УДК 519.41/47

Д. И. Зайцев, В. А. Мазниченко

О гиперцентральных расширениях абелевых групп

1. Пусть E — расширение абелевой группы A с помощью гиперцентральной группы. Предположим, что A является гиперцентральным корадикалом группы E и A удовлетворяет одному из следующих условий конечности:

1) $\min - E$ (условие минимальности для E-допустимых подгрупп);

2) $\max - E$ (условие максимальности для E-допустимых подгрупп);

3) группа A имеет конечный ранг и ее периодическая часть черниковская.

Тогда в каждом из трех случаев E сопряженно расщепляема над A, т. е. A дополняема в E и все дополнения сопряжены. Для расширений первого и второго видов это утверждение вытекает из теоремы A [1], а также из теоремы 2 [2] и теоремы 4 [3], а для третьего вида оно совпадает с одной из основных теорем работы [4].

В настоящей работе рассматриваются расширения, объединяющие все три отмеченных вида расширений, и устанавливается теорема об их сопряженной расщепляемости. Основную роль в ее доказательстве играет лемма 4, позволяющая находить E-гипертривиальные образы ядра A расширения E и, тем самым, осуществлять редукцию к трем выделенным выше видам расширений.

2. Напомним некоторые необходимые в дальнейшем понятия. На ядро расширения A можно смотреть как на G-модуль, где $G = E/A$ — гиперцентральная группа. G-фактором модуля A называется G-модуль B/C, где B и C — подмодули A; G-фактор вида A/C называется G-образом A. Будем говорить, что модуль A G-гипертривиален, если он обладает возрастающим рядом подмодулей с G-тривиальными факторами, т. е. в факторах ряда элементы группы G действуют тождественно. Это понятие непосредственно связано с понятием гиперцентрального корадикала группы, так как ввиду гиперцентральности группы $G = E/A$ подгруппа A в том и только том случае является гиперцентральным корадикалом группы E, когда G-модуль A не имеет ненулевых G-гипертривиальных образов.

Напомним также теорему о Z-разложении ([5], теорема 1′), которая будет использоваться в работе: произвольный $\min - G$-модуль A над гиперцентральной группой G обладает прямым разложением $A = Z \oplus Z^*$, где Z — G-гипертривиальный подмодуль, подмодуль Z^* не имеет ненулевых G-тривиальных факторов. Это разложение единственно и называется Z-разложением модуля A.

Понятие ранга группы, встречающееся в работе, известно. Если ранг каждой p-секции группы конечен для любого простого p, то будем говорить, что группа имеет конечные секционные ранги. Абелева группа тогда и только тогда имеет конечные секционные ранги, когда ранги всех ее примарных компонент, а также фактора по периодической части конечны.

По аналогии с обозначением взаимного коммутанта для G-модуля A символом $[A, G]$ обозначается подгруппа, порожденная в A всеми элементами вида $a(g - 1)$, $a \in A$, $g \in G$.

3. В следующих ниже леммах 1 — 4 G — гиперцентральная группа, A — G-модуль.

Лемма 1. *Если A обладает таким $\min - G$-подмодулем B, что группа A/B периодическая и имеет конечные секционные ранги, то A обладает Z-разложением.*

Доказательство. Пусть $A/B = \bigoplus\limits_i A_i/B$ — разложение группы A/B в прямую сумму примарных компонент. Группа A_i/B черниковская, значит, $A_i - \min - G$-модуль и потому A_i обладает Z-разложением: $A_i = Z_i \oplus Z_i^*$. Модуль A обладает прямым разложением $A = Z \oplus Z^*$, где $Z = \sum\limits_i Z_i$, $Z^* = \sum\limits_i Z_i^*$, которое является искомым Z-разложением.

Лемма 2. *Если A конечнопорожденный G — модуль и $A = [A, G]$, то $C_A(G) = 0$.*

Доказательство. Пусть $C_A(G) \neq 0$ и $b \in C_A(G)$, $b \neq 0$. Если $a_1, \ldots, a_n$ — конечное множество порождающих элементов G-модуля A, то в силу предположения $A = [A, G]$ в G существует такая конечнопорожденная подгруппа K, что все элементы $a_1, \ldots, a_n$, b входят в $[A_1, K]$, где $A_1 = \langle a_1K, \ldots, a_nK \rangle$ — K-подмодуль, порожденный $a_1, \ldots, a_n$. Из теоремы о финитной аппроксимируемости конечнопорожденного расширения абелевой группы с помощью нильпотентной [6] вытекает существование в A_1 K-подмодуля D конечного индекса $|A_1 : D|$, не содержащего элемент b.

Конечный K-фактор A_1/D обладает Z-разложением $A_1/D = Z/D \oplus Z^*/D$. Так как $b \in C_A(G)$, то $b \in Z \setminus D$ и поэтому Z/D — ненулевой фактор. Отсюда ввиду определения Z-разложения следует соотношение $A_1 \neq [A_1, K]$. С другой стороны, K-подмодуль $[A_1, K]$ содержит элементы $a_1, \ldots, a_n$ и, следовательно, $[A_1, K]$ должен совпадать с A_1. Противоречие.

Следствие. *Если A имеет такой ненулевой G-гипертривиальный подмодуль B, что A/B конечнопорожденный G-модуль, то A обладает ненулевым G-гипертривиальным образом.*

Действительно, представим A в виде суммы $A = B + A_1$, где A_1 — конечнопорожденный подмодуль. Если $A \neq A_1$, то A/A_1 — искомый G-гипертривиальный образ в силу G-изоморфизма $A/A_1 \simeq B/B \cap A_1$. Если $A = A_1$, то A — конечнопорожденный модуль и тогда с учетом соотношения $C_B(G) \neq 0$ из леммы 2 вытекает, что $A \neq [A, G]$, и поэтому $A/[A, G]$ — искомый образ.

Лемма 3. *Если A имеет такой ненулевой G-гипертривиальный* min — G-*подмодуль B, что A/B — группа с конечными секционными рангами, то A обладает ненулевым G-гипертривиальным образом.*

Доказательство. Ввиду условия для фактора A/B можно выбрать такое конечное множество элементов $a_1, \ldots, a_n$, что группа $A/B + A_1$, где $A_1 = \langle a_1G, \ldots, a_nG \rangle$, периодическая.

Если $B \nless A_1$, то A/A_1 содержит ненулевой G-гипертривиальный min — G-подмодуль $B + A_1/A_1$, фактор по которому изоморфен $A/B + A_1$ и поэтому является периодической группой конечных секционных рангов. Следовательно, по лемме 1 A обладает Z-разложением, откуда вытекает существование искомого фактора (изоморфного G-гипертривиальному члену Z-разложения).

Если $B < A_1$, то $C_{A_1}(G) \neq 0$ и тогда по лемме 2 $A_1 \neq [A_1, G]$. Возьмем в конечнопорожденной абелевой группе $A_1/[A_1, G]$ некоторую собственную подгруппу $D/[A_1, G]$ конечного индекса. Так как A/A_1 — периодическая группа конечных секционных рангов, то по лемме 1 A/D обладает Z-разложением, откуда снова вытекает существование искомого фактора.

Лемма 4. *Пусть A обладает конечным рядом подмодулей и для каждого фактора этого ряда выполняется одно из следующих трех условий:* min — G, max — G, *аддитивная группа фактора имеет конечные секционные ранги. Тогда, если A содержит ненулевой G-гипертривиальный подмодуль, то A обладает ненулевым G-гипертривиальным образом.*

Доказательство. Пусть B — G-гипертривиальный подмодуль модуля A, $B \neq 0$. Покажем сначала, что B обладает ненулевым min — G-образом. Действительно, исходный ряд подмодулей модуля A индуцирует в B ряд с факторами того же типа, поэтому в B можно найти такой собственный подмодуль B_1, что B/B_1 удовлетворяет либо условию min — G, либо max — G, либо группа B/B_1 имеет конечные секционные ранги. В первом случае B/B_1 — искомый min — G-образ. Рассмотрим третий случай: группа B/B_1 имеет конечные секционные ранги. Выделим в B/B_1 такой конечнопорожденный подмодуль B_2/B_1, что группа B/B_2 периодическая. Если $B \neq B_2$, то можно указать простое число p, определяющее p'-компоненту B_3/B_2 группы B/B_2, не совпадающую с B/B_2. Тогда B/B_3 — G-фактор, аддитивная группа которого черниковская и, следовательно, B/B_3 — min — G-образ модуля B. Если же $B = B_2$, то B/B_1 — конечнопорожденный G-модуль и его произвольный максимальный подмодуль M/B_1 имеет ввиду G-гипертривиальности модуля B индекс, равный некоторому простому числу. В частности, индекс $|B:M|$ конечен и, значит, в рассматриваемом случае B/M — искомый min — G-образ. Наконец, если для фактора B/B_1 реализуется вторая возможность, т. е. он удовлетворяет условию max — G, то B/B_1 — конечнопорожденный G-модуль и для него существование min — G-образа было доказано выше. Таким образом, установлено, что B обладает ненулевым min — G-образом; обозначим его B/C_1.

Рассматривая в фактор-модуле A/B ряд подмодулей, индуцированный существующим в A по предположению леммы рядом, получим конечный ряд подмодулей

$$B = A_0 < A_1 < \ldots < A_n = A, \tag{1}$$

соединяющий B с A. Так как модуль A_1/C_1 содержит ненулевой G-гипертривиальный min — G-подмодуль B/C_1 и A_1/B удовлетворяет одному из трех условий, указанных в формулировке леммы, то, применяя к A_1/C_1 одно из утверждений, а именно, теорему о Z-разложении в случае min — G, следствие леммы 2 в случае max — G, лемму 3 в случае, когда A_1/B имеет конечные секционные ранги, устанавливаем существование ненулевого G-гипертривиального образа A_1/B_1, модуля A_1. Далее с помощью рассуждений, аналогичных использованным в начале доказательства этой леммы для подмодуля B, устанавливаем существование ненулевого min — G-образа A_1/C_2 модуля A_1/B_1, где $B_1 \leqslant C_2$. После этого переходим к фактор-модулю A_2/C_2 и так же, как и выше, находим его G-гипертривиальный образ A_2/B_2, где $C_2 \leqslant B_2$. Повторяя аналогичные рассуждения и продвигаясь при этом вправо по ряду (1), через n шагов придем к некоторому G-гипертривиальному образу модуля $A_n = A$. Лемма доказана.

4. Теорема. *Пусть группа E есть расширение абелевой нормальной подгруппы A с помощью гиперцентральной группы и обладает конечным рядом подгрупп*

$$1 = A_0 < A_1 < \ldots < A_n = A, \quad A_i \lhd E, \quad 0 \leqslant i \leqslant n, \tag{2}$$

каждый фактор которого удовлетворяет одному из следующих условий: 1) min — E; 2) max — E; 3) *фактор имеет конечный ранг и является группой без кручения. Тогда, если A — гиперцентральный корадикал группы E, то E сопряженно расщепляема над A.*

Доказательство. Заметим, что подгруппа A, рассматриваемая как G-модуль, где $G = E/A$, не может иметь ненулевых G-гипертривиальных факторов. В самом деле, если B/C — такой G-фактор, то ряд подгрупп (2) индуцирует в A/C ряд подмодулей, каждый фактор которого является G-образом соответствующего фактора ряда (2) и потому он удовлетворяет одному из трех условий, указанных в формулировке леммы 4. Тогда по лемме 4 A/C, а следовательно, и A обладают ненулевым G-гипертривиальным образом. Это противоречит тому, что A является гипертривиальным корадикалом группы E по предположению теоремы.

Покажем теперь, что для любого i группа E/A_i сопряженно расщепляема над A/A_i, $0 \leqslant i \leqslant n$. Пусть это уже известно для некоторого i, т. е. в E существует подгруппа E_1 такая, что $E = AE_1$, $A \cap E_1 = A_i$ и все подгруппы с этими свойствами сопряжены в E. Если докажем, что E_1/A_{i-1} в свою очередь сопряженно расщепляема над A_i/A_{i-1}, то отсюда будет следовать сопряженная расщепляемость E/A_{i-1} над A/A_{i-1} (свойство транзитивности сопряженной распределяемости). Выше было отмечено, что A не имеет ненулевых G-гипертривиальных факторов, где $G = E/A$, значит, A_i/A_{i-1} есть гиперцентральный корадикал группы E_1/A_{i-1}. Кроме того, по предположению теоремы фактор A_i/A_{i-1} удовлетворяет одному из условий 1—3, указанных в ее формулировке. В каждом из этих трех случаев сопряженная расщепляемость E_1/A_{i-1} над A_i/A_{i-1} имеет место ввиду трех известных результатов, отмеченных в начале работы. Таким образом, группа E/A_i сопряженно расщепляема над A/A_i, $0 \leqslant i \leqslant n$, и при $i = 0$ это доказывает теорему.

1. *Robinson D. J. S.* The vanishing of certain homology and cohomology groups // J. pure and appl. Algebra.— 1976.— **7**.— P. 145—167.
2. *Зайцев Д. И.* О расщепляемости расширений абелевых групп // Исслед. групп с заданными свойствами подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1981.— С. 14—25.
3. *Зайцев Д. И.* О расширениях абелевых групп / Конструктивное описание групп с заданными свойствами подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1980.— С. 16—40.
4. *Hartley B., Tomkinson M. J.* Splitting over nilpotent and hypercentral residuals // Math. Proc. Combridge Phil. Soc.— 1975.— **78**.— P. 215—226.
5. *Зайцев Д. И.* Гиперциклические расширения абелевых групп // Группы определяемые свойствами системы подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1979.— С. 16—37.
6. *Hall P.* On the finiteness of certain soluble groups // Proc. London Math. Soc.— 1959.— — **9**, N 36.— P. 595—622.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 17.09.87