УДК 519.1

В. А. Павленко

Периодические орграфы и их свойства

1. В работах [1—4] в терминах теории графов доказывается известный результат А. Н. Шарковского [5] о периодических точках непрерывных функций на прямой. Орграфы периодических точек, рассматриваемые в [1—4], обладают одним интересным свойством. А именно: если орграф $G_f(a)$, построенный по n-периодической точке a непрерывной функции f, имеет неповторный цикл длины m, то функция f обладает периодической точкой периода m. В [3] ставится вопрос об описании таких орграфов. В работе [6] было найдено число неизоморфных орграфов, задаваемых n-периодическими точками непрерывных функций. В работах [3, 6] указывалось на взаимнооднозначное соответствие между орграфами, задаваемыми n-периодическими точками, и орграфами, порождаемыми циклическими подстановками длины n. В настоящей работе найдено необходимое и достаточное условие того, что орграф является периодическим, а также приведены некоторые свойства периодических орграфов.

2. Напомним определения из [6], которые нам понадобятся в дальнейшем. Пусть φ — циклическая подстановка на множестве $\{0, 1, \ldots, n\}$. Орграф G_φ, порожденный подстановкой φ, определяется следующим образом: G_φ имеет n вершин, занумерованых числами $1, 2, \ldots, n$; вершины i и j соединяются дугой (i, j) идущей из i в j тогда и только тогда, когда $\min\{\varphi(i-1), \varphi(i)\} \leqslant j-1$, $j \leqslant \max\{\varphi(i-1), \varphi(i)\}$.

Пусть $G(V)$ — n-вершинный орграф на множестве вершин V ($|V| = n$) и $\nu: V \leftrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ — нумерация его вершин. Как и в [6] через $G(V; \nu)$ обозначим орграф $G(V)$, вершины которого занумерованы в соответствии с нумерацией ν. Нумерацию ν назовем правильной, если существует такая циклическая подстановка φ, действующая на $\{0, 1, \ldots, n\}$, что порожденный ею орграф G_φ совпадает с $G(V; \nu)$. Орграфы, для которых существуют правильные нумерации вершин, называются периодическими. Через W_a обозначим множество тех вершин орграфа $G(V)$, которые смежны с a по заходящим в нее дугам; через V_a — множество тех вершин, которые смежны с a по исходящим из нее дугам; через $od(a)$ — полустепень исхода вершины a ($od(a) = |V_a|$), через $id(a)$ — полустепень захода вершины ($id(a) = |W_a|$).

3. Сформулируем ряд утверждений непосредственно вытекающих из определения периодического орграфа.

Лемма 1. *Пусть $G(V)$ — n-вершинный ($n \geqslant 2$) периодический орграф, $m(G)$ — число его дуг. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\forall a \in V$ ($id(a) \geqslant 1$ *и* $od(a) \geqslant 1$);
2) $\exists a \in V$ ($id(a) = 2$;
3) $n + 1 \leqslant m(G) \leqslant \begin{cases}(n+1)^2/2, & \text{если } n \text{ — нечетно,}\\ n(n+2)/2, & \text{если } n \text{ — четно.}\end{cases}$

Доказательство. Утверждение 1 очевидным образом следует из определения периодического орграфа.

2. Пусть $\nu: \{1, 2, \ldots, n\} \to V$ — правильная нумерация вершин орграфа $G(V)$, при которой орграф $G(V; \nu)$ порождается циклической подстановкой φ. Покажем, что либо полустепень захода вершины номера 1 либо вершины номера n орграфа $G(V; \nu)$ равна 2. Заметим, что $id(1) \leqslant 2$ и $id(n) \leqslant 2$, в противном случае подстановка φ должна отображать два различных числа в нуль, если $id(1) > 2$, и в n, если $id(n) > 2$, что невозможно. Предположим, что $id(1) = id(n) = 1$. Пусть для некоторого i $\varphi(i) = 0$. Тогда $i \in W_1$. Если $i < n$, то $i + 1 \in W_1$, поскольку $\varphi(i+1) > 0$. что противоречит нашему предположению. Таким образом, $i = n$ и $\varphi(n) = 0$. Аналогично показывается, что $W_n = \{1\}$ и $\varphi(0) = n$. Тогда подстановка φ имеет цикл $(0, n)$, что при $n \geqslant 2$ невозможно. Следовательно, либо $id(1) = 2$, либо $id(n) = 2$.

3. Пусть, по-прежнему, ν — правильная нумерация вершин орграфа $G(V)$ и φ — циклическая подстановка, порождающая $G(V; \nu)$. Из утверждений 1 и 2 следует, что $m(G) \geqslant n + 1$.

Покажем, что для степени захода вершины номера j орграфа $G(V; \nu)$ выполняется неравенство $id(j) \leqslant 2\min\{j, n+1-j\}$. Напомним, что дуга (q, j) принадлежит орграфу $G(V; \nu)$ тогда и только тогда, когда $\min\{\varphi(q-1), \varphi(q)\} \leqslant j - 1$, $j \leqslant \max\{\varphi(q-1), \varphi(q)\}$. Подстановка φ очевидным образом разбивает множество $\{0, 1, \ldots, n\}$ на два подмножества: $A = \{q' \mid \varphi(q') \leqslant j - 1\}$ и $B = \{q'' \mid \varphi(q'') \geqslant j\}$. Очевидно, $|A| = j$ и $|B| = n + 1 - j$. Если пара чисел $\langle i-1, i\rangle$ такова, что одно из них принадлежит A, а другое — B, то дуга (i, j) принадлежит орграфу $G(V; \nu)$. Легко видеть, что пар чисел $\langle i-1, i\rangle$, одно из которых принадлежит A, другое — B, можно составить не более чем $2\min\{j, n+1-j\}$. Поэтому $|W_j| = id(j) \leqslant 2\min\{j, n+1-j\}$. Таким образом,

$$m(G) = \sum_{j=1}^{n} id(j) \leqslant \begin{cases}(n+1)^2/2, & \text{если } n \text{ — нечетно;}\\ n(n+2)/2, & \text{если } n \text{ — четно.}\end{cases}$$

Лемма доказана.

4. В этом пункте рассматриваются орграфы, имеющие вершину с полустепенью захода равной 2, поскольку орграфы, не имеющие таких вершин, заведомо не являются периодическими.

Пусть $G(V)$ — n-вершинный орграф, a — его вершина с полустепенью захода $id(a) = 2$. Через $S(G, a)$ обозначим последовательность множеств

$\{A_i\}_{i=1}^{n+1}$, $A_i \subset V$, построенную по вершине a и орграфу $G(V)$ следующим образом: $A_1 = W_a$ и для $i = \overline{1, n}$

$$A_{i+1} = \begin{cases} W_{x_i} \Delta W_{y_i}, & \text{если } A_i = \{x_i, y_i\}; \\ W_{x_i}, & \text{если } A_i = \{x_i\}; \\ \varnothing \text{ — в} & \text{остальных случаях,} \end{cases}$$

где Δ — операция симметрической разности множеств.

С последовательностью $S \equiv S(G, a)$ свяжем неориентированный граф $\Gamma(S)$. Множество вершин графа $\Gamma(S)$ совпадает с множеством вершин орграфа $G(V)$. Множество ребер графа $\Gamma(S)$ задается множествами $A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_{n+1}$ следующим образом: если $A_i = \{x_i, y_i\}$, то в $\Gamma(S)$ имеется ребро, соединяющее вершины x_i и y_i; если $A_i = \{x_i\}$, то в графе $\Gamma(S)$ при вершине x_i имеется петля.

Теорема 1. *Для того чтобы n-вершинный орграф $G(V)$ является периодическим, необходимо и достаточно, чтобы в $G(V)$ имелась такая вершина a, что $id(a) = 2$ и граф $\Gamma(S)$, построенный по последовательности $S(G, a)$, являлся путем длины $n-1$ с петлями при концевых вершинах, одна из которых a.*

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма [6].

Лемма 2. *Пусть $G(V)$ — n-вершинный периодический орграф, ν — правильная нумерация его вершин, при которой орграф $G(V; \nu)$ порождается циклической подстановкой φ. Тогда*

$$W_1 = \begin{cases} \{\varphi^{-1}(0), \varphi^{-1}(0)+1\}, & \text{если } \varphi^{-1}(0) \neq n; \\ \{n\}, & \text{если } \varphi^{-1}(0) = n; \end{cases}$$

$$W_n = \begin{cases} \{\varphi^{-1}(n), \varphi^{-1}(n)+1\}, & \text{если } \varphi^{-1}(n) \neq 0; \\ \{1\}, & \text{если } \varphi^{-1}(n) = 0; \end{cases}$$

и для $i = \overline{1, n-1}$

$$W_i \Delta W_{i+1} = \begin{cases} \{\varphi^{-1}(i), \varphi^{-1}(i)+1\}, & \text{если } 0 < \varphi^{-1}(i) < n; \\ \{1\}, & \text{если } \varphi^{-1}(i) = 0; \\ \{n\}, & \text{если } \varphi^{-1}(i) = n. \end{cases}$$

Доказательство теоремы. Необходимость. Пусть $\nu : V \leftrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ — правильная нумерация вершин орграфа $G(V)$, при которой орграф $G(V; \nu)$ порождается циклической подстановкой $\varphi = (0, i_1, \ldots, i_{m-1}, n, i_{m+1}, \ldots, i_n)$. Будем считать, что $i_n \neq n$. Если $i_n = n$, т. е. $\varphi = (0, i_1, \ldots, i_{n-1}, n)$, то занумеруем вершины орграфа $G(V)$ в соответствии с нумерацией $g(\nu) = \mu$, где $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}$, т. е. i-й вершине орграфа $G(V, \nu)$ присвоим номер $n+1-i$, $i = \overline{1, n}$. Тогда орграф $G(V; \mu)$ порождается подстановкой $\varphi' = (0, j_1, j_2, \ldots, j_n)$, где $j_1 = n$, $j_k = n - i_k$, $k = \overline{2, n}$ [6]. Очевидно $j_n \neq n$. Поэтому наше предположение о нумерации ν и подстановке φ не теряет общности.

Из леммы следует, что последовательность $S(G, 1) = \{A_i\}_{i=1}^{n+1}$, построенная по вершине 1 и орграфу $G(V; \nu)$, имеет вид $A_1 = W_1 = \{i_n, i_n + 1\}$, $A_2 = W_{i_n} \Delta W_{i_n+1} = \{i_{n-1}, i_{n-1}+1\}, \ldots, A_{n-m+1} = \{i_{m+1}, i_{m+1}+1\}$, $A_{n-m} = \{n\}$, $A_{n-m+1} W_n = \{i_{m-1}, i_{m-1}+1\}, \ldots, A_n = \{i_1, i_1+1\}$, $A_{n+1} = W_{i_1} \Delta W_{i_1+1} = \{1\}$.

Легко видеть, что для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, множество $\{i, i+1\}$ является элементом последовательности $S(G, 1)$ и поэтому в графе $\Gamma(S)$ имеется ребро $(i, i+1)$, соединяющие вершины i и $i+1$. Очевидно также, что при вершинах 1 и n в $\Gamma(S)$ имеются петли. Таким образом, граф $\Gamma(S)$ является путем длины $n-1$, соединяющим вершины 1 и n, при которых имеются петли. Необходимость доказана.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть орграф $G(V)$ с множеством вершин $V = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ удовлетворяет условию теоремы. Не ограничивая общности будем считать, что граф $\Gamma(S)$, построенный по последовательности $S(G, a_1) = \{A_i\}_{i=1}^{n+1}$ является путем, последовательно проходящим через вершины $a_1, a_2, \ldots, a_n$, и при вершинах a_1 и a_n и только при них имеются петли.

А. Покажем, что последовательность $S(G, a_1)$ однозначно задает множества $W_{a_1}, W_{a_2}, \ldots, W_{a_n}$, т. е. орграф $G(V)$. Каждому ребру $(a_i, a_{i+1}\}$, $i = \overline{1, n-1}$, графа $\Gamma(S)$ соответствует некоторое множество $A_{j_i} = \{a_i, a_{i+1}\}$. В силу построения последовательности S, для $i = \overline{1, n-1}$ имеют место равенства $A_{j_i+1} = W_{a_i} \Delta W_{a_{i+1}}$. Учитывая, что $A_1 = W_{a_1}$, последовательно находим множества $W_{a_2} = A_1 \Delta A_{j_1+1}$, $W_{a_3} = W_{a_2} \Delta A_{j_2+1}, \ldots, W_{a_n} = W_{a_{n-1}} \Delta A_{j_{n-1}+1}$, что доказывает утверждение п. А.

Б. Покажем, что нумерация $\nu = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$ является правильной. Заметим, что петле (a_1, a_1) соответствует множество $A_{n+1} = \{a_1\}$ последовательности S. Если бы множество $\{a_1\}$ совпадало с множеством A_k из S, причем $k < n + 1$, то граф $\Gamma(S)$ был бы несвязным, поскольку тогда $A_{k+1} = A_1$, $A_{k+2} = A_2, \ldots, A_{n+1} = A_{n-k+1}$. Пусть петле (a_n, a_n) графа $\Gamma(S)$ соответствует множество $A_m = \{n\}$. Тогда последовательность $S(G, a_1)$ имеет вид

$$A_1 = W_{a_1} = \{a_{i_1}, a_{i_1+1}\},\ A_2 = W_{a_{i_1}} \Delta W_{a_{i_1+1}} = (a_{i_2}, a_{i_2+1}\}, \ldots, A_{m-1} = \\ = \{a_{i_{m-1}}, a_{i_{m-1}+1}\},\ A_m = \{a_n\},\ A_{m+1} = \{a_{i_{m+1}}, a_{i_{m+1}+1}\}, \ldots, A_n = \\ = \{a_{i_n}, a_{i_n+1}\},\ A_{n+1} = \{a_1\}.$$

Занумеруем вершины орграфа $G(V)$ в соответствии с нумерацией ν. Тогда последовательность $S(G(V; \nu), 1)$ будет иметь вид

$$A_1 = W_1 = \{i_1, i_1+1\},\ A_2 = \{i_2, i_2+1\}, \ldots, A_{m-1} = \{i_{m-1}, i_{m-1}+1\},\ A_m = \{n\}.\\ A_{m+1} = \{i_{m+1}, i_{m+1}+1\}, \ldots, A_n = \{i_n, i_n+1\},\ A_{n+1} = \{1\}.$$

В силу п. А орграф $G(V; \nu)$ однозначно задается последовательностью $S(G(V; \nu), 1)$. С другой стороны, последовательность $S(G(V; \nu), 1)$ однозначно задает подстановку $\varphi = (0, i_n, i_{n-1}, \ldots, i_{m+1}, n, i_{m-1}, \ldots, i_1)$. Таким образом орграф $G(V; \nu)$ порождается подстановкой φ, что доказывает достаточность. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Всякий периодический орграф является слабо связным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Пусть компонента $G_1(V_1)$ n-вершинного орграфа G_φ, порожденного циклической подстановкой φ, содержит вершину номера 1. Тогда последовательность множеств $S(G_\varphi, 1)$, построенная по вершине 1 орграфа G_φ, задает несвязный граф $\Gamma(S)$, поскольку $\forall i,\ j \in V_1,\ W_i \Delta W_j \subset V_1 \neq V$.

Следующая теорема относится к реберной связности периодических орграфов. Напомним, что реберной связностью $\lambda = \lambda(G)$ орграфа G называется наименьшее число дуг, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному орграфу.

Т е о р е м а 2. *Если периодический орграф G имеет $n = 2k$ вершин, то $\lambda(G) \geqslant 2$. Если периодический орграф G имеет $n = 2k + 1$ вершин, то $\lambda(G) \geqslant 1$, причем если $\lambda(G) = 1$, то множество V вершин орграфа G разбивается на два подмножества $V_2 = \{a\}$, $V_1 = V \setminus \{a\}$ таких, что подграф G_1 орграфа $G(V)$, порожденный множеством V_1, имеет реберную связность $\lambda(G_1) = 2$; при вершине a имеется петля и из a в V_1 имеется только одна дуга.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что периодический n-вершинный орграф $G(V)$ имеет связность $\lambda(G) = 1$. Пусть ν — правильная нумерация его вершин. Это означает, что множество $\nu(V) = \{1, 2, \ldots, n\}$ вершин орграфа $G(V; \nu)$ разбивается на два непустых и непересекающихся множества V_1 и V_2 таких, что в $G(V; \nu)$ имеется только одна дуга γ, один конец которой принадлежит множеству V_1 а другой — V_2. Не ограничивая общности, будем считать, что вершина номера 1 имеет полустепень захода $\mathrm{id}(1) = 2$ и принадлежит множеству V_1.

Пусть дуга γ соединяет вершины $i \in V_1$ и $j \in V_2$. Если γ направлена от вершины i к вершине j, то последовательность $S(G(V; \nu), 1)$ определяет несвязный граф $\Gamma(S)$, поскольку $\forall p, q \in V_1$ множество $W_p \Delta W_q \subset V_1 \neq \neq \{1, 2, \ldots, n\}$.

Пусть дуга γ направлена от вершины j к вершине i. Рассмотрим случай, когда $|V_2| \geqslant 2$. Пусть $\{j, r\} \subseteq V_2$. Тогда в последовательности $S(G(V; \nu), 1)$ имеется множество, содержащее r. Пусть $A_m = \{r - 1, r\}$. Тогда $A_{m+1} = W_{r-1} \Delta W_r$. Если $r - 1 \in V_2$, то $A_{m+1} \subset V_2$ и, очевидно, множества $A_{m+2}, A_{m+3}, \ldots, A_{n+1}$ также являются подмножествами V_2, что невозможно, поскольку $A_{n+1} = \{1\}$. Если $r - 1 \in V_1$, то множество A_{m+1} состоит в точности из двух элементов, один из которых принадлежит V_1, а другой — V_2, поскольку $|W_{r-1}| \geqslant 1$, $|W_r| \geqslant 1$ (утверждение 1) и $W_{r-1} \cap W_r = \varnothing$. Тогда и каждое из множеств $A_{m+2}, \ldots, A_{n+1}$ должно содержать по два элемента, что невозможно. Таким образом, множество V_2 состоит только из одного элемента.

Пусть $V_2 = \{j\}$. Согласно утверждению 1 при вершине j должна быть петля. Тогда $W_j = \{j\}$ и из леммы 5 [6] следует, что $2j = n + 1$. Таким образом, при четном n реберная связность периодического графа $\lambda(G) \geqslant 2$.

Осталось показать, что при $n = 2k - 1$ существуют периодические n-вершинные орграфы с $\lambda = 1$. Пусть $n = 2k - 1$ и циклическая подстановка φ степени $2k$ такая, что 1) $\varphi(k - 1) = k$, $\varphi(k) = k - 2$; 2) $\forall i$, $0 \leqslant \leqslant i \leqslant k - 1$, $\varphi(i) \geqslant k$ и $\forall j$, $k \leqslant j \leqslant n$, $\varphi(j) \leqslant k - 1$.

Покажем, что в орграфе G_φ, порожденном подстановкой φ, имеется всего лишь две дуги, инцидентные вершине k: (k, k) и $(k, k - 1)$, т. е. $\lambda(G_\varphi) = 1$. Дуга (k, j) принадлежит G_φ тогда и только тогда, когда $\min\{\varphi(k - 1), \varphi(k)\} = k - 2 \leqslant j - 1$, $j \leqslant \max\{\varphi(k - 1), \varphi(k)\} = k$. Отсюда следует, что дуги (k, k) и $(k, k - 1)$ принадлежат G_φ. Дуга (j, k) принадлежит G_φ тогда и только тогда, когда $\min\{\varphi(j - 1), \varphi(j)\} \leqslant k - 1$, $k \leqslant \max\{\varphi(j - 1), \varphi(j)\}$. Подстановка φ выбрана такой, что при $j < k$ $\varphi(j) \geqslant k$, а при $j > k$ $\varphi(j) \leqslant k - 1$ и $\varphi(j - 1) \leqslant k - 1$. Поэтому дуга $(j, k) \in G_\varphi$, если только $j = k$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Для любого n-вершинного периодического орграфа G $2 \leqslant \lambda(G) \leqslant k$, если $n = 2k$, $1 \leqslant \lambda(G) \leqslant k + 1$, если $n = 2k + 1$.*

Доказательство. Нижние оценки следуют из теоремы 2. Оценки для $\lambda(G)$ сверху следуют из утверждения 3 и теоремы Уитни (см., например, [7, с. 60]).

Примером 7-вершинного периодического орграфа, реберная связность которого достигает верхней границы, является орграф G_h, порожденный циклической подстановкой $h = (0, 3, 6, 4, 1, 5, 7, 2)$. Легко убедиться, что $\lambda(G_h) = 4$.

1. *Periodic* Points and topological entropy of the one dimensional maps in global theory of dynamical systems / L. Block, J. Guckenheimer, M. Misiurewicz, L. Sang Yong // Lect. Notes Math.— 1980.— **819**.— P. 18—34.
2. *Straffin P. D.* Periodic points of continuous functions // Math. Mag.— 1978.— **51**, N 2. P. 99—105.
3. *Chung-Wu Ho, Morris Ch.* A graph theoretic proof of Sarkowsky's theorem on the periodic points of continuous function // Pacif. J. Math.— 1981.— **96**, N 2.— P. 361—370.
4. *Burkart U.* Interval mapping graphs and periodic points of continuous functions // J. Combin. Theory B.— 1982.— **32**, N 1.— P. 57—82.
5. *Шарковский А. Н.* Сосуществование циклов непрерывных преобразований прямой в себя // Укр. мат. журн.— 1964.— **16**, № 1.— С. 61—71.
6. *Павленко В. А.* О числе орграфов периодических точек непрерывного отображения отрезка в себя //Укр. мат. журн —1987.—**39**, № 5.—С. 592—598.
7. *Харари Ф.* Теория графов.— М. : Мир, 1973.— 302 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 20.03.86