УДК 517.968.4

М. Д. Бабич (Ін-т кібернетики НАН України, Київ)

ПРО ВІДОКРЕМЛЕННЯ ІЗОЛЬОВАНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

We present the theoretical justification and a method for practical realization of the process of separation of solutions isolated in a bounded domain for some classes of nonlinear integral equations. We study the problems of construction of a sequence of approximation equations by the method of mechanical quadratures and of existence of solutions of these equations. We also present methods for approximate solution of these equations and obtain *a posteriori* error estimates.

Наведено теоретичне обгрунтування і практичну реалізацію процесу відокремлення ізольованих в обмеженій області розв'язків деяких класів нелінійних інтегральних рівнянь. Досліджено питання конструювання послідовності апроксимаційних рівнянь з допомогою методу механічних квадратур, існування розв'язків таких рівнянь, способи їх наближеного знаходження та апостеріорні оцінки похибки.

Розглядається нелінійне інтегральне рівняння (НІР) і ставиться задача про відокремлення ізольованих, обмежених за нормою розв'язків, на яких похідна Фреше оператора, що визначає ліву частину рівняння, обмежена зверху і знизу. Теоретичні основи розв'язання даної задачі виражаються двома теоремами, в першій із яких йдеться про існування розв'язків послідовності наближених рівнянь за даними існування розв'язків вихідного рівняння і збіжності методу переходу до наближених рівнянь, а в другій за даними існування (при фіксованому n) розв'язку наближеного рівняння доводиться існування відповідного йому розв'язку вихідного рівняння і дається апостеріорна оцінка близькості таких розв'язків. Наближений метод, що пропонується для розв'язування цієї задачі, полягає в тому, що інтегральне рівняння з допомогою квадратурної формули наближено замінюється скінченною системою нелінійних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь, невідомими в якій є значення шуканої функції у вузлах сітки квадратурної формули. Після знаходження усіх ізольованих розв'язків такої системи конструюються відповідні їм аналітичні наближені розв'язки вихідного інтегрального рівняння, що приймаються за центри замкнених куль, радіуси яких підлягають визначенню. На основі аналога теореми методу мінімальних похибок доводиться існування і дається практичний апарат для знаходження таких інтервалів значень радіусів куль, при кожному з яких куля буде містити один розв'язок вихідного рівняння, що відповідає даному наближеному. Таким чином реалізується відокремлення ізольованих розв'язків вихідного рівняння і отримується апостеріорна оцінка похибки кожного наближеного розв'язку.

1. Метод механічних квадратур для НІР типу Урисона. Розглянемо рівняння

$$u(x) - \int_0^1 K(x, y, u(y))\,dy - f(x) = 0, \tag{1}$$

де $u(x)$ — шукана функція, $K(x, y, u)$ і $f(x)$ — неперервні функції усіх своїх аргументів у замкненій області $\overline{\Omega} = \{ (x, y, u) \colon 0 \le x, y \le 1,\ |u| \le d < \infty \}$.

Задача полягає у знаходженні усіх ізольованих в області $\overline{\Omega}$ наближених розв'язків рівняння (1). Для цього застосуємо метод механічних квадратур

$$\int_0^1 z(y)\,dy = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn} z(y_{jn}) + r_n(z), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

де точки $y_{jn} \subset [0, 1]$ називаються вузлами квадратурної формули, причому припускається, що $\alpha_{jn} > 0$, $\alpha_{1n} + \alpha_{2n} + \ldots + \alpha_{nn} \leq \overline{\alpha} = \text{const}$, $0 \leq y_{1n} < y_{2n} < \ldots$ $\ldots < y_{nn} \leq 1$.

Квадратурний процес (2) називається збіжним, якщо залишковий (додатковий) член $r_n(z) \to 0$ при $n \to \infty$ для будь-якої функції $z(y)$, неперервної на відрізку $[0, 1]$.

Згідно з (2) рівняння (1) зводиться до наближеного рівняння

$$u(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn} K\big(x, y_{jn}, u(y_{jn})\big) + f(x), \tag{3}$$

аналітичні розв'язки якого визначаються рівністю

$$u_n^*(x) = \Phi_n \overline{\xi}_n^* := \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn} K\big(x, y_{jn}, \overline{\xi}_{jn}\big) + f(x), \tag{4}$$

де $\overline{\xi}_n^* = (\overline{\xi}_{1n}, \overline{\xi}_{2n}, \ldots, \overline{\xi}_{nn})$ — розв'язок системи рівнянь

$$\xi_{in} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{in} K\big(y_{jn}, y_{jn}, \xi_{jn}\big) + f(x_{in}), \quad i = \overline{1, n}, \tag{5}$$

що апроксимує рівняння (1), а $\Phi_n \overline{\xi}_n$ має вигляд

$$\Phi_n \overline{\xi}_n := \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn} K\big(x, y_{jn}, \xi_{jn}\big) + f(x).$$

Таким чином, замість розв'язку $u^*(x)$ рівняння (1) будемо шукати його значення у вузлах інтерполяції y_{jn}. Точні або наближені значення $\overline{\xi}_{jn} = u^*(y_{jn})$ визначаються із системи (5). Вектори $\overline{\xi}_n = (\xi_{1n}, \xi_{2n}, \ldots, \xi_{nn})$ розглядаються як елементи n-вимірного дійсного простору m_n або R_n.

Для знаходження міри близькості відповідних розв'язків рівняння (1) і системи (5) введемо лінійне відображення p_n, яке ставить у відповідність елементу простору $C[0, 1]$ елемент дійсного простору m_n, тобто для $u(x) \in C[0, 1]$

$$p_n u = \{u(y_{1n}), u(y_{2n}), \ldots, u(y_{nn})\} \in m_n. \tag{6}$$

Міру близькості розв'язків $u^*(x)$ і $\overline{\xi}_n^*$ визначимо величиною $\| p_n u^* - \overline{\xi}_n^* \|$, яку використаємо для означення поняття збіжності методу механічних квадратур.

Означення. *Будемо говорити, що метод механічних квадратур збігається, якщо для достатньо великих n існують розв'язки $\overline{\xi}_n^*$ систем* (5) *і для кожної послідовності $\{\overline{\xi}_n^*\}$ таких розв'язків при $n \to \infty$ виконується рівність*

$$\lim \rho\big(\overline{\xi}_n^*, p_n F\big) = 0, \tag{7}$$

де F — множина розв'язків рівняння (1).

2. Про існування розв'язків апроксимаційних рівнянь. Наведена схема переходу від рівняння (1) до системи рівнянь (5) вважається виправданою, якщо доведена теорема про існування при будь-яких або достатньо великих n розв'язків системи (5) за даними існування розв'язків рівняння (1) і збіжності методу переходу до систем рівнянь (5), що рівносильно збіжності квадратурного процесу.

При різних умовах і обмеженнях, що накладаються на елементи точного і наближеного рівнянь, вказані питання знайшли своє відображення у монографіях [1, 2]. Істотним моментом в цих дослідженнях є те, що в теоремах існування припускаються відомими два основних елементи — центр замкненої кулі як області єдиності розв'язку та її радіус, причому їх числові характеристики вважаються такими, що зумовлюють виконання достатніх умов цих теорем.

У наших дослідженнях центри замкнених куль визначаються як точні або наближені розв'язки апроксимаційних рівнянь, а числові значення радіусів цих куль підлягають знаходженню таким чином, щоб виконувались достатні умови використовуваних теорем.

У роботі [3] згадані вище теореми існування розв'язків доведені на основі локального методу мінімальних нев'язок [1].

У даній роботі для цієї мети використано метод мінімальних похибок [4]. Доцільність застосування аналога цієї теореми зумовлена тим, що вона має два варіанти, в одному з яких умова обмеженості знизу похідної вихідного оператора перевіряється не на всій кулі, а тільки на відомому елементі, що є її центром.

Отже, нехай потрібно знайти всі ізольовані розв'язки рівняння (1), представленого в операторному виді

$$Tu := u - \overline{T}u = 0, \tag{8}$$

де T — двічі диференційовний за Фреше нелінійний оператор, що діє з області свого визначення Q гільбертового простору H у цей же простір. Нехай u^* — один із розв'язків рівняння (8).

Метод мінімальних похибок полягає у побудові ітераційної послідовності згідно з [4] за формулою

$$u^{k+1} = u^k - \frac{\left\| Tu^k \right\|^2}{\left\| P_k^* Tu^k \right\|^2} P_k^* Tu^k, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{9}$$

де $P_k = T'(u^k)$ — лінійний обмежений оператор, а P_k^* — спряжений йому.

На відміну від [4] формулювання теореми існування і єдиності розв'язку рівняння (8) і збіжності ітераційного процесу (9) наведемо за умов, коли величини, що обмежують похідні $T'(u)$, $T''(u)$ у кулі $\overline{S}(u^0, r) = \{ u \in Q : \| u - u^0 \| \le r \}$, залежать від u^0 і r. Це буде використано при викладенні наступних результатів.

Теорема 1. *Нехай у замкненій кулі $\overline{S}(u^0, r)$ із заданими u^0 і r виконуються умови*

$$\| Tu^0 \| \le \eta, \tag{10}$$

$$\| T'(u) \| \le M(r, u^0), \quad \| T''(u) \| \le N(r, u^0), \tag{11}$$

$$\| T'(u) h \| \ge m(r, u^0) \| h \|, \quad m > 0, \quad \forall\, h \in H, \tag{12}$$

де η, $M(r, u^0)$, $N(r, u^0)$, $m(r, u^0)$ — такі константи, що забезпечують справедливість нерівностей

$$\gamma(r) = \frac{\eta N(r, u^0)}{m^2(r, u^0)} < 1, \tag{13}$$

$$\frac{2\eta}{m(r, u^0)} \le r. \tag{14}$$

Тоді рівняння (8) *у кулі $\overline{S}(u^0, r)$ має єдиний розв'язок u^*, до якого, почи-*

наючи з u^0, *монотонно і сильно збігається послідовність* $\{u^k\}$, *побудована згідно з* (9), *причому вірна оцінка похибки*

$$\| u^* - u^k \| \le \frac{\eta}{m(r, u^0)} \left[1 - \frac{m^2(r, u^0)}{M^2(r, u^0)} (1 - \gamma(r)) \right]^{k/2}. \tag{15}$$

Із умов теореми видно, що проблема полягає у знаходженні елемента u^0 і відповідних йому значень радіуса кулі r таких, які б забезпечували справедливість нерівностей (13), (14).

Щоб перейти до практичної сторони побудови елементів u^0 і відповідних їм значень радіуса r, спираючись на теорему 1, доведемо теорему про існування розв'язків (починаючи з деякого n_0) системи (5) на основі даних про існування розв'язків рівняння (1) і збіжність методу переходу до системи (5), і навпаки, теорему про існування розв'язків рівняння (1) за даними існування (при будь-якому фіксованому $n \ge n_0$) розв'язків системи (5), з якої випливає апостеріорна оцінка близькості відповідних розв'язків рівняння (1) і системи (5).

Надалі будемо вважати, що оператор T переводить множину неперервних в області $\overline{\Omega}$ функцій, що задовольняють умову $\| u \| \le d$, в $C[0, 1]$, а систему рівнянь (5) розглянемо як операторне рівняння

$$T_n \overline{\xi}_n := \overline{\xi}_n - \overline{T}_n \overline{\xi}_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

де $T_n \overline{\xi}_n = (T_{n1} \overline{\xi}_n,\ T_{n2} \overline{\xi}_n, \ldots, T_{nn} \overline{\xi}_n)$; $T_{ni} \overline{\xi}_n := \xi_{in} - \overline{T}_{ni} \overline{\xi}_n = \xi_{in} - \sum_{j=1}^{n} a_{jn} K(y_{in}, y_{jn}, \xi_{jn}) - f(x_{in})$, $i = \overline{1, n}$, причому оператор T_n переводить множину точок $\overline{\xi}_n = (\xi_{1n}, \ldots, \xi_{nn}) \in m_n$, що задовольняють умову $\| \overline{\xi}_n \| \le d$, в m_n.

Функцію $K(x, y, u)$ в області $\overline{\Omega}$ будемо вважати двічі неперервно диференційовною по змінній u. Звідси випливає, що нелінійні оператори T і T_n двічі диференційовні відповідно на будь-якому елементі $\omega \in C[0, 1]$, $\| \omega \| \le d$ і будь-якому елементі $\overline{\xi}_n \in m_n$, $\| \overline{\xi}_n \| \le d$, причому їх диференціали визначаються формулами

$$T'(\omega) h = h(x) - \int_0^1 K'_u(x, y, \omega(y)) h(y)\, dy, \quad h \in C[\overline{\Omega}], \tag{17}$$

$$T'_n(\overline{\xi}_n) \overline{\zeta}_n = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left[\delta_{ij}^{(n)} - \alpha_{jn} K'_u(y_{in}, y_{jn}, \xi_{jn}) \right] \overline{\zeta}_n \right\}_{i=1}^{n}, \quad \overline{\zeta}_n \in m_n, \tag{18}$$

$$T''(\omega) h h_1 = -\int_0^1 K''_{u^2}(x, y, \omega(y)) h(y) h_1(y)\, dy, \quad h, h_1 \in C[\overline{\Omega}] \tag{19}$$

($\delta_{ij}^{(n)}$ — символ Кронекера).

Норми величин, що надалі використовуються, відповідають просторам $C[0, 1]$, $L_2[0, 1]$ і m_n, або R_n.

Теорема 2. *Нехай виконані умови:*

1) *рівняння* (1) *має розв'язок* $u^*(x) \in C[0, 1]$;

2) *квадратурний процес* (2) *збігається, тобто* $r_n(z) \to 0$ *при* $n \to \infty$ *для будь-якої функції* $z(x) \in C[0, 1]$;

3) *функція* $K(x, y, u)$ *неперервна за всіма змінними в замкненій області*

$$\overline{\Omega}_1 = \{ (x, y, u) : \| u - u^*(y) \| \le r \}, \tag{20}$$

а функція $f(x)$ неперервна на $[0, 1]$;

4) *в кулі $\overline{S}(u^*, r) = \{ u \in C[0, 1] : \| u - u^* \| \le r \}$ функція $K(x, y, u)$ двічі диференційовна по змінній u, причому K'_u, K''_{u^2} неперервні за сукупністю змінних в області* (20);

5) *в точці $p_n u^*$ для оператора $T'_n(u)$, визначеного формулою* (18), *в нормі R_n виконуються нерівності*

$$\| T'_n(p_n u^*) \| \le \overline{M}_n, \tag{21}$$

$$\| T'_n(p_n u^*) p_n h \| \ge m \| p_n h \|, \quad h \in C[0, 1]; \tag{22}$$

6) *на будь-якому елементі $\overline{\xi}_n \in \overline{S}_n(p_n u^*, r) = p_n \overline{S}(u^*, r) = \{ \overline{\xi}_n \in m_n : \| \overline{\xi}_n - p_n u^* \| \le r \}$ похідна $T''_n(\overline{\xi}_n)$ задовольняє умову*

$$\| T''_n(\overline{\xi}_n) \|_{R_n} \le N_n(r, p_n u^*); \tag{23}$$

7) *існує така область $\overline{d}(r) \subset [0, \infty)$, що для будь-якого $r \in \overline{d}(r)$ буде виконуватись нерівність*

$$m - N_n(r, p_n u^*) r > 0. \tag{24}$$

Тоді справедливі такі твердження:

1. *Оператори $\overline{T}$, $\overline{T}'$, $\overline{T}_n$, $\overline{T}'_n$, що визначені згідно з формулами* (8), (16), (17), (18), *є цілком неперервними на кулях $\overline{S}(u^*, r)$ і $\overline{S}_n(p_n u^*, r)$, причому послідовності операторів $\overline{T}_n : \overline{S}_n(p_n u^*, r) \to m_n$ і $\overline{T}'_n(p_n u^*) \in L(m_n, m_n)$ компактно апроксимують відповідно оператори $\overline{T} : \overline{S}(u^*, r) \to C[0, 1]$ і $\overline{T}'(u^*) \in L(C[0, 1], C[0, 1])$.*

2. *Для операторів T_n і T'_n в кулі $\overline{S}_n(p_n u^*, r)$ вірні оцінки, обчислені в нормі R_n:*

$$\| T_n p_n u^* \| \le \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left| r_n \left[K\left(y_{in}, y, u^*(y) \right) \right] \right|^2 \right\}^{1/2} = \overline{\eta}(n, u^*), \tag{25}$$

$$\| T'_n(p_n u) \| \le \overline{M}_n + N_n(r, p_n u^*) = M_n(r, p_n u^*), \tag{26}$$

$$\| T'_n(p_n u) p_n h \| \ge [m - N_n(r, p_n u^*) r] \| p_n h \| = \tilde{m}_n(r, p_n u^*) \| p_n h \|. \tag{27}$$

3. *Для будь-якого $r \in \overline{d}(r)$ знайдеться таке спільне $n_0(r)$, що при $n \ge n_0(r)$ виконуються умови*

$$\gamma_n(r) = \frac{\overline{\eta}(n, u^*) N_n(r, p_n u^*)}{\tilde{m}_n^2(r, p_n u^*)} < 1, \tag{28}$$

$$\frac{2\overline{\eta}(n, u^*)}{\tilde{m}_n(r, p_n u^*)} \le r. \tag{29}$$

4. *При всіх $n \ge n_0(r)$ система рівнянь* (5) *має в кулі $\overline{S}_n(p_n u^*, r)$ єдиний розв'язок $\overline{\xi}_n^*$, що відповідає розв'язку $u^*(x)$ рівняння* (1), *до якого починаючи з $u^0 = \overline{\xi}_n^0 = p_n u^*$ монотонно і сильно збігається послідовність $\{ \overline{\xi}_n^k \}$, побудована згідно з* (9) *для системи* (5), *причому вірна оцінка похибки*

$$\left\| \overline{\xi}_n^* - \overline{\xi}_n^k \right\| \leq \frac{\eta(n, u^*)}{\tilde{m}_n(r, p_n u^*)} \left[1 - \frac{\tilde{m}_n^2(r, p_n u^*)}{M_n^2(r, p_n u^*)} (1 - \gamma(r)) \right]^{k/2}. \tag{30}$$

5. *Будь-яка послідовність розв'язків* $\left\{ \overline{\xi}_n^* \right\}$ *збігається при* $n \to \infty$ *за нормою до елементу* $p_n u^*$, *причому швидкість збіжності характеризується нерівністю*

$$\left\| \overline{\xi}_n^* - p_n u^* \right\| \leq \frac{\overline{\eta}(n, u^*)}{\tilde{m}_n(r, p_n u^*)}. \tag{31}$$

Доведення. Розглянемо рівняння (1) і систему рівнянь (5) як операторні рівняння (8) і (16) відповідно у просторах $C[0, 1]$ і m_n. Згідно з умовами 3, 4 оператори $\overline{T} : \overline{S}(u^*, r) \to C[0, 1]$ і $\overline{T}_n : \overline{S}_n(p_n u^*, r) \to m_n$ є цілком неперервними на кулях відповідно $\overline{S}(u^*, r)$ і $\overline{S}_n(p_n u^*, r)$. Більш того, як показано в [2], по відношенню до зв'язуючих відображень $p_n \in L(C[0, 1], m_n)$, що визначені згідно з (6), послідовність цілком неперервних операторів $\overline{T}_n$ компактно апроксимує цілком неперервний оператор $\overline{T}$. Це означає, що за умов 2, 3 для будь-якого $u \in \overline{S}(u^*, r)$ при $n \to \infty$ виконується співвідношення [2]

$$\| p_n \overline{T} u - \overline{T}_n p_n u \| = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \int_0^1 K(y_{in}, y, u()) dy - \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} K\left(y_{in}, y_{jn}, u(y_{jn})\right) dy \right| =$$

$$= \max_{1 \leq i \leq n} \left| r_n[K(y_{in}, y, u(y))] \right| \to 0. \tag{32}$$

Аналогічно доводиться, що за умов 2 – 4 послідовність операторів $\overline{T}_n'(p_n u^*)$ компактно апроксимує оператор $\overline{T}'(u^*)$.

Доведемо справедливість в нормі R_n нерівностей (25) – (27). Враховуючи (32) і умову 1, для $u^* = u^*(x)$ одержимо (25), тобто

$$\left\| T_n p_n u^* \right\| \leq \left\| T_n p_n u^* - p_n T u^* \right\| + \left\| p_n T u^* \right\| \leq$$

$$\leq \left\{ \sum_{i=1}^n \left| r_n\left[K\left(y_{in}, y, u^*(y)\right) \right] \right|^2 \right\}^{1/2} = \overline{\eta}(n, u^*) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Із формули (18) внаслідок лінійності оператора $\overline{T}_n'\left(\overline{\xi}_n\right)$ відносно $\overline{\zeta}_n \in m_n$ для будь-яких $u \in \overline{S}(u^*, r)$ і $h \in C[0, 1]$ випливає

$$\| T_n'(p_n u) \| \leq \left\| T_n'(p_n u^*) \right\| + \left\| T_n'(p_n u) - T_n'(p_n u^*) \right\|, \tag{33}$$

$$\| T_n'(p_n u) p_n h \| \geq \left\| T_n'(p_n u^*) p_n h \right\| - \left\| T_n'(p_n u^*) p_n h - T_n'(p_n u) p_n h \right\|, \tag{34}$$

а із формули Лагранжа і умови (23) маємо

$$\left\| T_n'(p_n u) - T_n'(p_n u^*) \right\| \leq \int_0^1 \left\| T_n''\left(p_n u^* + \tau(p_n u - p_n u^*)\right) \right\| d\tau \left\| p_n u - p_n u^* \right\| =$$

$$= N_n(r, p_n u^*) r, \quad 0 \leq \tau \leq 1. \tag{35}$$

Враховуючи (22), (35), із нерівностей (33), (34) одержуємо оцінки (26) і (27).

Покажемо далі, що існує такий інтервал $(r_1, r_2) \subset [0, \infty)$ зміни радіуса r кулі $\overline{S}_n(p_n u^*, r)$, на якому система нерівностей (28), (29) буде сумісною. Дійсно, згідно з умовою 7 існує така область $\overline{d}(r) \subset [0, \infty)$, що для всіх $r \in \overline{d}(r)$ виконується (24). Враховуючи умову 2, можна твердити, що для кожного $r \in$

$\in \overline{d}(r)$ знайдеться таке спільне $n_0(r)$, починаючи з якого для всіх n система нерівностей (28), (29) буде сумісною. Це значить, що при кожному $n \geq n_0(r)$ для оператора $T_n \overline{\xi}_n$ виконуються всі умови теореми 1, тобто в кулі $\overline{S}_n(p_n u^*, r)$ система рівнянь (5) має єдиний розв'язок $\overline{\xi}_n^*$, до якого при $k \to \infty$ з початкового наближення $\overline{\xi}_n^0 = p_n u^*$ збігається послідовність $\left\{\overline{\xi}_n^k\right\}$, побудована згідно з (9) для системи (5), причому апріорна оцінка похибки k-го і початкового наближень характеризується нерівностями (30) і (31).

Із оцінки (31) випливає, що $\left\|\overline{\xi}_n^* - p_n u^*\right\| \to 0$ при $n \to \infty$, що означає збіжність методу переходу до системи рівнянь (5). Теорема доведена.

3. Апостеріорна оцінка похибки і відокремлення розв'язків. Встановлена вище збіжність методу переходу до послідовності систем рівнянь (5) є достатньою основою для реалізації процесу чисельного розв'язування (при фіксованих $n \geq n_0$) систем (5) з допомогою того чи іншого наближеного методу. Припустимо, що система (5) має l точних ізольованих розв'язків ξ_{1n}^*, ξ_{2n}^*, … …, ξ_{ln}^* і при деякому фіксованому $n \geq n_0$ всі вони можуть бути знайдені. За цими розв'язками згідно з (4) можуть бути побудовані відповідні аналітичні розв'язки $u_{1n}^*, u_{2n}^*, \ldots, u_{in}^*$, які надалі будемо вважати центрами шуканих куль $\overline{S}(v, r)$, $v = u_{in}^*(x)$, $i = \overline{1, l}$.

Відомо, що одержання апостеріорної оцінки похибки наближеного розв'язку v рівносильно доведенню існування хоча б одного розв'язку $u^*(x)$ рівняння (1) у кулі $\overline{S}(v, r) = \{u \in \overline{\Omega} : \|u - v\| \leq r\}$. Оскільки нелінійні рівняння, як правило, мають не один розв'язок, то задача полягає в тому, щоб для кожного розв'язку v знайти такі значення радіуса r, які б у кулі $\overline{S}(v, r)$ забезпечили виконання достатніх умов існування єдиного розв'язку рівняння (1) (теорема 1). Розв'язання поставленої задачі дає наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай виконані такі умови*:

1) *функції* $K(x, y, u)$, $f(x)$ *належать просторові* $C_\chi[\overline{\Omega}]$, $\chi \geq 3$, $C_\chi[\overline{\Omega}] \subset L_2[0, 1]$;

2) *при кожному фіксованому* $n \geq n_0$ *система рівнянь* (5) *має розв'язок* $\overline{\xi}_n^*$, *а відповідний йому аналітичний розв'язок* $u_n^*(x)$ *має вигляд* (4);

3) *для розв'язку* $v = u_n^*(x)$ *вірні оцінки, обчислені в нормі* $L_2[0, 1]$:

$$\|K_u'(x, y, v(y))\| \leq \overline{M}, \tag{36}$$

$$\|T'(v(y))h(y)\| \geq \overline{m}\,\|h\|, \quad \overline{m} > 0, \quad \forall h \in C[\overline{\Omega}], \tag{37}$$

для всіх $u \in \overline{S}(v, r)$

$$\|K_{u^2}''(x, y, u)\| \leq N(r, v), \tag{38}$$

де $\overline{M}$, $\overline{m}$ — *сталі,* $N(r, v)$ — *функція радіуса* r;

4) *скалярне рівняння* $m(r) = \overline{m} - N(r, v)r = 0$ *має принаймні один додатний розв'язок* $\overline{R}$ *при будь-якому фіксованому* $n \geq n_0$.

Тоді справедливі наступні твердження і оцінки:

1. *Норма нев'язки наближеного розв'язку* $v(x)$ *інтегрального рівняння* (1) *задовольняє нерівність*

$$\|Tv\| = \left\|v(x) - \int_0^1 K(x, y, v(y))dy - f(x)\right\| =$$

$$= \|r_n(v)\| \leq b_n Q^{(s)}, \quad s = \overline{1, \chi}, \tag{39}$$

де b_n — *множник, незалежний від функції* $K(x, y, v(y))$, *свій для кожної квадратурної формули, а* $Q^{(s)}$ *задовольняє нерівність*

$$\max_{0 \le x, y \le 1} \left| \frac{d^s}{dy^s} [K(x, y, v(y))] \right| \le Q^{(s)}. \tag{40}$$

2. *Для будь-якого* $u \in \overline{S}(v, r)$ *вірні оцінки*

$$\| T'(u) \| \le \tilde{M} + N(r, v) r = M(r, v), \tag{41}$$

де $\tilde{M} = 1 + M$ *визначається із* (17);

$$\| T'(u)h \| \ge [\, \overline{m} - N(r, v) r \,] \| h \| = m(r, v) \| h \|, \tag{42}$$

$$\| T''(u) \| \le N(r, v). \tag{43}$$

3. *Існує таке* $\overline{n}_0 \ge n_0$ *що при* $n \ge \overline{n}_0$ *кожному розв'язку* v *рівняння* (3) *буде відповідати свій інтервал* $(r_1, r_2) \subset [0, \infty)$ *зміни радіуса* r *кулі* $\overline{S}(v, r)$. *На цьому інтервалі буде сумісною система нерівностей* (13), (14), *в якій* $\eta = r_n(v)$, *а функції* $m(r, v)$ *і* $N(r, v)$ *визначені співвідношеннями* (42), (43).

4. *Рівняння* (1) *має в кулі* $\overline{S}(v, r)$, *де* $r \in (r_1, r_2)$, *єдиний розв'язок* $u^*(x)$, *що відповідає даному* $v(x)$, *до якого починаючи з* $u^0(x) = v(x)$ *при* $k \to \infty$ *збігається монотонно і сильно послідовність* $\{u^k(x)\}$, *побудована згідно з* (9) *для оператора* T, *причому вірна оцінка*

$$\| u^*(x) - u^k(x) \| \le \frac{b_n Q^{(s)}}{m(r, v)} \left[1 - \frac{m^2(r, v)}{M^2(r, v)} (1 - \gamma(r)) \right]^{k/2}. \tag{44}$$

5. *Апостеріорна оцінка похибки, що відображає близькість розв'язків* $u^*(x)$ *і* $v(x)$ *рівнянь* (1) *і* (3), *визначається нерівністю*

$$\| u^*(x) - v(x) \| \le \frac{b_n Q^{(s)}}{m(r, v)}. \tag{45}$$

Доведення. Відмітимо, що $T_n v(x) = 0$, оскільки $v(x) = u_n^*(x)$ згідно з (4) є точним розв'язком рівняння (3). З урахуванням цього із (1) і (2) згідно з [5] для функції $v(x)$ одержимо

$$\| Tv \| \le \| Tv - T_n v \| + \| T_n v \| =$$

$$= \left\| \int_0^1 K(x, y, v(y)) dy - \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} K(x, y_{jn}, v(y_{jn})) \right\| = \| r_n(v(y)) \| \le b_n Q^{(s)}.$$

Із (17) і (19) на основі формули Лагранжа і умов (36) – (38) випливає

$$\| T'(u) \| \le \tilde{M} + \left\| \int_0^1 T''(v + \tau(u - v)) d\tau \right\| \| u - v \| \le$$

$$\le \tilde{M} + N(r, v) r = M(r, v),$$

$$\| T'(u)h \| \ge \| T'(v)h \| - \| [\, T'(v) - T'(u) \,] h \| \ge$$

$$\ge [\, \overline{m} - N(r, v) r \,] \| h \| = m(r, v) \| h \|, \quad h \in C[0, 1],$$

$$\| T''(u) \| \le \left\| \int_0^1 K''_{u^2}(x, y, u(y)) dy \right\| \le N(r, v),$$

що і підтверджує оцінки (41) – (43).

Для доведення третього твердження зауважимо, що кожному фіксованому $n \ge \overline{n}_0$ буде відповідати своя множина розв'язків $v(x) = u_{ni}^*(x)$, $i = \overline{1, l}$. Для кожного такого $n \geq n_0$ і відповідного йому розв'язку $v(x)$ існує свій інтервал сумісності системи нерівностей (13), (14). Це випливає із збіжності квадратурного процесу. Дійсно, в цьому випадку при $n \to \infty$ $\eta = r_n(v) \to 0$, а $m(r, v)$, $N(r, v)$ є функціями радіуса r. Отже, знайдуться такі фіксовані $n \geq \bar{n}_0$ і відповідні їм $v(x)$, для яких будуть виконуватись нерівності (13) і (14), що означатиме існування інтервалу (r_1, r_2) їх сумісності. Знаходження значень r_1 і r_2 здійснюється шляхом розв'язання системи нерівностей (13), (14) при знайдених n і v. Визначена таким чином область їх сумісності (r_1, r_2) гарантує існування в кулі $\overline{S}(v, r)$, де $r \in (r_1, r_2)$, єдиного розв'язку $u^*(x)$ рівняння (1), збіжність послідовності $\{u^k(x)\}$, побудованої згідно з (9), до цього розв'язку $u^*(x)$ і справедливість апостеріорних оцінок похибок (44) і (45).

Підставивши замість $v(x)$ розв'язки $u^*_{in}(x)$, одержимо для них свої оцінки вигляду (44), (45) і свої інтервали для радіуса r, тобто відокремимо всі розв'язки рівняння (1).

Слід, однак, відмітити, що відокремлення різних ізольованих розв'язків може відбуватись як при одному і тому ж, так і при різних значеннях n, в залежності від структури рівняння, нелінійності шуканої функції та точності знайденого її наближеного значення.

4. Чисельний екперимент. Розглянемо задачу відокремлення і наближеного знаходження усіх ізольованих розв'язків нелінійного інтегрального рівняння

$$Tu(x) = u(x) - 0,25 \int_0^1 \cos xy u^3(y)\,dy - 0,25\cos x = 0. \tag{46}$$

Замінимо інтеграл його наближеним значенням згідно з формулою Сімпсона з числом вузлів $n = 5$; $x_1 = 0$; $x_2 = 0,25$; $x_3 = 0,5$; $x_4 = 0,75$; $x_5 = 1$. Тоді для значень розв'язків $u^*(x_i) = \xi_i$ у вузлах x_i, $i = \overline{1,5}$, одержимо систему нелінійних рівнянь вигляду

$$\xi_i = 1/48\left[\xi_1^3 + 4\cos(x_i \cdot 0,25)\xi_2^3 + 2\cos(x_i \cdot 0,5)\xi_3^3 + \right.$$
$$\left. + 4\cos(x_i \cdot 0,75)\xi_4^3 + \cos(x_i \cdot 1)\xi_5^3\right] + 0,25\cos x_i. \tag{47}$$

З допомогою εs-алгоритму [6] знайдено три розв'язки $\xi_{ij} = u(x_j)$, $j = 1, 2, 3$, системи (47), які розміщені в таблиці.

j	ξ_{1j}	ξ_{2j}	ξ_{3j}	ξ_{4j}	ξ_{5j}
1	0,2526001	0,2448118	0,2219290	0,1853728	0,1374148
2	2,0462600	2,0225310	1,9523840	1,8388740	1,6869280
3	−2,2277400	−2,2120770	−2,1654460	−2,0889090	−1,9842150

Згідно з формулою (4) наближені аналітичні розв'язки рівняння (46), побудовані за розв'язками системи (47), мають вигляд

$$u_1^*(x) = 0,0003354 + 0,0012227\cos 0,25x + 0,0004554\cos 0,5x +$$
$$+ 0,0005308\cos 0,75x + 0,2500541\cos x,$$

$$u_2^*(x) = 0,1785012 + 0,6894525\cos 0,25x + 0,3100875\cos 0,5x +$$
$$+ 0,5181725\cos 0,75x + 0,3500112\cos x,$$

$$u_3^*(x) = -0,2303312 - 0,902025\cos 0,25x - 0,4230875\cos 0,5x -$$

$$- 0,75958677 \cos 0,75x + 0,0872486 \cos x.$$

Норми цих розв'язків, а також норми їх нев'язок, що обчислені в $L_2[0, 1]$, мають такі значення:

$$\left\| u_1^*(x) \right\| = 0,2156979; \quad \left\| u_2^*(x) \right\| = 1,9266212; \quad \left\| u_3^*(x) \right\| = 2,1468405;$$

$$\left\| T u_1^*(x) \right\| = 0,000098; \quad \left\| T u_2^*(x) \right\| = 0,0001820; \quad \left\| T u_3^*(x) \right\| = 0,000153.$$

Величини $N(r, u_i^*)$, $\overline{m}(u_i^*)$ і $m(r, u_i^*)$, $i = 1, 2, 3$, що визначають умови (42), (43), в даному випадку мають вигляд

$$N(r, u_1^*) = 1,5r + 0,32355; \quad N(r, u_2^*) = 1,5r + 2,889930;$$

$$N(r, u_3^*) = 1,5r + 3,22026;$$

$$\overline{m}(u_1^*) = 0,9521461; \quad \overline{m}(u_2^*) = 0,1531246; \quad \overline{m}(u_3^*) = 0,5954739;$$

$$m(r, u_1^*) = 0,9521461 - 0,32355r - 1,5r^2;$$

$$m(r, u_2^*) = 0,1531246 - 2,88993r - 1,5r^2;$$

$$m(r, u_3^*) = 0,5954739 - 3,22026r - 1,5r^2.$$

Після підставлення знайдених числових значень $\eta(u_j^*)$ і величин $N(r, u_j^*)$, $m(r, u_j^*)$ в (13), (14) і розв'язання систем скалярних нерівностей одержимо такі інтервали для радіусів куль єдиності розв'язків рівняння (46):

$$0,00021 \le r(u_1^*) \le 0,685; \quad 0,0026 \le r(u_2^*) \le 0,037;$$

$$0,0006 \le r(u_3^*) \le 0,163.$$

Неважко переконатись, що при даних розв'язках u_j^* і відповідних їм значеннях радіуса r умови теореми 1 будуть виконані.

На закінчення відмітимо, що для побудови апроксимаційних рівнянь може бути використаний і інший математичний апарат, наприклад теорія проекційних методів [1], теорія проекційно-ітераційних методів [7], теорія варіаційних і ітераційних методів із ускладненим ітераційним оператором [8] та багато інших методів, перелік, структуру і умови функціонування яких можна знайти в [7, 9].

1. *Приближенное* решение операторных уравнений / М. А Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко и др. – М.: Наука, 1969. – 445 с.
2. *Вайникко Г. М.* Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение уравнений. – Тарту: Изд-во Тарт. ун-та, 1970. – 192 с.
3. *Бабич М. Д.* Об одном аппроксимационно-итерационном методе решения нелинейных операторных уравнений // Кибернетика. – 1991. – № 1. – С. 21–28.
4. *Фридман В. М.* Итеративный процесс с минимальными ошибками для нелинейного операторного уравнения // Докл. АН СССР. – 1963. – **139**, № 5. – С. 1063–1066.
5. *Волков Е. А.* О поиске решений нелинейного интегрального уравнения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1976. – **142**. – С. 101–121.
6. *Бабич М. Д., Шевчук Л. Б.* Об одном алгоритме приближенного решения систем нелинейных уравнений // Кибернетика. – 1982. – № 2. – С. 74– 79.
7. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1980. – 262 с.
8. *Марчук Г. И., Лебедев В. И.* Численные методы в теории переноса нейтронов. – М.: Атомиздат, 1971. – 496 с.
9. *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные уравнения. Методы, алгоритмы, программы / Справ. пособие. – Киев: Наук. думка, 1986. – 543 с.

Одержано 28.03.95