfrak{M}_C$ и содержит также медленно убывающие функции типа $\chi_r(v) = \ln^{-r}(v+e)$, $r > 0$.

Можно показать, что если $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, то множества C^ψ_β состоят из бесконечно дифференцируемых функций [13]. Если при этом еще и $\eta(\psi; t) - t \leqslant K\ \forall t \geqslant 1$, то $C^\psi_\beta\mathfrak{N}$ — классы аналитических функций.

Подмножество функций $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых почти при всех $t \geqslant 1$ $|\eta'(\psi; t)| \leqslant K$ обозначим через F_0:

$$F_0 = \{\psi \in \mathfrak{M}, \operatorname{ess\,sup}|\eta(\psi; t)| \leqslant K\}. \tag{21}$$

Нетрудно проверить, что выполняется включение

$$\mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}_\infty \overset{\mathrm{df}}{=} \mathfrak{M}_{C,\infty} \subset F_0. \tag{22}$$

В качестве множеств $\mathfrak{N}$ здесь будем рассматривать пространства C и L, единичные шары S_p в пространствах L_p, $p = 1, \infty$, $S_p = \{\varphi \in L\ (0, 2\pi), \|\varphi\|_p \leqslant 1\}$, где при $p = 1$ норма $\|\cdot\|_p$ определяется согласно (5) и $\|\varphi\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}|\varphi(t)|$, а также классы H_ω и H_{ω_1}, где H_ω — класс, определенный во введении, а

$$H_{\omega_1} = \{\varphi \in L(0, 2\pi),\ \|\varphi(x+t) - \varphi(x)\|_1 \leqslant \omega(t)\}, \tag{23}$$

где $\omega(t)$ — некоторый модуль непрерывности. При этом будем полагать

$$L^\psi_\beta S_1 = L^\psi_{\beta,1}, \quad C^\psi_\beta S_\infty = C^\psi_{\beta,\infty}. \tag{24}$$

Ниже приводятся некоторые из полученных результатов для классов $L^\psi_\beta\mathfrak{N}$ и $C^\psi_\beta\mathfrak{N}$.

2. Представление уклонений линейных средних рядов Фурье. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ — треугольная числовая матрица, $\lambda_k^{(n)} \equiv 0$, если $k \geqslant n$ и $\lambda_0^{(n)} \equiv 1$, при помощи которой каждой функции $f \in L(0, 2\pi)$ с рядом Фурье

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f; x) \tag{25}$$

ставится в соответствие последовательность полиномов

$$U_n(f; x; \Lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^{(n)} A_k(f; x). \tag{26}$$

Пусть, далее, $\{\lambda_n(v)\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность функций, заданных на $[0,1]$, для которых $\lambda_n(k/n) = \lambda_k^{(n)}$, $k = 0, 1, \ldots$, где $\lambda_k^{(n)}$ — по-прежнему элементы матрицы Λ. Положим

$$\tau_n(v) = \tau_n(v; \Lambda; \psi) = \begin{cases} (1 - \lambda_n(v))\,\psi(1), & 0 \leqslant v \leqslant 1/n, \\ (1 - \lambda_n(v))\,\psi(nv), & 1/n \leqslant v \leqslant 1, \\ \psi(nv) & v \geqslant 1, \end{cases} \tag{27}$$

так что

$$\tau_n(k/n) = \begin{cases} (1 - \lambda_k^{(n)})\,\psi(k), & 1 \leqslant k \leqslant n, \\ \quad \psi(k), & k \geqslant n, \end{cases} \tag{28}$$

$$\hat{\tau}_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tau_n(v) \cos(vt + \beta\pi/2)\, dv,$$

и обозначим через M множество существенно ограниченных функций $\varphi \in L(0, 2\pi)$:

$$M = \{\varphi \in L(0, 2\pi),\ \operatorname{ess\,sup} |\varphi| \leqslant K\} = L_\infty.$$

В принятых обозначениях справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Если функция* $\tau_n(v) = \tau_n(v; \Lambda; \psi)$, *определяющаяся соотношением* (27), *непрерывна и ее преобразование* $\hat{\tau}_n(t)$ *суммируемо на всей числовой оси, то* $\forall f \in C_\beta^\psi M$ *в каждой точке* x *выполняется равенство*

$$f(x) - U_n(f; x; \Lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x + t/n)\, \hat{\tau}_n(t)\, dt, \quad n \in N. \tag{29}$$

Теорема 1'. *Если функция* $\tau_n(v) = \tau_n(v; \Lambda; \psi)$ *непрерывна и ее преобразование* $\hat{\tau}_n(t)$ *суммируемо на* R, *и, кроме того, функция*

$$\hat{\tau}_n^*(t) = \begin{cases} \sup\limits_{x \geqslant t} |\hat{\tau}_n(x)|, & t > 0, \\ \sup\limits_{x \leqslant t} |\hat{\tau}_n(x)|, & t < 0 \end{cases}$$

суммируема на множестве $|t| \geqslant A$, *где* A — *некоторое положительное число, то* $\forall f \in L_\beta^\psi$ *почти в каждой точке любого отрезка длины* 2π *выполняется равенство* (29).

Обратим внимание на тот факт, что при получении представления (29) для заданного полинома $U_n(f; x; \Lambda)$ важно выбирать функцию $\tau_n(v)$ как функцию непрерывного аргумента лишь так, чтобы она была непрерывной, ее преобразование — суммируемым и выполнялось соотношение (28). Этот факт можно использовать и выбирать $\tau_n(v)$, так, чтобы затем было удобнее исследовать интеграл в правой части (29). В частности, для получения интегрального представления отклонений $\rho_n(f; x)$ частных сумм Фурье $S_{n-1}(f; x)$ от функции $f \in C^{\psi}_{\beta}M$ (или $f \in L^{\psi}_{\beta}$) достаточно в качестве функции $\tau_n(v)$ взять любую непрерывную при $v \geqslant 0$ функцию $\tau^*_n(v)$, удовлетворяющую условию

$$\tau^*_n(k/n = \begin{cases} 0, & k \leqslant n-1, \\ \psi(k), & k \geqslant n. \end{cases}$$

Оказывается удобным $\tau^*_n(v)$ задавать формулой

$$\hat{\tau}_n(v) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant v \leqslant 1 - 1/n, \\ 1 + n(v-1)\psi(n), & 1 - 1/n \leqslant v \leqslant 1, \\ \psi(nv), & v \geqslant 1, \quad n \in N. \end{cases}$$

Такая функция удовлетворяет всем необходимым условиям и с помощью ее и теоремы 1 получается следующая теорема.

Теорема 2. *Если $\psi \in F$, то $\forall f \in C^{\psi}_{\beta}M$ в каждой точке x выполняется равенство*

$$\rho_n(f; x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}(x + t/n)\mathcal{J}_2(t)\,dt + \frac{1}{2}A_n(f; x), \tag{30}$$

в котором

$$\mathcal{J}_2(t) = \mathcal{J}^{(\beta)}_2(t; \psi) = \frac{1}{\pi}\int\limits_1^{\infty} \psi(nv)\cos(vt + \beta\pi/2)\,dv. \tag{31}$$

Если $\psi \in F$ и $f \in L^{\psi}_{\beta}$, то равенство (30) *выполняется почти всюду. При* $\beta = 0$ *равенство справедливо $\forall \psi \in \mathfrak{M}$ в каждой точке x, если $f \in C^{\psi}_0 M$, и почти всюду на периоде, если $f \in L^{\psi}_0$.*

Отметим, что несобственные интегралы в (29)—(31) понимаются в смысле их главных значений по Коши, т. е. как пределы интегралов, взятых по симметричным расширяющимся промежуткам.

При $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, и целых β формула (29) была получена Б. Надем [16] и затем распространена С. А. Теляковским [21] для любых $\beta \in R$. Доказательства теорем 1 и 2 имеются в работах автора [2, 11].

3. **Асимптотические представления уклонений сумм Фурье.** На основании теоремы 2 доказываются следующие утверждения.

Теорема 3. *Пусть $\psi \in F$ и $a = a(n)$ — произвольная последовательность, для которой $a(n) \geqslant a_0 > 0$. Тогда, если $f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}$, то $\forall x$ и $\forall n \in N$*

$$\rho_n(f; x) = -\frac{\psi(n)}{\pi}\int\limits_{|t| \geqslant a(n)} f^{\psi}_{\beta}(x + t/n)\frac{\sin(t + \beta\pi/2)}{t}\,dt + b^{\psi}_n(a; f; x), \tag{32}$$

где

$$|b^{\psi}_n(a; f; x)| \leqslant K(\psi(n) + P_n(a; \psi) + R_n(a; \psi)). \tag{33}$$

Если $f \in C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$, то $\forall x$ и $\forall n \in N$

$$\rho_n(f; x) = \frac{\psi(n)}{\pi}\int\limits_{|t| \geqslant a(n)} [f^{\psi}_{\beta}(x) - f^{\psi}_{\beta}(x + t/n)]\frac{\sin(t + \beta\pi/2)}{t}\,dt + d^{\psi}_n(a; f; x), \tag{34}$$

где

$$|d^{\psi}_n(a; f; x)| \leqslant K(\psi(n) + P_n(a; \psi) + R_n(a; \psi))\,\omega(1/n). \tag{35}$$

Если же $\psi \in C^\psi_\beta C$, *то* $\forall x$ *и* $\forall n \in N$

$$\rho_n(f; x) = \frac{\psi(n)}{\pi} \int\limits_{|t| \geqslant a(n)} [f^\psi_\beta(x + t/n) - T_{n-1}(x + t/n)] \times$$

$$\times \frac{\sin(t + \beta\pi/2)}{t} dt + h^\psi_n(a; f; x), \tag{36}$$

где $T_{n-1}(\cdot)$ — *полином наилучшего равномерного приближения порядка* $n - 1$ *для функции* $f^\psi_\beta(\cdot)$ *и*

$$|h^\psi_n(a; f; x)| \leqslant K(\psi(n) + P_n(a; \psi) + R_n(a; \psi)) E_n(f^\psi_\beta). \tag{37}$$

Величины $P_n(a; \psi)$ и $R_n(a; \psi)$ *определяются формулами*

$$P_n(a; \psi) = \int\limits_{1/a(n)} \frac{\psi(nt - n)}{t} dt, \quad R_n(a; \psi) = \int\limits_{a(n)}^{\infty} t^{-1}(\psi(n) - \psi(n + n/t)) dt. \tag{38}$$

Теорема 3′. *Пусть* $\psi \in \mathfrak{M}$. *Тогда* $\forall f \in C^\psi_0 M$ *в каждой точке* x *выполняется равенство*

$$\rho_n(f; x) = \psi(n) \rho_n(f^\psi_0; x) + r^\psi_n(f; x), \tag{39}$$

где

$$r^\psi_n(f; x) = \frac{n}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} [f^\psi_0(x) - f^\psi_0(x + t/n)] \mathcal{J}_3(t) dt, \tag{40}$$

$$\mathcal{J}_3(t) = \mathcal{J}_3(\psi; n; t) = -\frac{1}{t} \int\limits_1^{\infty} \psi'(nv) \sin vt dv. \tag{41}$$

Для $f \in L^\psi_0$, $\psi \in \mathfrak{M}$ *равенство* (39) *выполняется почти всюду.*

Теорема 3 имеет следующий аналог в метрике L.

Теорема 4. *Пусть* $\psi \in F$ *и* $a = a(n)$ — *произвольная последовательность, для которой* $a(n) \geqslant a_0 > 0$. *Тогда, если* $f \in L^\psi_{\beta,1}$, *то* $\forall n \in N$ *почти всюду выполняется равенство* (32), *в котором*

$$\| b^\psi_n(a; f; x) \|_1 \leqslant K(\psi(n) + P_n(a; \psi) + R_n(a; \psi)). \tag{42}$$

Если $f \in L^\psi_\beta H_{\omega_1}$, *то* $\forall n \in N$ *почти всюду справедливо равенство* (34), *причем*

$$\| d^\psi_n(a; f; x) \|_1 \leqslant K(\psi(n) + P_n(a; \psi) + R_n(a; \psi)) \omega(1/n). \tag{43}$$

Если же $f \in L^\psi_\beta$, *то* $\forall n \in N$ *почти всюду выполняется равенство* (36), *в котором* $T_{n-1}(\cdot)$ — *полином наилучшего приближения в метрике* L_1 *порядка* $n - 1$ *для функции* $f^\psi_\beta(\cdot)$, *а*

$$\| h^\psi_n(a; f; x) \|_1 \leqslant K(\psi(n) + P_n(a; \psi) + R_n(a; \psi)) E_n(f^\psi_\beta)_1,$$

$$E_n(\varphi)_1 \overset{\text{df}}{=} E_n(\varphi)_{L_1}. \tag{44}$$

Величины $P_n(a; \psi)$ *и* $R_n(a; \psi)$ *определяются формулами* (38)

Доказательства теорем 3, 3′ и 4 имеются в [9, 11, 24].

4. Асимптотические равенства для верхних граней уклонений сумм Фурье в пространствах C и L. Исследования верхних граней по классам $C^\psi_{\beta,\infty}$ и $C^\psi_\beta H_\omega$ величин $\rho_n(f; x)$, представленных равенствами (32) и (34), приводят к следующему утверждению.

Теорема 5. *Пусть* $\psi \in F$ *и* $a = a(n)$ — *произвольная последовательность, для которой* $a(n) \geqslant a_0 > 0$. *Тогда величины*

$$\mathcal{E}_n(C^\psi_{\beta,\infty}) = \sup\{|\rho_n(f; x)| : f \in C^\psi_{\beta,\infty}\}$$

и

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}) = \sup\{|\rho_n(f; x)| : f \in C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}\}$$

не зависят от точки x и для них при каждом $n \in N$ выполняются равенства

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty}) = \frac{4}{\pi^2}\psi(n)\ln^{+}\frac{n\pi}{a(n)} + b^{\psi}_n(a), \tag{45}$$

где

$$|b^{\psi}_n(a)| = O(1)(\psi(n) + P_n(a; \psi) + R_n(a; \psi)), \tag{46}$$

$$\mathcal{E}_n(C^{\omega}_{\beta}H_{\omega}) = \frac{2}{\pi^2}\psi(n)s_n(\omega)\ln^{+}\frac{n\pi}{a(n)} + d^{\psi}_n(a; \omega), \tag{47}$$

$$|d^{\psi}_n(a; \omega)| = O(1)(\psi(n) + P_n(a; \psi) + R_n(a; \psi))\,\omega(1/n), \tag{48}$$

$O(1)$ — величины, равномерно ограниченные по n и по β; $P_n(a;\psi)$ и $R_n(a;\psi)$ определяются формулами (38), а

$$s_n(\omega) = \theta_{\omega}\int\limits_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt, \quad 2/3 \leqslant \theta_{\omega} \leqslant 1, \tag{49}$$

причем $\theta_{\omega} = 1$, если $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности.

Правые части равенств (45) и (47) содержат значения последовательности $a = a(n)$, которая за исключением условия $a(n) \geqslant a_0 > 0$ является произвольной. Это позволяет для каждой функции $\psi \in F$, входящей в определение классов, выбирать последовательность $a(n) = a(n; \psi)$, в каком-то смысле оптимальную.

С другой стороны, зафиксировав какую-нибудь последовательность $a^{(0)}(n)$, можно выделять множества F_1 функций $\psi \in F$, для которых первые слагаемые в равенствах (45) и (47) являются при $n \to \infty$ главными частями, и тогда эти равенства будут давать решение задачи К—Н о выделении главных частей при $n \to \infty$ величин $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty})$ и $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega})$.

Приведем несколько примеров. Положим $a(n) \equiv 1$ и через F_1 обозначим подмножество функций $\psi \in F$, для которых

$$P_n(a; \psi) = O(1)\psi(n), \tag{50}$$

$$R_n(a; \psi) = O(1)\psi(n), \tag{50'}$$

где $O(1)$ — величины, равномерно ограниченные по n. Тогда из теоремы 5 в принятых в ней обозначениях вытекает следующее утверждение.

Теорема 5′. *Пусть $\psi \in F_1$. Тогда*

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty}) = \frac{4}{\pi^2}\psi(n)\ln n + O(1)\psi(n), \tag{45'}$$

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}) = \frac{2}{\pi^2}\psi(n)s_n(\omega)\ln n + O(1)\psi(n)\omega(1/n). \tag{47'}$$

Функция $\psi_1(t) = t^{-r}$, $t \geqslant 1$, принадлежит F_1 при любом $r > 0$. В этом случае, как уже отмечалось, классы $C^{\psi_1}_{\beta,\infty}$ и $C^{\psi_1}_{\beta}H_{\omega}$ переходят в известные классы W^r_{β} и $W^r_{\beta}H_{\omega}$ 2π-периодических функций $f(\cdot)$, производные которых в смысле Вейля — Надя удовлетворяют соответственно условиям $f^{\psi_1}_{\beta} \in S_M = \{\varphi : \operatorname{ess\,sup}|\varphi| < 1\}$ и $f^{\psi_1}_{\beta} \in H_{\omega}$. Поэтому из теоремы 5′ вытекает следующая теорема.

Теорема 5″. *Для любых $r > 0$, $\beta \in R$ и $n \in N$*

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta}) = \frac{4\ln n}{\pi^2 n^r} + O(1)n^{-r}, \tag{51}$$

$$\mathcal{E}_n(W^r_\beta H_\omega) = \frac{2\ln n}{\pi^2 n^r} s_n(\omega) + O(1)\, n^{-r}\omega(1/n). \tag{52}$$

Равенство (51) при натуральных r и $\beta = r$ получено А. Н. Колмогоровым (см. равенство (10)), при любых $r > 0$ и $\beta = r$ — В. Т. Пинкевичем. При тех же условиях равенство (52) принадлежит С. М. Никольскому [5]; для произвольных $\beta \in R$ оно доказано А. В. Ефимовым [19].

Функции $\psi_2(t) = (t^s \ln(t+\alpha))^{-1}$ и $\psi_3(t) = t^{-s}\ln(t+\alpha)$ $\forall s > 0$ и $\forall \alpha > e^{2/s}$ также принадлежат F_1. Для них равенство (45′) имеет вид

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi_2}_{\beta,\infty}) = \frac{4\ln n}{\pi^2 n^s \ln(n+\alpha)} + O(1)(n^s \ln(n+\alpha))^{-1}, \tag{53}$$

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi_3}_{\beta,\infty}) = \frac{4\ln n \ln(n+\alpha)}{\pi^2 n^s} + O(1)\, n^{-s}\ln(n+\alpha). \tag{54}$$

Если $f \in C^{\psi_2}_{\beta,\infty}$, то в шкале классов W^r_β возможно лишь гарантировать включение $Cf \in W^s_\beta$, где C — некоторая постоянная, а с ним оценку (см. (31)) $|\rho_n(f; x)| \leqslant Kn^{-s}\ln n$, которая по порядку в $\ln n$ раз хуже оценки (53).

Если же $f \in C^{\psi_3}_{\beta,\infty}$, то можно лишь утверждать, что $Cf \in W^{s-\varepsilon}_\beta$, где ε — произвольно малое положительное число и, таким образом, в шкале классов W^r_β можно гарантировать лишь оценку величины $|\rho_n(f; x)|$, которая по порядку также окажется хуже оценки (54). Понятно, что аналогичная картина будет наблюдаться и при сравнении оценок величин $\rho_n(f; x)$ на классах $C^{\psi_i}_\beta H_\omega$, $i = 2, 3$, с соответствующими оценками в шкале классов $W^r_\beta H_\omega$, получающимися на основании равенства (52). Перечень подобных примеров может быть продолжен.

Функция $\psi_4(t) = \exp(-t^r)$ к F_1 не принадлежит ни при каком $r > 0$. Условие $P_n(1; \psi_4) = o(1)\,\psi_4(n)$ будет выполняться со значительным запасом, но в то же время равенство $R_n(1; \psi_4) = O(1)\,\psi_4(n)$ места не имеет. Дело здесь в том, что выбранная последовательность $a(n) \equiv 1$ в этом случае далека от оптимальной.

Будем выбирать последовательность $a = a(n)$ из следующих соображений. При каждом фиксированном $n \in N$ положим

$$F_n(x; \psi) = P_n(x; \psi) + R_n(x; \psi) = \int\limits_{1/x}^{\infty} \frac{\psi(nt+n)}{t}\, dt +$$

$$+ \int\limits_{x}^{\infty} (\psi(n) - \psi(n + n/t)) \frac{dt}{t}.$$

Производная функции $F_n(x; \psi)$ $F_n'(x; \psi) = (2\psi(n + n/x) - \psi(n))\, x^{-1}$ вследствие строгой монотонности функции $\psi(\cdot)$ обращается в нуль в единственной точке $x = \mu(n) = n\Big/\left(\psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(n)\right) - n\right)$, которая является точкой минимума функции $F_n(x; \psi)$.

Стало быть, полагая $a(n) = \mu(n)$, мы тем самым будем обеспечивать максимально возможный порядок стремления остаточных членов в формулах (45) и (47).

Заметим, что для $\psi(t) = t^{-r}$, $r > 0$, $\mu(n) = (2^{1/r} - 1)^{-1}$. Для функций $\psi_2(t)$ и $\psi_3(t)$ последовательность $\mu(n)$ также оказывается ограниченной. Если $\psi_5(t) = \exp(-\delta t^r)$, $r > 0$, $\delta \geqslant 1$, то $\mu(n) = n^r(\delta r/\ln 2 + o(1))$, где $o(1)$ — величина, стремящаяся к нулю при $n \to \infty$. Оказывается, что $P_n(\mu(n); \psi_5) = O(1)\,\psi_5(n)$ и $R_n(\mu(n); \psi_5) = O(1)\,\psi_5(n)$. Таким образом, полагая в равенствах (45) и (47) $a(n) = n^r(\delta r/\ln 2 + o(1))$, придем к следующему утверждению.

Т е о р е м а 5‴. *Пусть* $r > 0$, $\delta \geqslant 1$ *и* $\beta \in R$. *Тогда*

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi_4}_{\beta,\infty}) = \left(\frac{4}{\pi^2}\ln^+ n^{1-r} + O(1)\right)\exp(-\delta n^r), \tag{55}$$

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi_4}_{\beta}H_\omega) = \left(\frac{2}{\pi^2}s_n(\omega)\ln^+ n^{1-r} + O(1)\,\omega(1/n)\right)\exp(-\delta n^r), \tag{55'}$$

где величины $s_n(\omega)$ *и* $O(1)$ *имеют тот же смысл, что и в теореме* 5.

Выбор в качестве $a(n)$ последовательности $\mu(n)$ приводит к конструктивным утверждениям и в общей ситуации, допускающей применение теоремы 5, т. е. при условиях, что $\psi \in F$ и $\mu(n) \geqslant a_0 > 0$. Можно убедиться, что если $\psi(\cdot)$ такова, что $\psi \in F$ и величина $|\eta'(\psi;t)|$ почти всюду ограничена:

$$|\eta'(\psi;t)| \leqslant K, \tag{56}$$

т. е. $\psi \in F_0$ (см. (10)), то

$$P_n(\mu(n);\varphi) = O(1)\,\psi(n), \quad R_n(\mu(n);\psi) = O(1)\,\psi(n) \tag{56'}$$

и

$$\mu(n) = \mu(n;\psi) \geqslant a_0 > 0. \tag{56''}$$

Поэтому, выбирая в качестве $a(n)$ последовательность $\mu(n) = \mu(\psi; n)$ и обозначая через F_0 подмножество функций $\psi \in F$, для которых выполнено (56), из теоремы 5 выводим следующее утверждение.

Т е о р е м а 6. *Пусть* $\psi \in F_0$. *Тогда* $\forall \beta \in R$ *выполняются равенства*

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty}) = \left(\frac{4}{\pi^2}\ln^+\pi(\eta(n) - n) + O(1)\right)\psi(n), \tag{57}$$

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta}H_\omega) = \frac{2\psi(n)}{\pi^2}\,s_n(\omega)\ln^+\pi(\eta(n) - n) + O(1)\,\psi(n)\,\omega(1/n), \tag{57'}$$

где $O(1)$ — величины, равномерно ограниченные по n и по β, $\eta(n) = \eta(\psi; n) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(n)\right)$, а величина $s_n(\omega)$ определяется равенством (49).

Условию (56) удовлетворяет широкое множество функций $\psi \in F$. В частности, оно выполняется для всех определенных выше функций $\psi_i(t)$, $i=\overline{1,4}$, и, таким образом, теоремы 5 — 5‴ являются частными случаями теоремы 6. Напомним также, что множества $\mathfrak{M}_c$ и $\mathfrak{M}_\infty$ также содержатся в F_0.

Множество $\mathfrak{M}_0$ не принадлежит даже к F; в нем имеются функции $\psi(\cdot)$, для которых интегралы $\int\limits_1^\infty v^{-1}\psi(v+1)\,dv$ расходятся. Тем не менее, на основании теоремы 3 для $\psi \in \mathfrak{M}$ доказывается следующая теорема.

Т е о р е м а 6′. *Пусть* $\psi \in \mathfrak{M}_0$. *Тогда* $\forall f \in C^{\psi}_0 H_\omega$ *в каждой точке* x

$$\rho_n(f;x) = \psi(n)\,\rho_n(f^{\psi}_0;x) + O(1)\,\psi(n)\,\omega(1/n), \quad n \in N. \tag{58}$$

Если же $f \in C^{\psi}_{0,\infty}$, *то в каждой точке* x

$$\rho_n(f;x) = \psi(n)\,\rho_n(f^{\psi}_0;x) + O(1)\,\psi(n). \tag{58'}$$

Отсюда, учитывая, что (см., например, [8, с. 121, 168])

$$\sup_{f\in C^{\psi}_0 H_\omega} |\rho_n(f^{\psi}_0;x)| = \sup_{\varphi\in H_\omega} |\rho_n(\varphi;x)| = \frac{2s_n(\omega)}{\pi^2}\ln n + O(1)\,\omega(1/n),$$

$$\sup_{f\in C^{\psi}_{0,\infty}} |\rho_n(f^{\psi}_0;x)| = \sup_{|\varphi|\leqslant 1} |\rho_n(\varphi;x)| = \frac{4}{\pi^2}\ln n + O(1),$$

получаем следующее утверждение.

Теорема 7. *Если* $\psi \in \mathfrak{M}_0$, *то*

$$\mathcal{E}_n(C_0^\psi H_\omega) = \frac{2\psi(n)}{\pi^2} s_n(\omega) \ln n + O(1)\psi(n)\omega(1/n), \tag{59}$$

$$\mathcal{E}_n(C_{0,\infty}^\psi) = \frac{4\psi(n)}{\pi^2} \ln n + O(1)\psi(n), \tag{59'}$$

где $O(1)$ — величины, равномерно ограниченные по n, а $s_n(\omega)$—величина из равенства (47).

В связи с равенствами (58), (59') заметим, что множество $\mathfrak{M}_0$ содержит функции $\psi(\cdot)$, для которых произведения $\psi(n)\ln n$ могут быть и неограниченными, и тогда, к примеру, равенство (59') указывает порядок расходимости сумм Фурье на классе $C_{0,\infty}^\psi$.

Равенства (59) и (59') представляют интерес также и с точки зрения известной в теории тригонометрических рядов задачи о множителях сходимости (см., например, [25, с. 338]).

Пусть $\mathfrak{N}$ — некоторый класс функций из $L(0, 2\pi)$, $f \in \mathfrak{N}$, $S[f] = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f; x)$ — ряд Фурье функции $f(\cdot)$ и λ_k, $k \in N$, — некоторая числовая последовательность. Если ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k A_k(f; x) \tag{60}$$

сходится равномерно (в метрике L) для любой $f \in \mathfrak{N}$, то числа λ_k называют множителями равномерной сходимости (сходимости в метрике L) для класса $\mathfrak{N}$.

Если $\mathfrak{N} = S_M$ или $\mathfrak{N} = H_\omega$, а λ_k — выпуклая вниз бесконечно малая последовательность, то функция $f(\cdot)$, ряд Фурье которой имеет вид (60), принадлежит соответственно к классу $C_{0,\infty}^\psi$ или $C_0^\psi H_\omega$ при $\psi(k) = \lambda_k$, и тогда из теоремы 7 получаем такое следствие.

Следствие 1. *Члены бесконечно малой выпуклой вниз последовательности λ_k являются множителями равномерной сходимости для класса S_M тогда и только тогда, когда*

$$\lambda_n \ln n = o(1), \quad n \to \infty, \tag{61}$$

для класса H_ω — тогда и только тогда, когда

$$\lambda_n \omega(1/n) \ln n = o(1), \quad n \to \infty. \tag{61'}$$

Утверждения теорем 5—7 имеют следующие аналоги в интегральной метрике.

Теорема 8. *Пусть $\psi \in F$ и a — произвольная последовательность, для которой $a(n) \geqslant a_0 > 0$. Тогда для величин*

$$\mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_1 = \sup\{\|\rho_n(f; x)\|_1 : f \in L_{\beta,1}^\psi\}$$

и

$$\mathcal{E}_n(L_\beta^\psi H_{\omega_1})_1 = \sup\{\|\rho_n(f; x)\|_1 : f \in L_\beta^\psi H_\omega\}$$

при каждом натуральном n выполняются равенства

$$\mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_1 = \frac{4}{\pi^2}\psi(n)\ln^+\frac{n\pi}{a(n)} + b_n^\psi(a)_1, \tag{62}$$

где

$$|b_n^\psi(a)| \leqslant O(1)(\psi(n) + P_n(a; \psi) + R_n(a; \psi)),$$

$$\mathcal{E}_n(L_\beta^\psi H_{\omega_1})_1 = \frac{2}{\pi^2}\psi(n) s_n(\omega)_1 \ln^+\frac{n\pi}{a(n)} + d_n^\psi(a, \omega)_1, \tag{62'}$$

$$|d_n^\psi(a; \omega)| \leqslant O(1)(\varphi(n) + P_n(a; \psi) + R_n(a; \psi))\omega(1/n),$$

$O(1)$ — величины, равномерно ограниченные по n и по β; $P_n(a;\psi)$ и $R_n(a;\psi)$ определяются формулами (38), *а*

$$s_n(\omega)_1 = \Theta_{\omega_1}\int\limits_0^{\pi/2}\omega(2t/n)\sin t\,dt,\quad 1/2 \leqslant \Theta_{\omega_1} \leqslant 1, \tag{63}$$

причем $\Theta_{\omega_1} = 1$, если $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности.

Теорема 9. *Пусть $\psi \in F_0$. Тогда $\forall\beta\in R$ выполняются равенства*

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_1 = \left(\frac{4}{\pi^2}\ln^+\pi(\eta(n)-n) + O(1)\right)\psi(n), \tag{64}$$

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta}H_{\omega_1})_1 = \frac{2\psi(n)}{\pi^2}s_n(\omega)_1\ln^+\pi(\eta(n)-n) + O(1)\psi(n)\omega(1/n), \tag{64'}$$

где $O(1)$ — величины, равномерно ограниченные по n и по β, $\eta(n) = \eta(\psi; n) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(n)\right)$, а величина $s_n(\omega)_1$ определяется равенством (63).

Если $\psi(t) = t^{-r}$, то классы $L^{\psi}_{\beta,1}$ и $L^{\psi}_{\beta}H_{\omega_1}$ обозначаются соответственно через $W^r_{\beta,1}$ и $W^r_{\beta}H_{\omega_1}$. В этом случае из теоремы 9 получаем следующее утверждение.

Теорема 9′. *Для любых $r > 0$, $\beta\in R$ и $n\in N$*

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_1 = \frac{4\ln n}{\pi^2 n^r} + O(n^{-r}), \tag{65}$$

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta}H_{\omega_1})_1 = \frac{2\ln n}{\pi^2 n^r}s_n(\omega)_1 + O(1)n^{-r}\omega(1/n). \tag{65'}$$

Равенство (65) впервые доказал С. М. Никольский [7], равенство (65′) — А. Г. Демченко [26].

Приведем еще интегральный аналог теорем 6 и 7.

Теорема 10. *Пусть $\psi\in\mathfrak{M}_0$. Тогда $\forall f\in L^{\psi}_0H_{\omega_1}$ почти всюду выполняется равенство* (58). *Если же $f\in L^{\psi}_{0,1}$, то почти всюду справедливо равенство* (56′). *При этом*

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_0H_{\omega_1})_1 = \frac{2\psi(n)\ln n}{\pi^2}s_n(\omega) + O(1)\psi(n)\omega(1/n), \tag{66}$$

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{0,1})_1 = \frac{4\psi(n)}{\pi^2}\ln n + O(1)\psi(n), \tag{66'}$$

где $O(1)$ — величины, равномерно ограниченные по n и по β, а $s_n(\omega)_1$ — величина из формулы (63).

Теоремы 5, 5′ и 6 доказаны в [11], теоремы 7 и 10 — в [14, 27]; теоремы 8 и 9 — в [28].

5. Асимптотические неравенства для уклонений сумм Фурье в пространствах C и L. Если $t_{n-1}(\cdot) = t_{n-1}(f;\ \cdot)$ — полином наилучшего приближения функции $f\in C$, т. е. такой, что $\|f(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_C = E_n(f)_C$ (в дальнейшем индекс C в обозначениях $E_n(f)_C$ будем опускать), то обозначая через $\|S_{n-1}\|$ норму оператора, ставящего в соответствие каждой функции $f\in C$ ее частную сумму Фурье порядка $n-1$, как оператора, действующего из C в C, $\forall f\in C$ находим

$$\|\rho_n(f;x)\|_C = \|f(x) - t_{n-1}(x) - S_{n-1}(f - t_{n-1}; x)\|_C \leqslant (1 + \|S_{n-1}\|)E_n(f)$$

и так как (см., например, [29, с. 112]), $\|S_{n-1}\| = \frac{4}{\pi^2}\ln n + r_n$, $|r_n| \leqslant 3$,

$n \in N$, то $\forall f \in C$

$$\| \rho_n (f; x) \|_C \leqslant \left(\frac{4}{\pi^2} \ln n + R_n \right) E_n (f), \quad | R_n | \leqslant 4. \tag{67}$$

Полученное соотношение — уточнение известного неравенства А. Лебега (см. (3)). На всем классе C оно является точным по порядку. Более того, в нем константу $4/\pi^2$ уменьшить нельзя, т. е. на множестве C неравенство (67) является асимптотически точным.

В то же время существуют важные подмножества функций из C, для которых соотношение (67) оказывается не точным даже по порядку, что будет хорошо видно, к примеру, из следующих ниже утверждений.

В настоящем пункте приводятся оценки отклонений сумм Фурье на множествах L^{ψ}_{β}, выраженные через наилучшие приближения (ψ, β)-производных индивидуальных функций. В этом отношении результаты примыкают к неравенству Лебега, распространяя его на классы (ψ, β)-дифференцируемых функций.

Теорема 11. *Пусть $\psi \in F$ и $a = a(n)$ — произвольная последовательность, для которой $a(n) \geqslant a_0 > 0$. Тогда $\forall f \in C^{\psi}_{\beta} C$ при любом $n \in N$ справедливо неравенство*

$$\| \rho_n (f; x) \|_C \leqslant \frac{4}{\pi^2} \psi (n) E_n (f^{\psi}_{\beta}) \ln^+ \frac{n\pi}{a(n)} + b^{\psi}_n (f; a), \tag{68}$$

где

$$| b^{\psi}_n (f; a) | \leqslant K (\psi (n) + P_n (a; \psi) + R_n (a; \psi)) E_n (f^{\psi}_{\beta}), \tag{69}$$

величины $P_n (a; \psi)$ и $R_n (a; \psi)$ определяются формулой (38), а K — постоянная, не зависящая ни от $f \in C^{\psi}_{\beta} C$, ни от $n \in N$, ни от $\beta \in R$.

При этом для любой функции $f \in C^{\psi}_{\beta} C$ при каждом натуральном n в пространстве $C^{\psi}_{\beta} C$ найдется функция $F(x) = F(f; n; x)$ такая, что $E_n (F^{\psi}_{\beta}) = E_n (f^{\psi}_{\beta})$ и для нее выполняется равенство

$$\| \rho_n (F; x) \|_C = \frac{4}{\pi^2} \psi (n) E_n (F^{\psi}_{\beta}) \ln^+ \frac{n\pi}{a(n)} + d^{\psi}_n (F; a),$$

в котором $| d^{\psi}_n (F; a) |$ не превышает правой части (69) возможно, с другой константой K, также не зависящей ни от $F(\cdot)$, ни от $n \in N$, ни от $\beta \in R$.

Если $\psi \in F_0$, то выполнены соотношения (56′) и (56″). Поэтому из теоремы 11 при $a(n) = \mu(\psi; n)$ получается такое утверждение.

Теорема 12. *Пусть $\psi \in F_0$. Тогда $\forall f \in C^{\psi}_{\beta} C$ при любом $n \in N$*

$$\| \rho_n (f; x) \|_C \leqslant \left(\frac{4}{\pi^2} \ln^+ \pi (\eta (n) - n) + O(1) \right) \psi (n) E_n (f^{\psi}_{\beta}), \tag{68′}$$

где $\eta (n) = \eta (\psi; n) = \psi^{-1} \left(\frac{1}{2} \psi (n) \right)$ и $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по $f \in C^{\psi}_{\beta} C$, по $n \in N$ и по $\beta \in R$.

Для любой функции $f \in C^{\psi}_{\beta} C$ при каждом $n \in N$ в пространстве $C^{\psi}_{\beta} C$ найдется функция $F(x) = F(f; n; x)$ такая, что $E_n (F^{\psi}_{\beta}) = E_n (f^{\psi}_{\beta})$ и для нее (68′) *переходит в равенство.*

Вторые части теорем 11 и 12 показывают, в частности, что неравенства (68) и (68′) асимптотически точны на всем пространстве $C^{\psi}_{\beta} C$. Эти неравенства также асимптотически точны и на некоторых важных подмножествах из $C^{\psi}_{\beta} C$. Например, пусть C^0 — подмножество непрерывных функций, ограниченных по модулю единицей: $C^0 = \{ \varphi : \varphi \in C, | \varphi | \leqslant 1 \}$. Поскольку $\forall \varphi \in C^0$ $E_n (\varphi) \leqslant 1$, то, рассматривая верхние грани обеих частей неравенства (68) по классу $C^\psi_\beta C^0 \,\forall \psi \in F$ и $\forall \beta \in R$, получаем

$$\mathcal{E}_n(C^\psi_\beta C^0) \leqslant \left(\frac{4}{\pi^2} \ln^+ \pi (\eta(n) - n) + O(1)\right) \psi(n). \tag{70}$$

Сравнивая это неравенство с соотношением (57) и замечая, что $\mathcal{E}_n(C^\psi_\beta C^0) = \mathcal{E}_n(C^\psi_{\beta,\infty})$, приходим к выводу, что (70) на самом деле является равенством, т. е. (68′) оказывается асимптотически точным и на классе $C^\psi_\beta C_0$. Но уже на классе $C^\psi_\beta H_\omega$ неравенство (68′) может быть и строгим. В этом случае (см., например, [2, с. 208]) $\sup\{E_n(f): f \in H_\omega\} = (1/2)\,\omega(\pi/n)$. Если применить это равенство к правой части (68′), получим величину, отличающуюся в общем случае от асимптотического значения $\mathcal{E}_n(C^\psi_\beta H_\omega)$, доставляемого формулой (57′).

Напомним, что справедливо включение $F_0 \supset \mathfrak{M}_{C,\infty} = \mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}_\infty$. Теорема 11 остается верной и когда $\psi \in \mathfrak{M}_0$, но при условии, что $\beta = 0$.

Теорема 13. *Пусть $\psi \in \mathfrak{M}_0$. Тогда $\forall f \in C^\psi_0 C$ при любом $n \in N$*

$$\|\rho_n(f; x)\|_C \leqslant \left(\frac{4}{\pi^2} \ln n + O(1)\right) \psi(n)\, E_n(f^\psi_\beta), \tag{68″}$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по $f \in C^\psi_0 C$ и по n.

Для любой функции $f \in C^\psi_0 C$ при каждом $n \in N$ в пространстве $C^\psi_0 C$ найдется функция $F(x) = F(f; n; x)$ такая, что $E_n(F^\psi_0) = E_n(f^\psi_0)$ и для нее $\|\rho_n(F; x)\|_C = \left(\frac{4}{\pi^2} \ln n + O(1)\right) \psi(n)\, E_n(F^\psi_0)$.

Отметим, что неравенство (68″) выполняется и при $\psi(k) \equiv 1$. В этом случае ему отвечает классическое неравенство (67).

Утверждения теорем 11—13 имеют аналоги и в метрике L.

Теорема 14. *Пусть $\psi \in F$ и $a = a(n)$ — последовательность, для которой $a(n) \geqslant a_0 > 0$. Тогда $\forall f \in L^\psi_\beta$ при любом $n \in N$ выполняется неравенство*

$$\|\rho_n(f; x)\|_1 \leqslant \frac{4}{\pi^2}\, \psi(n)\, E_n(f^\psi_\beta)_1 \ln^+ \frac{n\pi}{a(n)} + b^\psi_n(f; a), \tag{71}$$

где

$$|b^\psi_n(f; a)| \leqslant K(\psi(n) + P_n(a; \psi) + R_n(a; \psi))\, E_n(f^\psi_\beta)_1,$$

K — постоянная, зависящая, возможно, только от последовательности $a(n)$.

Если $\psi \in F_0$, то $\forall f \in L^\psi_\beta$ при любом $n \in N$

$$\|\rho_n(f; x)\|_1 \leqslant \left(\frac{4}{\pi^2} \ln^+ n(\eta(n) - n) + O(1)\right) \psi(n)\, E_n(f^\psi_\beta)_1, \tag{71′}$$

где $\eta(n) = \psi^{-1}(\psi(n)/2)$ и $O(1)$ — величины, равномерно ограниченные по $f \in L^\psi_\rho$, по $n \in N$ и по $\beta \in R$. Если $\psi \in \mathfrak{M}_0$, то $\forall f \in L^\psi_0$ при любом $n \in N$

$$\|\rho_n(f; x)\|_1 \leqslant \left(\frac{4}{\pi^2} \ln n + O(1)\right) \psi(n)\, E_n(f^\psi_0)_1. \tag{71″}$$

6. О методах получения результатов. Изложенные здесь результаты, как уже отмечалось, базируются на теореме 2, а точнее на исследовании интегрального представления (30). Это равенство было получено автором в [9] (см. также [11]). Оно является новым и в случае, когда $\psi(k) = k^{-r}$ и $\beta = r$, т. е. для классов Вейля W^r. При $\psi(k) = k^{-r}$ и $r \in N$ это представление было найдено автором ранее [8, с. 111].

Равенство (30) получается, если в (29) положить $\hat{\tau}_n(t) = \hat{\tau}^*_n(t)$ и доказать, что

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_{\beta}^{\psi}(x+t/n)\int_{1-1/n}^{1}[1-n(v-1)\psi(n)]\cos(vt+\beta\pi/2)\,dvdt=\frac{1}{2}A_n(f;x).$$

Эта формула была установлена в [9] на основании следующего утверждения, которое, по-видимому, имеет и самостоятельный интерес.

Лемма. *Пусть* $\varphi(t)$ — *произвольная суммируемая* 2π-*периодическая функция. Тогда*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\frac{t-\sin t}{t^2}dt=0,\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\frac{1-\cos t}{t^2}dt=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,dt,$$

где несобственные интегралы понимаются в смысле их главных значений.

С помощью этой леммы легко выводятся новые формулы для частной суммы Фурье и для функции $\tilde{f}(\cdot)$, сопряженной к $f\in L$:

$$S_{n-1}(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x+t)\frac{\sin nt\sin t}{t^2}dt+\frac{1}{2}A_n(f;x),$$

$$\tilde{f}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x+t)\frac{\sin t}{t}dt.$$

Эти формулы также были использованы для получения изложенных результатов. Исследование интегрального представления (29) в равномерной метрике производится с помощью метода оценок интегралов на классах H_ω, развитого и изложенного в [8] (см. § 4), который, в свою очередь, основан на идеях С. М. Никольского [6] и Н. П. Корнейчука [2]. Аналогичный метод был также разработан и для исследования интегралов в метрике пространства L. В этом случае существенную роль сыграли результаты С. М. Никольского [7].

Представляется важным также и то, что методы, предложенные при установлении приведенных в статье результатов, позволяют процесс нахождения асимптотических равенств для величин $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty})$ и $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta}H_\omega)$, а также для величин $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_1$ и $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta}H_{\omega_1})_1$ сделать единообразным. Раньше при отыскании таких равенств для величин $\mathcal{E}_n(W^r)$ и $\mathcal{E}_n(W^rH_\omega)$ исследователи шли существенно разными путями (см., например, [19, 20, 22]).

7. Нерешенные задачи. 1. Все утверждения, приведенные выше для множеств C^{ψ}_{β} и L^{ψ}_{β} получены в предположении, что $\psi(k)$ — выпуклая вниз бесконечно малая последовательность. Это обстоятельство вызвано тем, что только для таких классов до сих пор удавалось развить необходимую технику. Отсюда и первая задача — получить аналоги теорем 1—16 при менее ограничительных условиях, налагаемых на функции $\psi(k)$, например, в предположении, что $\psi(k)$ — монотонно убывающая к нулю последовательность. В этом случае, по нашему мнению, были бы интересными даже порядковые соотношения.

2. Величины $O(1)$, входящие в остаточные члены асимптотических равенств в теоремах 5, 5′, 6, 7, 8 и др., вследствие способа их доказательств, вообще говоря, зависят от функций $\psi(\cdot)$. Интересно было бы выяснить характер такой зависимости и получить аналоги при произвольных значениях $\beta\in R$. При $\psi(k)=k^{-r}$ и $\beta=r$, т. е. на классах W^r такая задача рассматривалась в работах [30, 22, 31].

3. Результаты при $\psi\in\mathfrak{M}_0$ получены для классов $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ и $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ в предположении, что $\beta=0$. Хорошо было бы избавиться от этого условия.

4. Представляется актуальной задача, состоящая в нахождении второго члена асимптотики величин $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty})$, $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})$ и др., хотя бы в клас-

сическом случае при $\psi(k) = k^{-r}$ и $\beta = r$, т. е. задача о нахождении функции $\varphi(n) = \varphi(n, r)$ такой, что $\mathcal{E}_n(W^r) = \dfrac{4 \ln n}{\pi^2 n^r} + \varphi(n, r) + o(\varphi(n, r))$.

5. Распространение результатов настоящей работы на многомерный случай также представляет несомненный интерес.

1. *Lebesque H.* Sur les integrales singulieres // Ann. Toulouse.— 1909.— **1**.— p. 25—117.
2. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения.— М. : Наука, 1976.— 320 С.
3. *Колмогоров А. Н.* Zur Grössenordnung des Restliedes Fourierschen Reihen differenzierbaren Founctionen // Ann. Math.— 1935.— **36**,— p. 521—526.
4. *Пинкевич В. Т.* О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Вейля // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1940.— **4**, № 5.— С. 521—528.
5. *Никольский С. М.* Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера // Там же.— № 6.— С. 501—508.
6. *Никольский С. М.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1945.— **15**.— С. 1—76.
7. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1946.— **10**, № 3.— С. 207—256.
8. *Степанец А. И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами.— Киев : Наук. думка, 1981.— 340 С.
9. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и приближение их суммами Фурье.— Киев, 1983.— 57 с.— (Препринт / АН УССР; Ин-т математики; № 83.69).
10. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье // Докл. АН СССР.— 1984.— **277**, № 5.— С. 1074—1077.
11. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1986.— **50**, № 1.— С. 101—136.
12. *Степанец А. И.* Уклонения сумм Фурье на классах бесконечно дифференцируемых функций // Укр. мат. журн.— 1984.— **36**, № 6.— С. 750—758.
13. *Степанец А. И.* Модули полураспада монотонных функций и скорость сходимости рядов Фурье // Там же.— 1986.— **38**, № 5.— С. 618—624.
14. *Степанец А. И.* Приближение суммами Фурье функций с медленно убывающими коэффициентами Фурье // Приближение периодических функций суммами Фурье.— Киев, 1984.— С. 3—25.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 84.43).
15. *Степанец А. И., Кушпель А. К.* Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций.— Киев, 1984.— 44 С.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 84.15).
16. *Nagy B.* Sur une classe generale de procedes de sommation pour les series de Fourier // // Hung. Acta Math.— 1948.— **1**, N 3.— p. 14—52.
17. *Стечкин С. Б.* О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1956.— **20**, № 6.— С. 643—648.
18. *Стечкин С. Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1980.— **145**.— С. 126—151.
19. *Ефимов А. В.* О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1958.— **22**, № 1.— М. 81—116.
20. *Ефимов А. В.* О приближении непрерывных функций суммами Фурье // Успехи мат. наук.— 1959.— **14**, вып. 2.— С. 183—188.
21. *Теляковский С. А.* Приближение функций, дифференцируемых в смысле Вейля, суммами Валле-Пуссена // Докл. АН СССР.— 1960.— **131**, № 2.— С. 259—262.
22. *Теляковский С. А.* Приближение дифференцируемых функций частными суммами их рядов Фурье // Мат. заметки.— 1968.— **4**, № 3.— С. 291—300.
23. *Дзядык В. К.* О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер // Там же.— 1974.— **16**, № 5.— С. 691—701.
24. *Степанец А. И.* Скорость сходимости рядов Фурье в пространствах L_β^ψ.— Киев, 1986.— 56 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 86.66).
25. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды.— М. : Физматгиз, 1961.— 936 с.
26. *Демченко А. Г.* Приближение в среднем функций из классов $W^r H_{[\omega]L}$ // Укр. мат. журн.— 1973.— **25**, № 3.— С. 262—271.
27. *Степанец А. И.* Приближение суммами Фурье функций с медленно убывающими коэффициентами Фурье // Там же.— 1986.— **38**, № 6.— С. 755—762.
28. *Степанец А. И., Новикова А. К.* Приближение периодических функций суммами Фурье в среднем // Там же.— № 2.— С. 204—210.
29. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М. : Наука, 1977.— 511 с.
30. *Соколов И. Г.* Остаточный член ряда Фурье дифференцируемых функций // Докл. АН СССР.— 1955.— **103**, № 1.— С. 23—26.
31. *Стечкин С. Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1980.— **145**.— С. 126—151.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 28.11.86