

## О двух приближенных методах решения нелинейных задач Неймана

В данной работе предлагаются два итерационных метода решения следующей нелинейной задачи Неймана:

$$\Delta u := \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = f(x, u, D^\alpha u), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} := \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(n, x_j) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (2)$$

где  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  — некоторая ограниченная область с гладкой границей  $\partial\Omega \in C^2$ ,  $\alpha$  — мультииндекс  $1 \leq |\alpha| \leq 2$ , а  $n$  — внутренняя нормаль к  $\partial\Omega$ . Предположим, что коэффициенты  $a_{ij} \in C^2(\bar{\Omega})$ ,  $a_{ij} = a_{ji}$  удовлетворяют условию равномерной эллиптичности:  $\forall x \in \bar{\Omega}; \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \nu \sum_{i=1}^N \xi_i^2$ , где  $\nu > 0$  — некоторая константа.

Частные случаи задачи (1), (2) были изучены, например, в [1—4]. В пп. 1, 2 настоящей работы описаны нелинейный метод Зейделя и метод Зейделя — Ньютона для приближенного решения нелинейного операторного уравнения с линейной фредгольмовой частью:

$$Ax + F(x) = 0. \quad (3)$$

При этом получены некоторые обобщения результатов [1, 2]. В п. 3 нелинейная задача Неймана (1), (2) сведена к операторному виду (3). В п. 4 предложены конкретные алгоритмы решения задачи (1), (2).

**1. Нелинейный метод Зейделя.** Приведем следующий локальный вариант теоремы Адамара:

**Теорема 1.** Пусть оператор  $F : D \subset X \rightarrow Y$  непрерывно дифференцируем на открытом множестве  $D$ , содержащем открытый шар  $S(x_0, r)$  такой, что для всех  $x \in S(x_0, r)$ ,  $\| [F'(x)]^{-1} \| \leq \gamma$ . Если  $r > \gamma \| F(x_0) \|$ , то уравнение  $F(x) = 0$  имеет решение в  $S(x_0, r)$ .

Теорема 1 доказана в [5] для случая  $X = Y = \mathbb{R}^n$ . Однако она верна и для произвольных банаховых пространств  $X, Y$ .

Теорема 1 допускает обобщение на случай негладких операторов.

**Теорема 2.** Пусть оператор  $G : D \subset X \rightarrow Y$  непрерывно дифференцируем на открытом множестве  $D$ , содержащем замкнутый шар  $S = \bar{S}(x_0, r)$ , а оператор  $H : S \subset X \rightarrow Y$  липшиц-непрерывен с константой Липшица  $L \geq 0$ . Предположим, что для всех  $x \in S$   $\| [G'(x)]^{-1} \| \leq \gamma$ . Если  $\gamma L < 1$  и  $r(1 - \gamma L) > \gamma \| G(x_0) + H(x_0) \|$ , то уравнение  $G(x) + H(x) = 0$  имеет решение в  $S$ .

**Доказательство.** Положим  $r_0 = r(1 - \gamma L)$ ,  $S_0 = S(x_0, r_0)$  и  $F_0(x) = G(x) + H(x_0)$ . Имеем:  $\bar{S}_0 \subset S$ ,  $\| [F'_0(x)]^{-1} \| = \| [G'(x)]^{-1} \| \leq \gamma$ . Далее,  $\gamma \| F_0(x_0) \| = \gamma \| G(x_0) + H(x_0) \| < r(1 - \gamma L) = r_0$ , следовательно, по теореме 1 существует такой  $x_1 \in S_0$ , что  $F_0(x_1) = 0$ , т. е.  $G(x_1) + H(x_0) = 0$ . Допустим, что существуют такие  $x_k \in S$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $n \geq 1$ , что для всех  $0 \leq k \leq n$

$$\| x_{k+1} - x_k \| < r_k \equiv (\gamma L)^k r_0, \quad (4)$$

$$G(x_{k+1}) + H(x_k) = 0. \quad (5)$$

Положим  $r_n = (\gamma L)^n r_0$ ,  $S_n = S(x_n, r_n)$ ,  $F_n(x) = G(x) + H(x_n)$ . Для всех  $x \in \bar{S}_n$

$$\begin{aligned} \| x - x_0 \| &\leq \| x - x_n \| + \sum_{k=0}^{n-1} \| x_{k+1} - x_k \| \leq r_n + r_{n-1} + \dots + r_0 < \\ &< r_0 (1 - \gamma L)^{-1} = r, \end{aligned}$$

следовательно,  $\bar{S}_n \subset S$ . Отсюда следует, что для всех  $x \in \bar{S}_n$   $\| [F'_n(x)]^{-1} \| = \| [G'(x)]^{-1} \| \leq \gamma$ . Далее,  $\gamma \| F_n(x_n) \| = \gamma \| G(x_n) + H(x_n) \| = \gamma \| H(x_n) - H(x_{n-1}) \| \leq \gamma L \| x_n - x_{n-1} \| \leq \gamma L r_{n-1} = r_n$ . Поэтому по теореме 1 существует такой  $x_{n+1} \in S_n$ , т. е.  $\| x_{n+1} - x_n \| < r_n$ , что  $G(x_{n+1}) + H(x_n) = 0$ . Таким образом, существует последовательность  $\{x_n\} \subset S$ , обладающая свойствами (4), (5).

Из (4) следует, что  $x_k \rightarrow x^*$ ,  $k \rightarrow \infty$ . В силу (5) и непрерывности операторов  $G, H$  получим  $G(x^*) + H(x^*) = 0$ . Наконец,  $x^* \in S$  ибо  $x_n \in S$ . Теорема доказана. Вернемся к изучению уравнения (3). В силу фредгольмовости индекса нуль оператора  $A$  пространства  $X, Y$  разлагаются в прямые суммы замкнутых подпространств:  $X = X_1 \oplus X_2$ ,  $Y = Y_1 \oplus Y_2$ , где  $X_2 = \text{Ker } A$ ,  $Y_1 = \text{Im } A$  и  $\dim X_2 = \text{codim } Y_1 < \infty$ . Более того, сужение  $\hat{A}$  оператора  $A$  на  $X_1$  в силу теоремы Банаха имеет ограниченный обратный оператор. Обозначим через  $P : Y \rightarrow Y$  такой линейный непрерывный проектор, что  $\text{Im } P = Y_1$ ,  $\text{Ker } P = Y_2$ , а  $Q = I - P$ , где  $I$  — единичный оператор в  $Y$ . Очевидно, что  $\text{Im } Q = Y_2$ ;  $\text{Ker } Q = Y_1$ . Представим каждый элемент  $x \in X$  в виде суммы  $x = u + v$ , где  $u \in X_1$ ,  $v \in X_2$ .

Следуя [1] будем приближенно решать (3) следующим образом: Зная  $n$ -е приближение  $(x_0$  задано), будем строить  $(n + 1)$ -е приближение по формулам

$$\hat{A}u_{n+1} + PF(x_n) = 0, \quad (6a)$$

$$QG(u_{n+1} + v_{n+1}) = 0, \quad (6б)$$

$$x_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1}. \quad (6в)$$

Рассуждая аналогично [1] и используя вместо теоремы 1 теорему 2, приходим к следующей теореме, обобщающей результат [1].

**Теорема 3.** Пусть оператор  $G : D \subset X \rightarrow Y$  непрерывно дифференцируем на открытом множестве  $D$ , содержащем замкнутый шар  $S = \bar{S}(x_0, r)$  и для всех  $x \in S$   $\| PG'(x) \| \leq \alpha$ ,  $\| QG'(x) \| \leq \beta$ . Далее, пусть сужение  $QG'(x)$  на  $X_2$  имеет в  $S$  равномерно ограниченный обратный:  $\| [QG'(x)]_{X_2}^{-1} \| \leq \gamma$ ,  $x \in S$ . Пусть оператор  $H : S \subset X \rightarrow Y$  липшиц-непрерывен  $\| H(x) - H(y) \| \leq L \| x - y \|$ . Если  $q := \alpha(1 + \beta\gamma) \times \times \| \hat{A}^{-1} \| < 1$  и  $\delta < (1 - q)r$ , где невязка  $\delta := (1 + \beta\gamma) \| \hat{A}^{-1} \| \| Ax_0 +$

$+ PG(x_0) \| + \gamma \| QG(x_0) \|$ , то существует такое число  $\varepsilon_0 > 0$ , что для всех  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$  уравнение

$$Ax + G(x) + \varepsilon H(x) = 0 \quad (7)$$

имеет решение  $x_\varepsilon^*$ , которое может быть найдено нелинейным методом Зейделя (6а)—(6в) (где  $F = G + \varepsilon H$ ). При этом быстрота сходимости метода оценивается неравенством

$$\|x_n - x_\varepsilon^*\| < q_\varepsilon^n r, \quad (8)$$

где  $q_\varepsilon \in [0, 1)$  — некоторая константа, не зависящая от начального приближения  $x_0$ .

С помощью теоремы 3 доказываются полулокальная и локальная сходимости метода (6а)—(6в). (Доказательства этих утверждений приводить не будем.)

**2. Метод Зейделя — Ньютона.** Повторяя доказательство теоремы 5.2 [2] с некоторыми изменениями, получаем следующий результат.

**Теорема 4.** Предположим, что оператор  $F$  представим в виде  $F = G + \varepsilon H$ , где  $G: X \rightarrow Y$  непрерывно дифференцируем на открытом множестве  $D$ , содержащем замкнутый шар  $S = \bar{S}(x_0, r)$ , и оператор  $H: S \subset X \rightarrow Y$  липшиц-непрерывен с константой Липшица  $L > 0$ , а  $\varepsilon > 0$  — малый параметр. Далее, пусть выполнены следующие условия:

а)  $\|PG'(x)\| \leq \alpha$ ,  $\|QG'(x)\| \leq \beta$ ,  $\|QG'(x) - QG'(y)\| \leq \rho(\|x - y\|)$  для всех  $x, y \in S$ , где  $\rho$  — неотрицательная, непрерывная, неубывающая функция и  $\rho(0) = 0$ ;

б) сужение  $QG'(x)$  на  $X_2$  имеет равномерно ограниченный обратный в  $S$ :  $\| [QG'(x)]_{X_2}^{-1} \| \leq \gamma$ ,  $x \in S$ ;

в)  $q := 2\alpha\beta\gamma \|\hat{A}^{-1}\| + \gamma \int_0^1 \rho(\delta t) dt < 1$  и  $2\delta(1 - q)^{-1} < r$ , где невязка  $\delta :=$

$\beta\gamma \|\hat{A}^{-1}\| \|Ax_0 + PG(x_0)\| + \gamma \|QG(x_0)\|$ . Тогда существует такое число  $\varepsilon_0 > 0$ , что при любом  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$  последовательность  $\{x_n\}$ , построенная по формулам

$$\hat{A}u_{n+1} + PF(x_n) = 0, \quad (9а)$$

$$\hat{x}_n = u_{n+1} + v_n, \quad (9б)$$

$$v_{n+1} = v_n - [QG'(\hat{x}_n)]_{X_2}^{-1} QF(\hat{x}_n), \quad (9в)$$

$$x_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1}, \quad (9г)$$

сходится к некоторому решению  $x_\varepsilon$  уравнения (7); при этом справедлива оценка вида (8).

В качестве немедленного следствия получим теорему 2.1 [2] а из последней, в свою очередь, вытекает теорема 1 [6]. В заключение отметим, что решение уравнения (7) в условиях теорем 3 и 4 локально единственно.

**3. Операторная формулировка нелинейной задачи Неймана.** Будем называть элемент  $u^* \in W_2^2(\Omega)$  решением задачи (1), (2), если он является обобщенным решением следующей линейной задачи:

$$\mathcal{L}u = f(x, u^*, D^\alpha u^*), \quad x \in \Omega,$$

$$du/d\sigma = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Сведем задачу (1), (2) к операторному виду (3). Для этого положим  $X = \{u \in W_2^2(\Omega) : du/d\sigma = 0\}$ ;  $\| \|u\| \| := \left( \sum_{|\beta| \leq 2} \int_\Omega |D^\beta u|^2 dx \right)^{1/2}$   $Y = L_2(\Omega)$ ;  $\| \|y\| \| = \left( \int_\Omega |y|^2 dx \right)^{1/2}$ ;  $Au = -\mathcal{L}u$ ;  $F(u) = f(x, u, D^\alpha u)$ . В дальнейшем будут при-

няты следующие обозначения:  $\xi\eta = \sum_{i,j=1}^N \xi_i\eta_j$ ;  $|\xi| = \left(\sum_{i=1}^N \xi_i^2\right)^{1/2}$  для  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ ,

$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$  для  $u, v \in L_2(\Omega)$ . Приведем некоторые свойства операторов  $A, F$ .

**Лемма 1.**  $A : X \rightarrow Y$  является линейным ограниченным фредгольмовым оператором индекса нуль, причем  $\text{Ker } A = X_2$ ,  $\text{Im } A = Y_1$  и имеют место разложения:  $X = X_1 \oplus X_2$ ,  $Y = Y_1 \oplus Y_2$ , где  $X_1 = \{u \in X : \int_{\Omega} u dx = 0\}$ ,  $X_2 = \{u \in X : u = \text{const (п. в.)}\}$ ,  $Y_1 = \{y \in Y : \int_{\Omega} y dx = 0\}$ ,  $Y_2 = \{y \in Y : y = \text{const (п. в.)}\}$ .

Доказательство леммы 1 проводится стандартным путем. Отметим лишь, что при проверке включений  $\text{Ker } A \subset X_2$  и  $\text{Im } A \subset Y_1$  нужно воспользоваться обобщенной формулой интегрирования по частям [7], а при доказательстве обратного включения  $Y_1 \subset \text{Im } A$  — тем фактом, что линейная краевая задача

$$-\Delta u = y, \quad x \in \Omega, \quad (10a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (10б)$$

для всякого  $y \in Y_1$  имеет решение  $u \in X$  [7].

Если вместо всего пространства  $X$  рассматривается только его подпространство  $X_1$  то в некоторых ситуациях можно построить функцию Грина для задачи (10a), (10б) или по крайней мере получить априорную оценку  $\|u\| \leq \omega \|y\|$ . В этих случаях  $\|\hat{A}^{-1}\| \leq \omega$ . В дальнейшем величину  $\omega$  будем считать известной.

Определим линейные ограниченные проекторы  $P, Q : Y \rightarrow Y$  по формулам:  $Qy = \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} y dx$ ,  $P = I - Q$ , где  $\mu = \text{mes}(\Omega)$ , а  $I$  — единичный оператор в  $Y$ .

**Лемма 2.** Предположим, что функция  $f$  имеет вид  $f(x, u, \xi) = g(x, u, \xi) + \varepsilon h(x, u, \xi)$ , где  $\varepsilon > 0$  — малый параметр, а функция  $g, h : \Omega \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1$ ,  $0 \leq m \leq N(N+3)/2$ , удовлетворяют условиям:

а)  $g; \frac{\partial g}{\partial u_i}; \frac{\partial g}{\partial \xi_j}; h$  — равномерно непрерывны в области:  $\Delta = \{(x, u, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^m : |u| \leq R; |\xi| \leq R\}$ ; более того, для всех  $(x, u, \xi), (x, v, \eta) \in \Delta$ ,  $|g'_u(x, u, \xi)| \leq b$ ;  $|g'_\xi(x, u, \xi)| \leq b$ ;  $|h(x, u, \xi) - h(x, v, \eta)| \leq L(|u-v|^2 + |\xi-\eta|^2)^{1/2}$ ;

б) существует такая функция  $\varphi \in L_1(\Omega)$ , что  $\int_{\Omega} \varphi(x) dx > 0$  и  $g'_u(x, u, \xi) \geq \varphi(x) \forall (x, u, \xi) \in \Delta$ ;

в) выполняются соотношения

$$|g'_u(x, u, \xi) - g'_u(x, v, \eta)| \leq l(|u-v|^2 + |\xi-\eta|^2)^{1/2},$$

$$|g'_\xi(x, u, \xi) - g'_\xi(x, v, \eta)| \leq l(|u-v|^2 + |\xi-\eta|^2)^{1/2}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) оператор  $G(u) := g(x, u, D^\alpha u) : X \rightarrow Y$  непрерывно дифференцируем в шаре  $S = \{u \in X : \|u\| \leq R\}$ ; более того,  $\|G'(u)\| \leq \sqrt{2}b$ , следовательно,  $\|QG'(u)\| \leq \sqrt{2}b$ ,  $\|PG'(u)\| \leq 2\sqrt{2}b$ ; далее, оператор  $H(u) := h(x, u, D^\alpha u) : X \rightarrow Y$  липшиц-непрерывен, причем  $\|H(u) - H(v)\| \leq L\|u-v\|$ ;

2) сужение  $QG'(u)$  на  $X_2$  имеет в  $S$  равномерно ограниченный обратный:  $[QG'(u)]_{X_1} v = \frac{v}{\mu} \int_{\Omega} g'_u(x, u, D^\alpha u) dx$ ,  $u \in S$ ;  $v \in X_2$ ; более того,  $\|QG' \times \times (u)\|_{X_2}^{-1} \leq \gamma \mu$ , где  $\gamma = \left(\int_{\Omega} \varphi dx\right)^{-1}$ ;

$$3) \|QG'(u) - QG'(v)\| \leq \sqrt{\frac{2}{\mu}} l \|u - v\|, \quad u, v \in S.$$

Доказательство. 1. Нетрудно видеть, что  $G, H: S \subset X \rightarrow Y$  и для всех  $u \in S, v \in X$  производная по Фреше  $G'(u)$  определяется формулой

$$G'(u)v = g'_u(x, u, D^\alpha u)v + g'_\xi(x, u, D^\alpha u)D^\alpha v, \quad (11)$$

Из (11) вытекает, что  $\|G'(u)v\|^2 = \int_{\Omega} |G'(u)v|^2 dx \leq 2b^2 \int_{\Omega} (|v|^2 + |D^\alpha v|^2) dx \leq 2b^2 \|v\|^2$ , следовательно,  $\|G'(u)\| \leq \sqrt{2}b$ . Далее,

$$\|H(u) - H(v)\| = \left( \int_{\Omega} |H(u) - H(v)|^2 dx \right)^{1/2} \leq L \left\{ \int_{\Omega} (|u - v|^2 + |D^\alpha u - D^\alpha v|^2) dx \right\}^{1/2} \leq L \|u - v\|.$$

$$2. \text{ Для любых } u \in S, v \in X_2 \text{ имеем } [QG'(u)]_{X_2} v = \frac{v}{\mu} \int_{\Omega} g'_u(x, u, D^\alpha u) dx.$$

Поэтому в силу условия (б)  $\|[QG'(u)]_{X_2} v\| = \frac{|v|}{\sqrt{\mu}} \left| \int_{\Omega} g'_u(x, u, D^\alpha u) dx \right| \geq \frac{|v|}{\sqrt{\mu}} \int_{\Omega} \varphi dx = \frac{\gamma^{-1}|v|}{\sqrt{\mu}} = (\gamma\mu)^{-1} \|v\|$ . Таким образом,  $\|[QG'(u)]_{X_2}^{-1}\| \leq \gamma\mu$ .

3. Согласно условию (в)  $\|[QG'(u) - QG'(v)] w\| = \sqrt{\mu} \|[QG'(u) - QG'(v)] w\| = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left| \int_{\Omega} [g'_u(x, u, D^\alpha u) - g'_u(x, v, D^\alpha v)] w dx + \int_{\Omega} [g'_\xi(x, u, D^\alpha u) - g'_\xi(x, v, D^\alpha v)] D^\alpha w dx \right| \leq \frac{l}{\sqrt{\mu}} \int_{\Omega} (|u - v|^2 + |D^\alpha u - D^\alpha v|^2)^{1/2} \times (|w| + |D^\alpha w|) dx \leq \frac{l}{\sqrt{\mu}} \left\{ \int_{\Omega} (|u - v|^2 + |D^\alpha u - D^\alpha v|^2) dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\Omega} (|w| + |D^\alpha w|)^2 dx \right\}^{1/2} \leq \sqrt{\frac{2}{\mu}} l \|u - v\| \|w\|$ . Таким образом,

$$\|QG'(w) - QG'(v)\| \leq \sqrt{\frac{2}{\mu}} l \|u - v\|.$$

4. Итерационные методы решения нелинейных задач Неймана. Рассмотрим задачу (1), (2) в случае, когда  $f = g + \varepsilon h$ . Сначала применим нелинейный метод Зейделя. Заметим прежде всего, что в силу (6б) при  $n \geq 1$   $PF(x_n) = F(x_n)$ . Пусть  $u_0 \in S$  — некоторое начальное приближение. Пусть  $k$ -е приближение  $x_k, k \geq 0$ , уже известно. Положим  $u_k = w_k + v_k$ , где  $w_k \in X_1, v_k \in X_2$  и

$$f_0(x) := f(x, u_0, D^\alpha u_0) - \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} f(u, u_0, D^\alpha u_0) dx; \quad f_k(x) := f(x, u_k, D^\alpha u_k), \quad k \geq 1,$$

$$g_0(x) := g(x, u_0, D^\alpha u_0) - \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} g(x, u_0, D^\alpha u_0) dx.$$

Согласно нелинейному методу Зейделя (6а)—(6в)  $w_{k+1} \in X_1$  определяется из следующей линейной задачи:

$$\mathcal{L}w_{k+1} = f_k(x), \quad x \in \Omega, \quad (12a)$$

$$\frac{\partial w_{k+1}}{\partial \sigma} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (12б)$$

а поправка  $v_{k+1} \in X_2$  находится из скалярного уравнения

$$\int_{\Omega} f(x, w_{k+1}(x) + v_{k+1}, D^{\alpha} w_{k+1}) dx = 0, \quad (12в)$$

наконец,

$$u_{k+1}(x) = w_{k+1}(x) + v_{k+1}. \quad (12г)$$

Заметим, что предложенный в работе [3] метод для решения задачи  $-\Delta u + f(u) = g(x)$ ,  $x \in \Omega$ ,  $du/dn = h(s)$ ,  $s \in \partial\Omega$ , является нелинейным методом Зейделя. Эффективность этого метода проверяется в работе [3] на многих конкретных примерах.

**Теорема 5.** Пусть выполнены условия а), б) леммы 1. Более того, пусть:  $q := 2\sqrt{2}b(1 + \sqrt{2}b\gamma\mu) \omega < 1$  и  $\delta < (1 - q)r$ , где  $r = R - \|u_0\|$ ,  $\delta := (1 + \sqrt{2}b\gamma\mu) \|\omega\| \|g_0 + g_0\| + \gamma \left| \int_{\Omega} g(x, u_0, D^{\alpha} u_0) dx \right|$ .

Тогда при достаточно малом  $\varepsilon > 0$  процесс (12а)—(12г) сходится к некоторому решению задачи (1), (2); при этом справедлива оценка (8).

**Доказательство.** Согласно теореме 3 при достаточно малом  $\varepsilon$  задача (7) при  $f = g + \varepsilon h$  имеет решение  $u_{\varepsilon} = w_{\varepsilon} + v_{\varepsilon}$ . При этом  $\|w_k - w_{\varepsilon}\| \rightarrow 0$ ,

$|v_k - v_{\varepsilon}| \rightarrow 0$ ,  $\|u_k - u_{\varepsilon}\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Поскольку  $\int_{\Omega} f_k(x) dx = 0$ , то при

$k \rightarrow \infty$   $\int_{\Omega} f(x, u_{\varepsilon}, D^{\alpha} u_{\varepsilon}) dx = 0$ . Для любого  $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$  в силу (12а), (12б)

$\langle w_{k+1}, \mathcal{L}\varphi \rangle = \langle f_k, \varphi \rangle$ , следовательно,  $\langle w_{\varepsilon}, \mathcal{L}\varphi \rangle = \langle f(x, u_{\varepsilon}, D^{\alpha} u_{\varepsilon}), \varphi \rangle$ . Так как  $\langle u_{\varepsilon}, \mathcal{L}\varphi \rangle = \langle w_{\varepsilon}, \mathcal{L}\varphi \rangle$ , то  $u_{\varepsilon}$  является решением задачи (1), (2). Оценка (8) вытекает непосредственно из теоремы 3.

Рассмотрим метод Зейделя—Ньютона. Пусть  $u_0 \in S$  задано, а при  $k \geq 0$   $k$ -е приближение  $u_k$  уже определено. Положим

$$u_k = w_k + v_k, \quad w_k \in X_1, \quad v_k \in X_2, \quad f_k(x) := f(x, u_k, D^{\alpha} u_k) - \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} f(x, u_k, D^{\alpha} u_k) \times \\ \times dx, \quad g_0(x) := g(x, u_0, D^{\alpha} u_0) - \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} g(x, u_0, D^{\alpha} u_0) dx.$$

Согласно методу (9а)—(9г)  $w_{k+1} \in X_1$  определяется из линейной задачи

$$\mathcal{L}w_{k+1} = f_k(x), \quad x \in \Omega, \quad (13а)$$

$$\partial w_{k+1} / \partial \sigma = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (13б)$$

а поправка  $v_{k+1} \in X_2$  находится из соотношения

$$v_{k+1} = v_k - \frac{\int_{\Omega} f(x, w_{k+1} + v_k, D^{\alpha} w_{k+1}) dx}{\int_{\Omega} g'_u(x, w_{k+1} + v_k, D^{\alpha} w_{k+1}) dx} \quad (13в)$$

и, наконец,

$$u_{k+1}(x) = w_{k+1}(x) + v_{k+1}. \quad (13г)$$

Из теоремы 4 вытекает следующая теорема.

**Теорема 6.** Пусть выполнены условия а)—в) леммы 2. Более того, предположим, что  $q := 8b^2\gamma\omega\mu + \gamma\delta\sqrt{\mu/2} < 1$ ,  $2\delta < (1 - q)r$ , где  $r = R - \|u_0\|$ ,  $\delta = \sqrt{2}b\gamma\mu\omega \|g_0 + g_0\| + \gamma \left| \int_{\Omega} g(x, u_0, D^{\alpha} u_0) dx \right|$ . Тогда при достаточно малом  $\varepsilon > 0$  процесс (13а)—(13г) сходится к некоторому решению задачи (1), (2); при этом справедлива оценка (8).

В заключение заметим, что частный случай  $a_{ij} = \delta_{ij}$  рассмотрен в [1—2, 4], а случай  $a_{ij} = k(x) \delta_{ij}$  изучен в [3].

1. Фам Ки Ань. Об одном приближенном методе решения квазилинейных операторных уравнений // Докл. АН СССР.— 1980.— 250, № 2.— С. 291—295.
2. *Fam Ki Anh*. On the Seidel — Newton method for solving quasilinear operator equations // Acta math. Viet.— 1982.— 7, N 2.— P. 111—126.
3. *Kannan R., Proskurovski W.* A numerical method for the monlinear Neumann problem // J Comput. Phys.— 1983.— 52, N 1.— P. 105—121.
4. *Фонарев А. А.* О решении одной нелинейной задачи Неймана // Изв. вузов.— 1982.— № 6.— С. 60—62.
5. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.— М.: Мир, 1975.— 558 с.
6. *Фам Ки Ань, Ву Зуи Тик.* Об одном итерационном методе решения общих периодических граничных задач // Укр. мат. журн.— 1983.— 35, № 3.— С. 348—352.
7. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.— 2-е изд., перераб.— М.: Наука, 1973.— 576 с.

Ханой. ун-т, Вьетнам

Получено 05.12.86

#### НОВЫЕ КНИГИ ИЗДАТЕЛЬСТВА «НАУКОВА ДУМКА»

**Королук В. С., Боровских Ю. В. ТЕОРИЯ  $U$ -СТАТИСТИК.**— 18 л.— 3 р.  
План 1989 г. (II кв.)

В монографии систематизированно развивается теория  $U$ -статистик. Представлены основные классические законы теории вероятностей, которые выполняются для  $U$ -статистик, приведены их различные обобщенные варианты и раскрыты статистические мотивы разнообразных применений. Представлены все новые отечественные и зарубежные результаты, полученные для  $U$ -статистик. Изложены асимптотические задачи аппроксимации, неравенства для моментов и характеристических функций  $U$ -статистик. Подробно выяснена мартингалная структура  $U$ -статистик, доказаны теоремы о слабой сходимости как в случае вырожденного ядра, так и невырожденного. Отражена связь асимптотики распределений  $U$ -статистик с центральной предельной теоремой в бесконечномерных пространствах.

Для специалистов в области теории вероятностей и математической статистики. Заказать эти издания можно в магазине издательства «Наукова думка» (252001, Киев 1, ул. Кирова, 4), который высылает книги иногородним заказчикам наложенным платежом.

Индивидуальные покупатели должны оформлять заказы на почтовых открытках, где указывается автор и название книги, номер по плану, необходимое количество экземпляров и адрес, по которому должна быть отправлена заказанная литература. Организации и предприятия оформляют заказы гарантийными письмами.

Прием предварительных заказов в магазине издательства прекращается за три месяца до выхода издания в свет.

Своевременное оформление заказов — гарантия приобретения заинтересовавшей Вас книги.