УДК 517.53

Л. Е. Дундученко

Об отображении круговой многосвязной области на плоскость и круг с разрезами вдоль конечных прямолинейных отрезков

1. Обозначим через $\mathfrak{K}_n$, $n \geqslant 2$, расширенную комплексную z-плоскость с выброшенными замкнутыми кругами $|z - a_j| \leqslant R_j$, $j = 1, \ldots, n$, ограниченными окружностями $\Gamma_j = \{z; |z - a_j| = R_j\}$, $j = 1, \ldots, n$; $|a_j - a_k| > R_j + R_k$, $j \neq k$, $k = 1, \ldots, n$, так что $\infty \in \mathfrak{K}_n$. Через $\overline{\mathfrak{K}}_n$ обозначим замыкание $\mathfrak{K}_n$.

Рассмотрим задачу: найти однолистное отображение

$$w = f(z) \quad (w = u + iv) \tag{1}$$

$\mathfrak{K}_n$ на всю плоскость w с разрезами вдоль конечных отрезков l_k прямых

$$p_k u + q_k v = c_k, \tag{2}$$

где p_k, q_k, c_k — действительные постоянные и $|p_k| + |q_k| > 0$, $k = 1, \ldots, n$. Таким образом, $l_k \leftrightarrow \Gamma_n$, где ($\leftrightarrow$) знак взаимно однозначного соответствия, если на отрезке l_k различать левый и правый берег разреза.

Расположение отрезков l_k, $k = 1, \ldots, n$, на w-плоскости определяется конфигурацией области $\mathfrak{K}_n$ и нормировкой отображения (1) в некоторой фиксированной точке z-плоскости, например в точке ∞. А именно, положим, что в окрестности точки ∞ имеет место лораново разложение отображения (1):

$$f(z) = z + d_0 + d_1/z + d_2/z^2 + \ldots . \tag{3}$$

Итак, искомая функция (1) является однолистной и мероморфной в $\mathfrak{K}_n$ с единственным простым полюсом в точке ∞, где она нормирована разложением (3). Эта функция определяется краевыми условиями

$$p_k u(a_k + R_k e^{i\theta}) + q_k v(a_k + R_k e^{i\theta}) = c_k, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \tag{4}$$

где обозначения те же, что и в (2), $k = 1, \ldots, n$.

2. Перейдем к определению функции (1) по условиям (3) и (4). Для этого рассмотрим регулярную и однозначную в $\mathfrak{K}_n$ функцию

$$\varphi(z) \equiv f(z) - z, \tag{5}$$

где $f(z)$ — искомая функция (1). Пусть $\sigma_k = p_k - iq_k = \mathrm{const}_k$, $k = 1, \ldots, n$, (символ const_k означает постоянную, зависящую от k, $k = 1, \ldots, n$). Тогда условия (4) примут вид $\mathrm{Re}\,[\sigma_k f(a_k + R_k e^{i\theta})] = c_k$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $k = 1, \ldots, n$. С помощью этих условий находим граничные условия, которым подчинена функция (5):

$$\mathrm{Re}\,[\sigma_k \varphi(a_k + R_k e^{i\theta})] = c_k - \mathrm{Re}\,(a_k\sigma_k + \sigma_k R_k e^{i\theta}), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \; k = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Здесь σ_k, $k=1, \ldots, n$,— некоторые комплексные постоянные, характеризующие расположение отрезков — купюр — на w-плоскости.

Будем искать функцию (5), однозначную и регулярную в $\mathfrak{K}_n$, по ее краевым условиям (6). Это — известная задача Римана—Гильберта, и мы воспользуемся ее решением, предложенным в работе [1].

В соответствии с [1] определим постоянные ω_i через постоянные p_k, q_k, $k=1, \ldots, n$ (с точностью до слагаемых вида $2\pi l$, l — целое число) следующим образом:

$$\cos\omega_k = \frac{p_k}{\sqrt{p_k^2+q_k^2}}, \quad -\sin\omega_k = \frac{q_k}{\sqrt{p_k^2+q_k^2}}; \quad s_k = \frac{c_k}{\sqrt{p_k^2+q_k^2}}, \tag{7}$$

$k=1, \ldots, n$, так что ω_k не зависят от θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Нам понадобится функция $w=\psi(z)$, однозначная и мероморфная с единственным простым полюсом в точке ∞, нормированная разложением $\psi(z) = iz + \gamma_0 + \gamma_1/z + \gamma_2/z^2 + \ldots$ и подчиненная следующему условию: она однолистно отображает $\mathfrak{K}_n$ на всю w-плоскость с разрезами по конечным отрезкам прямых, параллельных мнимой оси, т. е. удовлетворяет краевым условиям (см. (7)) $\operatorname{Re}\psi(a_k + R_k e^{i\theta}) = \omega_k$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $k=1, \ldots$ $\ldots, n$. При этом обозначим

$$\operatorname{Im}\psi(a_k + R_k e^{i\theta}) = \Omega_k(\theta), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad k=1, \ldots, n. \tag{8}$$

Построение функции $\psi(z)$ осуществлено в работе [2], поэтому приведем лишь конечный результат (обозначения см. там же):

$$\psi(z) \equiv iz + i\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{k_1=1\\(k_1\neq k)}}^{n}\sum_{\substack{k_2=1\\(k_2\neq k_1)}}^{n}\ldots\sum_{\substack{k_\nu=1\\(k_\nu\neq k_{\nu-1})}}^{n}(\{k, k_1, \ldots, k_\nu, z\} - \{k, k_1, \ldots, k_\nu, \infty\}). \tag{9}$$

Исходя из этого результата, определяем постоянные ω_k, $k=1, \ldots, n$, по виду исходной области $\mathfrak{K}_n$ (если выбрать ω_i, $k=1, \ldots, n$, заранее, то тем самым будет определяться конфигурация исходной области $\mathfrak{K}_n$).

3. Учитывая непрерывность функции $\psi(z) - iz$ (где $\psi(z)$ — функция (9)) на $\partial\mathfrak{K}_n$, находим ее мнимую часть на $\partial\mathfrak{K}_n$:

$$\lambda_k(\theta) = \operatorname{Im}[\psi(z) - iz]_{z\in\Gamma_k} = \operatorname{Im}[\psi(a_k + R_k e^{i\theta}) - ia_k - iR_k e^{i\theta}] =$$
$$= \Omega_k(\theta) - \alpha_k - R_k\cos\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad k=1, \ldots, n, \tag{10}$$

где $\Omega_k(\theta)$ определены из (8), $a_k = \alpha_k + i\beta_k$ — аффиксы центров окружностей Γ_k, $k=1, \ldots, n$.

Используя (7) и (9), преобразуем краевые условия на $\varphi(z)$ т. е. условия (6), к виду

$$\operatorname{Re}[\varphi(a_k + R_k e^{i\theta})\exp(i\psi(a_k + R_k e^{i\theta}))] = \operatorname{Re}[\varphi(a_k + R_k e^{i\theta})\exp(i\omega_k - \Omega_k(\theta))] =$$
$$= \exp(-\Omega_k(\theta))\operatorname{Re}[\varphi(a_k + R_k e^{i\theta})e^{i\omega_k}] = \exp(-\Omega_k(\theta))[s_k - \operatorname{Re}(e^{i\omega_k}(a_k + R_k e^{i\theta}))],$$
$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad k=1, \ldots, n. \tag{11}$$

Для восстановления функции $\varphi(z)\,e^{i\psi(z)}$ формулу Шварца [3] применить еще нельзя, так как $\psi(z)$ мероморфна в $\mathfrak{K}_n$ (см. (9)). Поэтому рассмотрим следующую функцию, однозначную и регулярную в $\mathfrak{K}_n$:

$$\Phi(z) \equiv \varphi(z)\exp(i\pi(z)), \tag{12}$$

где $\pi(z) \equiv \psi(z) - iz$.

Составим для функции $\Phi(z)$ задачу Римана—Гильберта [1] следующим образом. Имеем

$$\operatorname{Re}[\varphi(a_k + R_k e^{i\theta})\exp(i\psi(a_k + R_k e^{i\theta}))] = \operatorname{Re}[\varphi(a_k + R_k e^{i\theta})\exp(i\pi(a_k +$$
$$+ R_k e^{i\theta}))e^{-a_k - R_k e^{i\theta}}] = \operatorname{Re}[\Phi(a_k + R_k e^{i\theta})e^{-a_k - R_k e^{i\theta}}] = \operatorname{Re}[\Phi(a_k +$$

$$+ R_k e^{i\theta}) e^{-\alpha_k - R_k\cos\theta - i\beta_k - iR_k\sin\theta}] = m_k(\theta)\operatorname{Re}\Phi(a_k + R_k e^{i\theta}) +$$
$$+ h_k(\theta)\operatorname{Im}\Phi(a_k + R_k e^{i\theta}),$$

где

$$\alpha_k + i\beta_k = a_k, \quad m_k(\theta) = e^{-R_k\cos\theta - \alpha_k}\cos(\beta_k + R_k\sin\theta),$$
$$h_k(\theta) = e^{-R_k\cos\theta - \alpha_k}\sin(\beta_k + R_k\sin\theta), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad k = 1, \ldots, n. \quad (13)$$

Очевидно, что $m_k(\theta)$, $h_k(\theta)$, $k = 1, \ldots, n$,— 2π-периодические функции, непрерывные на $[0, 2\pi]$.

Используя (11), приходим к следующей задаче Римана—Гильберта для функции (12): определить однозначную и регулярную в $\mathfrak{R}_n$ функцию $\Phi(z)$ по краевым условиям на $\partial\mathfrak{R}_n$ (см. (13)):

$$m_k(\theta)\operatorname{Re}\Phi(a_k + R_k e^{i\theta}) + h_k(\theta)\operatorname{Im}\Phi(a_k + R_k e^{i\theta}) =$$
$$= e^{-\Omega_k(\theta)}(s_k - \operatorname{Re}[e^{i\omega_k}(a_k + R_k e^{i\theta})]), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Решение этой задачи найдено в [1]. Оно имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} e^{-i\pi_1(z)} \Big(\sum_{k=1}^{n} \int_0^{2\pi} e^{-\Lambda_k(\theta)} \tilde{p}_k(\theta) F_k(z, a_k + R_k e^{i\theta})\, d\theta - A_\Phi + iB_\Phi \Big), \quad (14)$$

где функции F_k, Λ_k, $\tilde{p}_k$ и постоянная A_Φ определены в работах [1, 3], B_Φ — произвольная действительная постоянная, а функция $\pi_1(z)$ определяется следующим образом.

Пусть соотношения $\dfrac{m_k(\theta)}{\sqrt{m_k^2(\theta) + h_k^2(\theta)}} = m_k^*(\theta)$, $\dfrac{h_k(\theta)}{\sqrt{m_k^2(\theta) + h_k^2(\theta)}} = h_k^*(\theta)$, $\cos\tau_k(\theta) = m_k^*(\theta)$, $-\sin\tau_k(\theta) = h_k^*(\theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $k = 1, \ldots, n$, определяют функции $\tau_k(\theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $k = 1, \ldots, n$ (с точностью до слагаемого $2\pi l$, l — целое число). В работе [3] введены функции

$$\delta_{kj}(\theta) = \operatorname{Re} F_k(a_j + R_j e^{i\gamma}, a_k + R_k e^{i\theta}), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad k = 1, \ldots, n,$$

не зависящие от γ, $0 \leqslant \gamma \leqslant 2\pi$, $j = 1, \ldots, n$. Функция $\pi_1(z)$ задается формулой [1]:

$$\pi_1(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_0^{2\pi} \tau_k(\theta) F_k(z, a_k + R_k e^{i\theta})\, d\theta - A_\pi + iB_\pi,$$

в которой B_π — произвольная действительная постоянная, а

$$A_\pi = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_0^{2\pi} \tau_k(\theta)\, \delta_{kj}(\theta)\, d\theta, \quad j = 1, \ldots, n, \quad (15)$$

есть постоянная, не зависящая от j, $j = 1, \ldots, n$, [1, 3].

Согласно [1] справедливы формулы (см. выше)

$$\Lambda_k(\theta) = \operatorname{Im}\pi_1(a_k + R_k e^{i\theta}), \quad k = 1, \ldots, n;$$

$$\tilde{p}_k(\theta) = e^{-\Omega_k(\theta)} \frac{s_k - \operatorname{Re}[e^{i\omega_k}(a_k + R_k e^{i\theta})]}{\sqrt{m_k^2(\theta) + h_k^2(\theta)}}, \quad k = 1, \ldots, n;$$

наконец,

$$A_\Phi = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{2\pi} e^{-\Lambda_k(\theta)} \tilde{p}_k(\theta)\, \delta_{kj}(\theta)\, d\theta, \quad j = 1, \ldots, n, \quad (16)$$

есть постоянная, не зависящая от j, $j = 1, \ldots, n$.

Учитывая выражение функции $\Phi(z)$, построенной по формуле (14), находим, наконец, искомую функцию (1) в таком виде:

$$f(z) \equiv z + \Phi(z)\exp(iz - \psi(z)),$$

где $\psi(z)$ определяется формулой (9). Задача решена.

З а м е ч а н и е. Условия, в частности (15) и (16), определяют собою расположение отрезков-разрезов на w-плоскости, в которые переходят граничные окружности Γ_k, $k = 1, \ldots, n$.

4. Рассмотрим вторую задачу: найти однолистное отображение

$$w = F(z) \quad (w = u + iv) \tag{17}$$

$\mathfrak{K}_n$ на круг $|w| < R$ с разрезами вдоль отрезков радиусов, исходящих из центра круга.

Решение этой задачи строится аналогично решению первой задачи и сводится к решению некоторой частной задачи Римана—Гильберта [1].

Итак, пусть $F(z)$ удовлетворяет следующим условиям:

$F(z_0) = 0$, $z_0 \in \mathfrak{K}_n$, $z_0 \neq \infty$, z_0 — произвольная фиксированная точка области $\mathfrak{K}_n$;

$F(z)$ однолистна в $\mathfrak{K}_n$ и поэтому $F(z) = c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots$, где $c_1 \neq 0$ в окрестности точки z_0;

$F(z) = \mu_0 + \mu_1/z + \mu_2/z^2 + \ldots$, $\mu_0 \neq 0$ в окрестности точки $\infty \in \mathfrak{K}_n$;

$|F(a_n + R_n e^{i\theta})| = R = \text{const}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$;

$\arg F(a_k + R_k e^{i\theta}) = \nu_k = \text{const}_k$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $k = 1, \ldots, n-1$;

$|F(z)| < R$ при $z \in \mathfrak{K}_n$, $F(z)$ непрерывна в $\bar{\mathfrak{K}}_n$. Исходя из этих условий, изучаем свойства следующей функции:

$$\omega(z) = \ln\left[\frac{z - a_n}{z - z_0} F(z)\right], \quad z \in \mathfrak{K}_n, \quad \ln 1 = 0. \tag{18}$$

Покажем, что эта функция однозначна и регулярна в $\mathfrak{K}_n$. Для этого убедимся, прежде всего, в том, что функция под знаком логарифма в (18) не имеет ни нулей, ни полюсов в $\mathfrak{K}_n$.

Действительно, в точке z_0 при $z \to z_0$ имеем

$$\frac{z - a_n}{z - z_0} F(z) \equiv \frac{z - a_n}{z - z_0}(c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots) \equiv$$

$$\equiv (z - a_n)(c_1 + c_2(z - z_0) + \ldots) \to (z_0 - a_n)c_1 \neq 0.$$

Далее, в точке ∞ при $z \to \infty$ получаем

$$\frac{z - a_n}{z - z_0} F(z) \equiv \frac{z - a_n}{z - z_0}(\mu_0 + \mu_1/z + \mu_2/z^2 + \ldots) \to \mu_0 \neq 0.$$

В других точках области $\mathfrak{K}_n$ очевидно, что $\dfrac{z - a_n}{z - z_0} F(z) \neq 0$ ввиду однолистности функции $F(z)$ и того, что $a_n \notin \mathfrak{K}_n$, $|F(z)| < R$.

Исследуем теперь однозначность $\omega(z)$. Для этого проследим за изменением функции $\omega(z)$ при однократном обходе каждой из граничных окружностей Γ_k, $k = 1, \ldots, n$:

$$\omega(a_k + R_k e^{i\theta}) = \ln \rho_k(\theta) + i\nu_k + \ln \frac{a_k - a_n + R_k e^{i\theta}}{a_k - z_0 + R_k e^{i\theta}},$$

где $\rho_k(\theta) = |F(a_k + R_k e^{i\theta})|$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $k = 1, \ldots, n-1$.

Отсюда следует, что $\operatorname{Im}\omega(a_k + R_k e^{i\theta})$ получает нулевое изменение при однократном обходе окружности Γ_k, $k = 1, \ldots, n-1$, в то время как $\operatorname{Re}\omega(a_k + R_k e^{i\theta})$ — однозначная функция, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Далее, $\omega(a_n + R_n e^{i\theta}) = \ln(RR_n) + i(\theta + \Theta(\theta)) - \ln(a_n - z_0 + R_n e^{i\theta})$, где $\Theta(\theta) = \arg F(a_n + R_n e^{i\theta})$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Учитывая однолистность функции $F(z)$ в $\mathfrak{K}_n$, видим, что при однократном обходе окружности Γ_n приращение мнимой части $\omega(z)$ равно $\Delta_{\Gamma_n} \operatorname{Im}\omega(a_n + R_n e^{i\theta}) = -2\pi + 2\pi - 0 = 0$, так как точка z_0 лежит вне окружности Γ_n.

Осталось проверить регулярность $\omega(z)$, т. е. отсутствие полюсов у этой функции в $\mathfrak{K}_n$. Поскольку $F(z)$ ограничена в $\mathfrak{K}_n$, то проверим лишь точки z_0 и ∞. Но в этих точках $\omega(z)$ принимает конечные значения т. е.

она ограничена в окрестности и z_0, и ∞. Этим доказана регулярность $\omega(z)$ в $\mathfrak{K}_n$.

Теперь мы приходим к следующей задаче Римана—Гильберта для построения функции (18): найти однозначную и регулярную в $\mathfrak{K}_n$ функцию $\omega(z) \equiv u(z) + iv(z)$ по краевым условиям $m_k u_k(\theta) + h_k v_k(\theta) = r_k(\theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $k = 1, \ldots, n$, где $u_k(\theta) = \mathrm{Re}\,\omega(a_k + R_k e^{i\theta})$, $v_k(\theta) = \mathrm{Im}\,\omega(a_k + R_k e^{i\theta})$, $k = 1, \ldots, n$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, а постоянные m_k, h_k (не зависящие от θ) и функция r_k определяются соотношениями:

при $k = 1, \ldots, n-1$

$$m_k = 0, \quad h_k = 1, \quad r_k(\theta) = \nu_k + \arg \frac{a_k - a_n + R_k e^{i\theta}}{a_k - z_0 + R_k e^{i\theta}}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

а при $k = n$

$$m_n = 1, \quad h_n = 0, \quad r_n(\theta) = \ln(RR_n) - \ln|a_n - z_0 + R_n e^{i\theta}|, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

Решение этой задачи аналогично решению первой задачи, и поэтому мы его не рассматриваем.

Найдя $\omega(z)$, искомое отображение (29) найдем по формуле $w = F(z) \equiv \equiv \dfrac{z - z_0}{z - a_n} \exp(\omega(z))$, $z \in \mathfrak{K}_n$. Вторая задача также решена.

1. *Дундученко Л. Е.* О задаче Римана—Гильберта для многосвязной области // Докл. АН СССР.— 1971.— **196**, № 1.— С. 35—37.
2. *Голузин Г. М.* Решение основных плоских задач математической физики для случая уравнения Лапласа и многосвязных областей, ограниченных окружностями (метод функциональных уравнений) // Мат. сб.— 1934.— **41**, № 2.— С. 246—276.
3. *Зморович В. А.* Про узагальнення інтегральної формули Шварца на n-зв'язні кругові області // Допов. АН УРСР.— 1958, № 5.— С. 489—492.
4. *Дундученко Л. О.* Ще про формулу Шварца для n-зв'язної кругової області // Там же.— 1966, № 13.— С. 1383—1386.

Киев. высш. танк. инж. уч-ще
им. Маршала И. И. Якубовского

Получено 21.05.86