УДК 517.982

В. Л. Хацкевич, вед. научн. сотр. (НИИ математики при Воронеж. ун-те)

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ МОНОТОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С БЫСТРЫМИ И МЕДЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

The solvability of a periodic problem for monotone differencial inclusions and the behavior of solutions as the parameter changes are studied.

Вивчена розв'язність періодичної задачі для монотонних диференціальних включень та поведінка розв'язків при зміні параметра.

Введение. Пусть H — вещественное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\,,\,)$ и нормой $\|\ \|$, $Cv(H)$ — совокупность всех непустых выпуклых замкнутых и ограниченных множеств из H, ρ — метрика Хаусдорфа [1] на $Cv(H)$. Зафиксируем число $\omega > 0$ и Δ: $[0, \omega]$. В [2] изучено дифференциальное включение

$$\dot{x} + F(x, t) \ni 0, \tag{1}$$

в котором $F: H\times\Delta \to Cv(H)$ — γ-монотонный по x оператор, т. е.

$$(f(x, t) - f(y, t), x - y) \geq \gamma \|x - y\|^2$$

$$\forall\ x, y \in H;\ \ \forall f(x, t) \in F(x, t);\ \ \forall f(y, t) \in F(y, t);\ \ \forall\ t \in \Delta,$$

а $\gamma > 0$ — некоторая постоянная.

Решением (1) называется абсолютно непрерывная функция $x: \Delta \to H$, удовлетворяющая (1) почти всюду (п. в.) на Δ.

Предложение 1 [2]. *Пусть отображение $F: H\times\Delta \to Cv(H)$ непрерывно по t (по метрике Хаусдорфа), а по x полунепрерывно сверху (см. [1]) и γ-монотонно. Пусть, кроме того,*

$$\sup_{\|x\|\leq r,\, f\in F} \|f(x, t)\| \leq c(r, t) \quad \forall\ r > 0, \quad \forall\ t \in \Delta,$$

где $c(r, t)$ — квадратично суммируемая по t функция.

Тогда включение (1) имеет решение, причем единственное (ω-периодическое), удовлетворяющее условию $x(0) = x(\omega)$.

Близкие результаты при конечномерном H содержатся в [3]. Для бесконечномерного H в [4] более жесткие требования налагаются по t, при менее жестких по x.

Предложение 2 [5, с. 365]. *Пусть $F: H \to Cv(H)$ — полунепрерывное сверху и γ-монотонное отображение. Тогда включение $Fx \ni 0$ имеет решение, причем единственное.*

Это вариант теоремы Минти – Браудера, поскольку оператор $F - \gamma I$ в этих условиях максимально монотонен (ср. с [2]).

Предложение 3. *Пусть оператор $F: H\times H\times\Delta \to Cv(H)$*, причем $F(x_1, x_2, t)$ *по x_1 полунепрерывен сверху и удовлетворяет условию γ-монотонности; по x_2 — условию Липшица с некоторой постоянной $L > 0$:*

$$\rho\,(F(x_1, x_2, t); F(x_1, y_2, t)) \leq L\,\|x_2 - y_2\| \quad \forall\, x_1, x_2, y_2 \in H;\ \ \forall\ t \in \Delta,$$

а по t непрерывен по метрике Хаусдорфа. Пусть, кроме того,

$$\sup_{\|x_j\|\le r_j,\, f\in F} \|f(x_1, x_2, t)\| \le c(r_1, r_2, t) \quad \forall\, t \in \Delta,$$

где функция c — *квадратично суммируема по* t.

Тогда для любой непрерывной функции $\psi: \Delta \to H$ *задача*

$$\dot{x} + F(x, \psi(t), t) \ni 0, \; x(0) = x(\omega)$$

имееет решение, причем единственное.

Это следствие предложения 1. В частности, неравенство

$$\rho\,(F(x, \psi(t), t); F(x, \psi(s), s)) \le$$

$$\le \rho\,(F(x, \psi(t), t); F(x, \psi(t), s)) + L\,\|\psi(t) - \psi(s)\|, \quad t, s \in \Delta, \tag{2}$$

обеспечивает непрерывность по t отображения $F(x, \psi(t), t)$.

Рассмотрим систему дифференциальных включений с параметром $\mu > 0$

$$\dot{x}_1 + \mu\, F_1(x_1, x_2, t) \ni 0, \quad \dot{x}_2 + F_2(x_1, x_2, t) \ni 0. \tag{3}$$

Под решением системы (3) будем понимать абсолютно непрерывные функции $x_1, x_2: \Delta \to H$, удовлетворяющие (3) п. в. на Δ.

Ниже предполагаем, что отображения $F_1, F_2: H \times H \times \Delta \to Cv(H)$ непрерывны по t (в метрике ρ) и F_j полунепрерывны сверху по x_j, $j = 1, 2$.

Пусть $U_1, U_2: H \to H$ — заданные самосопряженные положительно определенные операторы, а $\gamma_j, L_j > 0$, $j = 1, 2$, — фиксированные постоянные. Будем использовать понятие (u, γ)-монотонности (см. [6]), обобщенное на многозначные операторы. Положим $M_j := \sup\limits_{\|z\|=1} (U_j z, z)$, $m_j := \inf\limits_{\|z\|=1} (U_j z, z)$, $j = 1, 2$.

1. Существование решений. Зададим (ω-периодические) условия

$$x_1(0) = x_1(\omega), \quad x_2(0) = x_2(\omega). \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть* F_j — *функции,* (u_j, γ_j)*-монотонные по* x_j, *т. е.*

$$(f_1(x_1, x_2, t) - f_1(y_1, x_2, t), U_1(x_1 - y_1)) \ge \gamma_1\,\|x_1 - y_1\|^2 \quad \forall\, x_1, x_2, y_1 \in H;$$

$$\forall\, t \in \Delta;\; \forall\, f_1(x_1, x_2, t) \in F_1(x_1, x_2, t);\; \forall\, f_1(y_1, x_2, t) \in F_1(y_1, x_2, t) \tag{5}$$

и

$$(f_2(x_1, x_2, t) - f_2(x_1, y_2, t), U_2(x_2 - y_2)) \ge \gamma_2\,\|x_2 - y_2\|^2 \quad \forall\, x_1, x_2, y_2 \in H;$$

$$\forall\, t \in \Delta;\; \forall\, f_2(x_1, x_2, t) \in F_2(x_1, x_2, t);\; \forall\, f_2(x_1, y_2, t) \in F_2(x_1, y_2, t). \tag{6}$$

Пусть F_j *ограничены на ограниченных множествах по* x_1, x_2, *точнее* $\forall\, t \in \Delta$

$$\sup_{\|x_1\| \le r_1,\, \|x_2\| \le r_2,\, f_j \in F_j} \|f_j(x_1, x_2, t)\| \le c_j(r_1, r_2, t) \quad \forall\, r_1, r_2 > 0; \quad j = 1, 2, \tag{7}$$

где функции c_j *квадратично суммируемы по* $t \in \Delta$.

Пусть по дополнительному векторному аргументу для функций F_j *выполнено условие Липшица*

$$\rho\,(F_1(x_1, x_2, t); F_1(x_1, y_2, t)) \le L_1\,\|x_2 - y_2\| \quad \forall\; x_1, x_2, y_2 \in H; \quad \forall\, t \in \Delta, \tag{8}$$

$$\rho\,(F_2(x_1, x_2, t); F_2(y_1, x_2, t)) \le L_2\,\|x_1 - y_1\| \quad \forall\; x_1, x_2, y_1 \in H; \quad \forall\, t \in \Delta, \tag{9}$$

причем

$$\kappa := L_1 L_2 \frac{M_1 M_2}{\gamma_1 \gamma_2} \sqrt{\frac{M_1 M_2}{m_1 m_2}} < 1. \tag{10}$$

Тогда система (3), (4) *имеет решение* $\{\varphi_{1\mu}(t), \varphi_{2\mu}(t)\}$, $t \in \Delta$, *причем единственное.*

Доказательство. Введем в H эквивалентные скалярные произведения $(x, y)_j := (U_j x, y)$. Пусть C_ω — множество непрерывных функций $u\colon \Delta \to H$ таких, что $u(0) = u(\omega)$. Зафиксируем $\psi \in C_\omega$.

Рассмотрим H со скалярным произведением $(\, , \,)_1$. В силу (5), (7) согласно предложению 3 существует (единственное) решение $\varphi_{1\mu}(\psi)(t)$ на Δ задачи

$$\dot{x}_1 + \mu F_1(x_1, \psi(t), t) \ni 0, \quad x_1(0) = x_1(\omega). \tag{11}$$

Тогда найдется сечение $f_1^* \in F_1$ такое, что

$$\dot{\varphi}_{1\mu}(\psi)(t) + \mu f_1^*(\varphi_{1\mu}(\psi), \psi, t) = 0 \quad \text{п. в. } t \in \Delta. \tag{12}$$

Поскольку $\varphi_{1\mu}(\psi)$ абсолютно непрерывна, то функция f_1^* суммируема по $t \in \Delta$.

Рассмотрим задачу

$$\dot{x}_2 + F_2(\varphi_{1\mu}(\psi), x_2, t) \ni 0, \quad x_2(0) = x_2(\omega). \tag{13}$$

В силу (6), (7), (9) аналогично предложению 3 в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\, , \,)_2$ задача (13) имеет решение $\varphi_{2\mu}(\psi)(t)$ на Δ, причем единственное. Покажем, что оператор $\Phi_2\colon C_\omega \to C_\omega$, задаваемый формулой $(\Phi_2\psi)(t) := \varphi_{2\mu}(\psi)(t)$, $t \in \Delta$, имеет неподвижную точку $\psi_* \in C_\omega$, причем единственную. По определению Φ_2 функция $\psi_*(t)$ абсолютно непрерывна. Тогда $\{\varphi_{1\mu}(\psi_*)(t), \psi_*(t)\}$ — решение системы (3), (4).

Проверим, что Φ_2 — сжатие. Пусть $\psi, \hat{\psi} \in C_\omega$ и

$$v_1(t) := (U_1(\varphi_{1\mu}(\psi) - \varphi_{1\mu}(\hat{\psi})), \varphi_{1\mu}(\psi) - \varphi_{1\mu}(\hat{\psi})), \ t \in \Delta.$$

Дифференцируя v_1 и используя (12), получаем

$$\dot{v}_1(t) = 2\mu\left(\varphi_{1\mu}(\psi) - \varphi_{1\mu}(\hat{\psi}), f_1^*(\varphi_{1\mu}(\hat{\psi}), \hat{\psi}, t) - f_1^*(\varphi_{1\mu}(\psi), \psi, t)\right)_1.$$

Для любого сечения $f_1 \in F_1(\varphi_{1\mu}(\psi), \hat{\psi}, t)$ согласно (5) имеем

$$\frac{1}{2}\dot{v}_1(t) = \mu\left(\varphi_{1\mu} - \hat{\varphi}_{1\mu}, f_1^*(\hat{\varphi}_{1\mu}, \hat{\psi}, t) - f_1(\varphi_{1\mu}, \hat{\psi}, t)\right)_1 +$$
$$+ \mu\left(\varphi_{1\mu} - \hat{\varphi}_{1\mu}, f_1(\varphi_{1\mu}, \hat{\psi}, t) - f_1^*(\varphi_{1\mu}, \psi, t)\right)_1 \le$$
$$\le -\mu\gamma_1\|\varphi_{1\mu} - \hat{\varphi}_{1\mu}\|^2 + \mu\sqrt{M_1 v_1}\,\|f_1(\varphi_{1\mu}, \hat{\psi}, t) - f_1^*(\varphi_{1\mu}, \psi, t)\|,$$

где $\varphi_{1\mu}(\psi) \equiv \varphi_{1\mu}$, $\varphi_{1\mu}(\hat{\psi}) \equiv \hat{\varphi}_{1\mu}$. Следовательно,

$$\frac{1}{2}\dot{v}_1(t) \le -\mu\frac{\gamma_1}{M_1}v_1^2 + \mu\sqrt{M_1 v_1}\inf_{f_1(\varphi_{1\mu}, \psi, t)}\|f_1(\varphi_{1\mu}, \hat{\psi}, t) - f_1^*(\varphi_{1\mu}, \psi, t)\|.$$

Поэтому с учетом (8) для п. в. $t \in \Delta$ имеем

$$\frac{1}{2}\dot{v}_1(t) \le -\mu\frac{\gamma_1}{M_1}v_1(t) + \mu\sqrt{M_1 v_1(t)}\,\rho\left(F_1(\varphi_{1\mu}, \hat{\psi}, t); F_1(\varphi_{1\mu}, \psi, t)\right) \le$$

$$\leq -\mu \frac{\gamma_1}{M_1} v_1(t) + \mu L_1 \sqrt{M_1 v_1(t)} \, \|\psi(t) - \hat{\psi}(t)\|.$$

Поскольку $v_1(0) = v_1(\omega)$, то отсюда для $w_1(t) := \sqrt{v_1(t)}$ находим (ср. с [6])

$$\max_{t \in \Delta} w_1(t) \leq \frac{L_1}{\gamma_1} M_1^{3/2} \max_{t \in \Delta} \|\psi(t) - \hat{\psi}(t)\|.$$

Следовательно,

$$\max_{t \in \Delta} \|\varphi_{1\mu}(\psi) - \varphi_{1\mu}(\hat{\psi})\| \leq \frac{L_1 M_1}{\gamma_1} \sqrt{\frac{M_1}{m_1}} \max_{t \in \Delta} \|\psi(t) - \hat{\psi}(t)\|. \tag{14}$$

Продифференцируем функцию

$$v_2(t) := (U_2(\varphi_{2\mu}(\psi) - \varphi_{2\mu}(\hat{\psi}), \varphi_{2\mu}(\psi) - \varphi_{2\mu}(\hat{\psi}))(t), \quad t \in \Delta.$$

Используя (6), (9), аналогично предыдущему для $w_2 := \sqrt{v_2}$ получаем

$$\dot{w}_2(t) \leq -\frac{\gamma_2}{M_2} w_2(t) + L_2 M_2 \|\varphi_{1\mu}(\psi)(t) - \varphi_{1\mu}(\hat{\psi})(t)\| \quad \text{п. в. } t \in \Delta.$$

Следовательно,

$$\max_{t \in \Delta} \|\varphi_{2\mu}(\psi)(t) - \varphi_{2\mu}(\hat{\psi})(t)\| \leq \frac{L_2 M_2}{\gamma_2} \sqrt{\frac{M_2}{m_2}} \max_{t \in \Delta} \|\varphi_{1\mu}(\psi)(t) - \varphi_{1\mu}(\hat{\psi})(t)\|.$$

Отсюда с учетом (14) находим

$$\max_{t \in \Delta} \|\varphi_{2\mu}(\psi)(t) - \varphi_{2\mu}(\hat{\psi})(t)\| \leq \kappa \max_{t \in \Delta} \|\psi(t) - \hat{\psi}(t)\|. \tag{15}$$

Согласно (10), (15) оператор Φ_2 — сжимающий, поэтому имеет единственную неподвижную точку ψ_*. Это влечет существование и единственность решения задачи (3), (4).

***Следствие* 1.** *Если в теореме* 1 *функции* $c_j(0, 0, t)$ *ограничены, то*

$$\max_{t \in \Delta} \|\varphi_{2\mu}(t)\| \leq (1 - \kappa)^{-1} \frac{M_2}{\gamma_2} \sqrt{\frac{M_2}{m_2}} \sup_{t \in \Delta} c_2(0, 0, t) := r_2, \tag{16}$$

$$\max_{t \in \Delta} \|\varphi_{1\mu}(t)\| \leq \frac{M_1}{\gamma_1} \sqrt{\frac{M_1}{m_1}} \left(\sup_{t \in \Delta} c_1(0, 0, t) + L_1 r_2 \right) := r_1, \tag{17}$$

Доказательство. Положим в (15) $\psi = \psi_*$, $\hat{\psi} = 0$, тогда

$$\max_{t \in \Delta} \|\varphi_{2\mu}(\psi_*)(t)\| \leq (1 - \kappa)^{-1} \max_{t \in \Delta} \|\varphi_{2\mu}(0)(t)\|. \tag{18}$$

Для $\varphi_{j\mu}(0)(t)$ согласно (5) (либо (6)) и (7) справедливы оценки

$$\max_{t \in \Delta} \|\varphi_{j\mu}(0)(t)\| \leq \frac{M_j}{\gamma_j} \sqrt{\frac{M_j}{m_j}} \sup_{t \in \Delta} c_j(0, 0, t), \quad j = 1, 2.$$

Поэтому из (18) следует (16).

Полагая в (14) $\psi = \psi_*$, $\hat{\psi} = 0$, получаем

$$\max_{t \in \Delta} \|\varphi_{1\mu}(t)\| \leq \frac{L_1 M_1}{\gamma_1} \sqrt{\frac{M_1}{m_1}} \max_{t \in \Delta} \|\varphi_{2\mu}(t)\| + \max_{t \in \Delta} \|\varphi_{1\mu}(0)(t)\|.$$

Отсюда и из (16) следует (17).

Требование ограниченности функций $c_j(0, 0, t)$ служит для упрощения оценок, которые могут быть вычислены и без него.

2. Сингулярно возмущенные включения $(\mu \to \infty)$. Рассмотрим систему

$$F_1(x_1, x_2, t) \ni 0; \quad \dot{x}_2 + F_2(x_1, x_2, t) \ni 0. \tag{19}$$

Решением (19) назовем непрерывную функцию $x_1(t)$ и абсолютно непрерывную функцию $x_2(t)$, удовлетворяющие (19) п. в. на Δ.

Лемма 1. *В условиях теоремы* 1 *система* (19), (4) *имеет единственное решение* $\{\varphi_{1\infty}(t), \varphi_{2\infty}(t)\}$, $t \in \Delta$.

Доказательство. При $\psi \in C_\omega$ в силу (5), (7) и предложения 2 при всех $t \in \Delta$ включение $F_1(x, \psi(t), t) \ni 0$ имеет единственное решение $\varphi_1^\infty(\psi)(t)$. Функция $\varphi_1^\infty(\psi)(t)$ непрерывна по t (ср. с [2]) вследствие (2), (5).

Рассмотрим задачу

$$\dot{x}_2 + F_2(\varphi_1^\infty(\psi), x_2, t) \ni 0, \quad x_2(0) = x_2(\omega). \tag{20}$$

В силу (6), (7), (9) и аналогично предложению 3 задача (20) имеет решение $\varphi_2^\infty(\psi)(t)$, причем единственное. Покажем, что оператор $\Phi_2^\infty\colon C_\omega \to C_\omega$, определенный формулой $\Phi_2^\infty(\psi)(t) := \varphi_2^\infty(\psi)(t)$, является сжатием.

Пусть $\psi, \hat{\psi} \in C_\omega$ и $f_1 \in F_1$ таковы, что

$$f_1(\varphi_1^\infty(\psi)(t), \psi(t), t) = 0, \; f_1(\varphi_1^\infty(\hat{\psi})(t), \hat{\psi}(t), t) = 0 \; \text{ п. в. } t \in \Delta. \tag{21}$$

В силу (5), (21) для всех $f_1 \in F_1(\varphi_1^\infty(\hat{\psi})(t), \psi, t)$ имеем

$$\gamma_1 \| \varphi_1^\infty(\psi) - \varphi_1^\infty(\hat{\psi}) \|^2 \le (U_1(\varphi_1^\infty(\psi) - \varphi_1^\infty(\hat{\psi})), f_1(\varphi_1^\infty(\hat{\psi}), \hat{\psi}, t) - f_1(\varphi_1^\infty(\hat{\psi}), \psi, t)).$$

Тогда с учетом (8) можем записать

$$\gamma_1 \| \varphi_1^\infty(\psi) - \varphi_1^\infty(\hat{\psi}) \| \le$$

$$\le M_1 \inf_{f_1(\varphi_1^\infty(\hat{\psi}), \psi, t)} \| f_1(\varphi_1^\infty(\psi), \psi, t) - f_1(\varphi_1^\infty(\hat{\psi}), \psi, t) \| \le L_1 M_1 \| \psi - \hat{\psi} \|. \tag{22}$$

Продифференцируем функцию

$$v_2^\infty(t) := (U_2(\varphi_2^\infty(\psi)(t) - \varphi_2^\infty(\hat{\psi})(t)), \varphi_2^\infty(\psi)(t) - \varphi_2^\infty(\hat{\psi})(t)), \quad t \in \Delta.$$

Используя (6), (9) и применяя теорему о дифференциальных неравенствах, аналогично рассуждениям теоремы 1 получаем

$$\max_{t \in \Delta} \| \varphi_2^\infty(\psi)(t) - \varphi_2^\infty(\hat{\psi})(t) \| \le \frac{L_2 M_2}{\gamma_2} \sqrt{\frac{M_2}{m_2}} \max_{t \in \Delta} \| \varphi_1^\infty(\psi)(t) - \varphi_1^\infty(\hat{\psi})(t) \|. \tag{23}$$

Вместе с (22) и (10) это влечет сжимаемость оператора Φ_2^∞. Его неподвижная точка $\varphi_{2\infty}(t)$ вместе с $\varphi_{1\infty}(t) := \varphi_1^\infty(\varphi_{2\infty})(t)$ — решение задачи (4), (19).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и функции* c_1, c_2, *входящие в* (7), *ограничены по* $t \in \Delta$. *Тогда решение* $\varphi_{j\mu}(t)$, $j = 1, 2$, *системы* (3), (4) *равномерно на* Δ *сходятся при* $\mu \to +\infty$ *к решениям* $\varphi_{j\infty}(t)$ *системы* (19), (4).

Доказательство. По определению $\varphi_{j\mu}$ и $\varphi_{j\infty}$ при п. в. $t \in \Delta$ имеем

$$\dot{\varphi}_{1\mu}(t) + \mu f_{1\mu}(\varphi_{1\mu}, \varphi_{2\mu}, t) = 0, \quad \dot{\varphi}_{2\mu}(t) + f_{2\mu}(\varphi_{1\mu}, \varphi_{2\mu}, t) = 0, \tag{24}$$

$$\varphi_{j\mu}(0) = \varphi_{j\mu}(\omega), \quad j = 1, 2;$$

$$f_1(\varphi_{1\infty}, \varphi_{2\infty}, t) = 0, \quad \dot\varphi_{2\infty} + f_2(\varphi_{1\infty}, \varphi_{2\infty}, t) = 0, \quad \varphi_{j\infty}(0) = \varphi_{j\infty}(\omega), \ j = 1, 2, \tag{25}$$

для некоторых сечений $f_{j\mu} \in F_j(\varphi_{1\mu}, \varphi_{2\mu}, t)$ и $f_j \in F_j(\varphi_{1\infty}, \varphi_{2\infty}, t)$.

Положим $v_2(t) := (U_2(\varphi_{2\mu}(t) - \varphi_{2\infty}(t)), \varphi_{2\mu}(t) - \varphi_{2\infty}(t))$, $t \in \Delta$. В силу (24), (25) и для всех $f_2 \in F_2(\varphi_{1\mu}, \varphi_{2\infty}, t)$ имеем

$$\frac{1}{2}\dot v_2(t) = (U_2(\varphi_{2\mu} - \varphi_{2\infty}), f_2(\varphi_{1\mu}, \varphi_{2\infty}, t) - f_2(\varphi_{1\mu}, \varphi_{2\mu}, t)) +$$

$$+ (U_2(\varphi_{2\mu} - \varphi_{2\infty}), f_2(\varphi_{1\infty}, \varphi_{2\infty}, t) - f_2(\varphi_{1\mu}, \varphi_{2\infty}, t)).$$

Поэтому согласно (6) и (9)

$$\frac{1}{2}\dot v_2(t) \le -\frac{\gamma_2}{M_2} v_2(t) + \sqrt{M_2 v_2(t)} \inf_{f_2(\varphi_{1\mu}, \varphi_{2\infty}, t)} \|f_2(\varphi_{1\infty}, \varphi_{2\infty}, t) - f_2(\varphi_{1\mu}, \varphi_{2\infty}, t)\| \le$$

$$\le -\frac{\gamma_2}{M_2} v_2(t) + L_2 \sqrt{M_2 v_2(t)} \max_{t \in \Delta} \|\varphi_{1\mu}(t) - \varphi_{1\infty}(t)\|.$$

Следовательно,

$$\max_{t \in \Delta} \|\varphi_{2\mu}(t) - \varphi_{2\infty}(t)\| \le \frac{L_2 M_2}{\gamma_2} \sqrt{\frac{M_2}{m_2}} \max_{t \in \Delta} \|\varphi_{1\mu}(t) - \varphi_{1\infty}(t)\|. \tag{26}$$

Пусть $\chi : \Delta \to H$ — абсолютно непрерывная функция $\chi(0) = \chi(\omega)$ и

$$v_1(t) := (U_1(\varphi_{1\mu}(t) - \chi(t)), \varphi_{1\mu}(t) - \chi(t)), \quad t \in \Delta.$$

Тогда

$$\frac{1}{2}\dot v_1(t) = (U_1(\varphi_{1\mu} - \varphi_{1\infty}), \dot\varphi_{1\mu} - \dot\chi) + (U_1(\varphi_{1\infty} - \chi), \dot\varphi_{1\mu} - \dot\chi). \tag{27}$$

Согласно (5), (24) для всех $f_1 \in F_1(\varphi_{1\infty}, \varphi_{2\mu}, t)$ имеем

$$(U_1(\varphi_{1\mu} - \varphi_{1\infty}), \dot\varphi_{1\mu}) \le$$

$$\le -\mu\gamma_1 \|\varphi_{1\mu} - \varphi_{1\infty}\|^2 + \mu \|U_1(\varphi_{1\mu} - \varphi_{1\infty})\| \|f_1(\varphi_{1\infty}, \varphi_{2\mu}, t)\|.$$

Перейдем к инфимуму по $f_1(\varphi_{1\infty}, \varphi_{2\mu}, t)$ и положим

$$v_{1\infty}(t) := (U_1(\varphi_{1\mu}(t) - \varphi_{1\infty}(t)), \varphi_{1\mu}(t) - \varphi_{1\infty}(t)), \ t \in \Delta.$$

Тогда, поскольку $0 \in F_1(\varphi_{1\infty}(t), \varphi_{2\infty}(t), t)$ п. в. $t \in \Delta$, в силу (8) получаем

$$(U_1(\varphi_{1\mu}(t) - \varphi_{1\infty}(t)), \dot\varphi_{1\mu}(t)) \le$$

$$\le -\mu\frac{\gamma_1}{M_1} v_{1\infty}(t) + \mu L_1 \sqrt{M_1 v_{1\infty}(t)} \|\varphi_{2\mu}(t) - \varphi_{2\infty}(t)\| \quad \text{п. в. } t \in \Delta.$$

Поэтому из (27) следует

$$\frac{1}{2}\dot v_1(t) \le -\mu\frac{\gamma_1}{M_1} v_1(t) + \mu\frac{\gamma_1}{M_1} |v_1(t) - v_{1\infty}(t)| +$$

$$+ \mu L_1 \sqrt{M_1 v_{1\infty}(t)} \|\varphi_{2\mu}(t) - \varphi_{2\infty}(t)\| + \sqrt{M_1 v_{1\infty}(t)} \|\dot\chi(t)\| +$$

$$+ M_1 (\|\dot\varphi_{1\mu}(t)\| + \|\dot\chi(t)\|) \|\varphi_{1\infty}(t) - \chi(t)\| \quad \text{п. в. } t \in \Delta.$$

Поскольку $v_1(0) = v_1(\omega)$, то отсюда имеем

$$\max_{t\in\Delta} v_1(t) \le \frac{M_1}{\mu\gamma_1}\sup_{t\in\Delta}\Big\{\frac{\mu\gamma_1}{M_1}|v_1(t)-v_{1\infty}(t)| +$$

$$+\mu L_1\sqrt{M_1 v_{1\infty}(t)}\,\|\varphi_{2\mu}(t)-\varphi_{2\infty}(t)\| + \sqrt{M_1 v_{1\infty}(t)}\,\|\dot\chi(t)\| +$$

$$+ M_1(\mu d_1 + \|\dot\chi(t)\|)\,\|\varphi_{1\infty}(t)-\chi(t)\|\Big\}. \tag{28}$$

Здесь учтено, что в силу (24), (16), (17) и (7)

$$\frac{1}{\mu}\sup_{t\in\Delta}\|\dot\varphi_{1\mu}(t)\| \le \sup_{t\in\Delta} c_1(r_1, r_2, t) := d_1. \tag{29}$$

Пусть $\varepsilon > 0$, выберем в качестве $\chi(t)$ усреднение по Стеклову:

$$\chi_h(t) := \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\varphi_{1\infty}(s)\,ds,\ h>0,$$

где функция $\varphi_{1\infty}(s)$ считается продолженной по ω-периодичности. Так как функция $\varphi_{1\infty}$ непрерывна, то $\chi_h \to \varphi_{1\infty}$ равномерно на Δ при $h\to 0$.

Пусть $h_\varepsilon > 0$ таково, что при всех $\mu>0$ и при всех $h<h_\varepsilon$ имеем (см. (17))

$$\max_{t\in\Delta}|v_1(t)-v_{1\infty}(t)| = \max_{t\in\Delta}|(U_1\chi_h,\chi_h)-(U_1\varphi_{1\infty},\varphi_{1\infty}) +$$

$$+2(U_1\varphi_{1\mu},\varphi_{1\infty}-\chi_h))| \le \varepsilon/6, \tag{30}$$

$$\frac{M_1^2}{\gamma_1}d_1\max_{t\in\Delta}\|\varphi_{1\infty}(t)-\chi_h(t)\| \le \varepsilon/6.$$

Зафиксируем указанное h. Согласно (26) и (10)

$$\frac{L_1 M_1^{3/2}}{\gamma_1}\max_{t\in\Delta}\|\varphi_{2\mu}(t)-\varphi_{2\infty}(t)\|\sqrt{v_{1\infty}(t)} \le \kappa\max_{t\in\Delta} v_{1\infty}(t).$$

Тогда (28) с учетом (30) и неравенства $\max\limits_{t\in\Delta} v_{1\infty}(t) \le \max\limits_{t\in\Delta} v_1(t)+\varepsilon/6$ влечет

$$(1-\kappa)\max_{t\in\Delta} v_{1\infty}(t) \le \frac{M_1^{3/2}}{\mu\gamma_1}\max_{t\in\Delta}\|\dot\chi_h(t)\|\Big(\max_{t\in\Delta}\sqrt{v_{1\infty}(t)} +$$

$$+\sqrt{M_1}\max_{t\in\Delta}\|\varphi_{1\infty}(t)-\chi_h(t)\|\Big)+\varepsilon/2. \tag{31}$$

Выберем μ_* настолько большим, чтобы из (31) при $\mu\ge\mu_*$ следовало $(1-$ $-\kappa)\max\limits_{t\in\Delta}\|v_{1\infty}(t)\| \le \varepsilon$ (см. (17)). Тогда по определению $v_{1\infty}$

$$\max_{t\in\Delta}\|\varphi_{1\mu}(t)-\varphi_{1\infty}(t)\| \le \sqrt{\frac{\varepsilon}{m_1}(1-\kappa)^{-1}} \quad \forall\ \mu\ge\mu_*.$$

Вместе с (26) это влечет справедливость утверждения теоремы.

Теорема 2 развивает направление исследований, примыкающее к известным результатам А. Н. Тихонова (см. [7]).

3. Принцип усреднения ($0<\mu\to 0$). Ниже считаем H конечномерным. Пусть $x_2(z,t)$ — решение задачи

$$\dot x_2 + F_2(z, x_2, t) \ni 0,\ \ x_2(0) = x_2(\omega) \tag{32}$$

при фиксированном $z\in H$. Определим многозначный оператор

$$F_1^0(z) := \frac{1}{\omega}\int_0^\omega F_1(z, x_2(z,t), t)\, dt, \quad z \in H, \tag{33}$$

где интеграл понимается в смысле Аумана [1].

В связи с изучением поведения решений $\varphi_{j\mu}$ при $\mu \to 0$ нас будет интересовать система

$$F_1^0(x_1) \ni 0, \quad \dot{x}_2 + F_2(x_1, x_2, t) \ni 0, \quad x_2(0) = x_2(\omega). \tag{34}$$

Лемма 2. *Оператор* F_1^0 *в условиях теоремы* 1 $(u_1, \tilde{\gamma})$*-монотонный, где*

$$\tilde{\gamma} = \gamma_1 - L_1 L_2 M_1 M_2 \frac{1}{\gamma_2}\sqrt{\frac{M_2}{m_2}}.$$

Доказательство. Покажем $(u_1, \tilde{\gamma}_1)$-монотонность оператора $\tilde{F}_1(z,t) :=$ $:= F_1(z, x_2(z,t), t)$. Для всех $z_1, z_2 \in H$ и любых сечений $\tilde{f}_1(z_j, t) \in \tilde{F}_1(z_j, t)$, а также $f_1 \in F_1(z_2, x_2(z_1, t), t)$ имеем

$$(\tilde{f}_1(z_1,t) - \tilde{f}_1(z_2,t), U_1(z_1 - z_2)) = (f_1(z_1, x_2(z_1,t),t) -$$
$$- f_1(z_2, x_2(z_1,t),t), U_1(z_1 - z_2)) + (f_1(z_2, x_2(z_1,t),t) -$$
$$- f_1(z_2, x_2(z_2,t),t), U_1(z_1 - z_2)).$$

Следовательно, согласно (5) и (8)

$$(\tilde{f}_1(z_1,t) - \tilde{f}_1(z_2,t), U_1(z_1 - z_2)) \geq \gamma_1 \|z_1 - z_2\|^2 -$$
$$- M_1 \inf_{f_1(z_2, x_2(z_1,t),t)} \|f_1(z_2, x_2(z_1,t),t) - f_1(z_2, x_2(z_2,t),t)\| \, \|z_1 - z_2\| \geq$$
$$\geq \gamma_1 \|z_1 - z_2\|^2 - L_1 M_1 \|x_2(z_1,t) - x_2(z_2,t)\|. \tag{35}$$

Дифференцируя функцию

$$v(t) := (U_2(x_2(z_1,t) - x_2(z_2,t)), x_2(z_1,t) - x_2(z_2,t)), \quad t \in \Delta,$$

и используя (6), (9), получаем дифференциальное неравенство

$$\dot{w}(t) \leq -\frac{\gamma_2}{M_2} w(t) + L_2\sqrt{M_2}\, \|z_1 - z_2\| \quad \left(w(t) := \sqrt{v(t)}\right).$$

Отсюда следует

$$\max_{t \in \Delta} \|x_2(z_1,t) - x_2(z_2,t)\| \leq \frac{L_2 M_2}{\gamma_2}\sqrt{\frac{M_2}{m_2}}\, \|z_1 - z_2\|. \tag{36}$$

Оценки (35) и (36) влекут $(u_1, \tilde{\gamma}_1)$-монотонность F_1.

В условиях теоремы оператор $F_1(z, x_2(z,t), t)$ непрерывен по t (см. (2)). Тогда он содержит измеримые по t сечения. Следовательно, оператор F_1^0 корректно определен. Пусть $f_1^0(z_j)$ — произвольные элементы $F_1^0(z_j)$, $j = 1, 2$. По определению интеграла найдутся измеримые (и квадратично суммируемые в силу (7)) по t сечения $f_1(z_j, x_2(z_j,t),t) \in F_1$ такие, что

$$f_1^0(z_j) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega f_1(z_j, x_2(z_j,t),t)\, dt, \quad j = 1, 2. \tag{37}$$

Поэтому $(u_1, \tilde{\gamma}_1)$-монотонность F_1^0 следует из $(u_1, \tilde{\gamma}_1)$-монотонности $F_1(z, x_2(z, t), t)$ по z.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *и дополнительно оператор* $F_1(x_1, x_2, t)$ *полунепрерывен сверху по* x_1, x_2 *равномерно по* $t \in \Delta$. *Тогда отображение* F_1^0, *определяемое формулой* (33), *полунепрерывно сверху. Образы* $F_1^0(z)$ *лежат в* $Cv(H)$.

Доказательство. В силу полунепрерывности сверху $F_1(x_1, x_2, t)$ по x_1, x_2 и непрерывности $x_2(z, t)$ по z равномерно для $t \in \Delta$ (см. (36)) заключаем, что оператор $F_1(z, x_2(z, t), t)$ полунепрерывен сверху по z равномерно для $t \in \Delta$. Зафиксируем $z_0 \in H$ и $\forall\, \varepsilon > 0$. Согласно изложенному существует $\delta > 0$ такое, что при $\|z - z_0\| \le \delta$ и $\forall f_1 \in F_1(z, x_2(z, t), t)$

$$\inf_{f_1(z_0, x_2(z_0, t), t)} \|f_1(z_0, x_2(z_0, t), t) - f_1(z, x_2(z, t), t)\| \le \varepsilon/2 \quad \forall\, t \in \Delta. \tag{38}$$

Пусть $f_1^0(z) \in F_1^0(z)$ и $f_1(z, x_2(z, t), t)$ — соответствующее по (37) сечение F_1. Согласно (38) найдется сечение $\tilde{f}_1(z_0, x_2(z_0, t), t) \in F_1$, которое можно считать измеримым по t [1, с. 206] такое, что $\max\limits_{t \in \Delta} \|f_1(z, x_2(z, t), t) - \tilde{f}_1(z_0, x_2(z_0, t), t)\| \le$ $\le \varepsilon$. Тогда $\| f_1^0(z) - \tilde{f}_1^0(z_0)\| \le \varepsilon$ для $\tilde{f}_1^0(z_0) \in F_1^0(z_0)$. Поэтому

$$\inf_{f_1^0(z_0) \in F_1^0(z_0)} \| f_1^0(z) - f_1^0(z_0)\| \le \varepsilon, \quad \|z - z_0\| \le \delta,$$

откуда следует полунепрерывность сверху оператора F_1^0.

В силу (u_2, γ_2)-монотонности F_2 справедлива оценка

$$\max_{t \in \Delta} \|x_2(z, t)\| \le \frac{M_2}{\gamma_2}\sqrt{\frac{M_2}{m_2}} \sup_{t \in \Delta} c_2(0, 0, t) := d_2. \tag{39}$$

Поэтому согласно (7) функция $F_1(z, x_2(z, t), t)$ имеет суммируемую мажоранту. Тогда с учетом конечномерности H согласно известному свойству интеграла Аумана [1, с. 209] образы $F_1^0(z)$ лежат в $C\mathrm{v}(H)$ и компактны.

Лемма 4. *В условиях леммы* 3 *система* (34) *имеет решение* $\varphi_0(t) := \{\varphi_{10}, \varphi_{20}(t)\}$, $t \in \Delta$, *причем единственное*.

Доказательство. Согласно (7), (33) и (39)

$$\sup_{\|z\| \le r,\, f_1^0(z) \in F_1^0(z)} \| f_1^0(z)\| \le \frac{1}{\omega}\int_0^\omega c_1(r, d_2, t)\, dt.$$

Тогда из лемм 2, 3 и предложения 2 следует существование решения $\varphi_{10} \in H$ первого из включений (34). Подставим φ_{10} вместо x_1 во второе включение (34) и возьмем в качестве $\varphi_{20}(t)$ его периодическое решение. Пара $\{\varphi_{10}, \varphi_{20}(t)\}$ — искомая.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия леммы* 3. *Тогда решения* $\varphi_{j\mu}(t)$, $j =$ $= 1, 2$, *системы* (3), (4) *при* $\mu \to 0$ *равномерно на* Δ *сходятся к решениям* φ_{j0} *задачи* (34).

Доказательство. По определению $\varphi_{j\mu}$ и в силу (7), (16), (17)

$$\| \dot{\varphi}_{1\mu}(t)\| \le c_1(r_1, r_2, t), \quad \| \dot{\varphi}_{2\mu}(t)\| \le c_2(r_1, r_2, t) \quad \forall\, t \in \Delta. \tag{40}$$

В частности,

$$\| \varphi_{1\mu}(t) - \varphi_{1\mu}(\tau) \| \le \mu \int_{\tau}^{t} c_1(r_1, r_2, s)\, ds, \quad t \ge \tau. \tag{41}$$

Согласно (16), (17), (40) и по теореме Арцела $\{\varphi_{j\mu}(t)\}$, $j = 1, 2$, содержит равномерно сходящуюся при $\mu \to 0$ последовательность $\varphi_{j\mu_n} := \varphi_{jn}$. Пусть $\hat{\varphi}_{j0}$ — предел этой последовательности. По определению $\hat{\varphi}_{20} \in C_\omega$, а $\hat{\varphi}_{10} \in H$ вследствие (41) не зависит от t. Зададим на C_ω многозначную функцию

$$G(u(t)) = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} F_1(u(t), x_2(u(t), t), t)\, dt, \quad u \in C_\omega, \tag{42}$$

где $x_2(u(t), t)$ — решение задачи (32) при $z = u(t)$. Как отмечено выше, оператор $F_1(z, x_2(z, t), t)$ полунепрерывен сверху по z и непрерывен (по метрике ρ) по t. Тогда ([8, с. 81]) для всех $u \in C_\omega$ подынтегральная функция в (42) содержит измеримые по t сечения. Поэтому G корректно определено.

Аналогично лемме 3 показывается, что $G: C_\omega \to Cv(H)$ полунепрерывно сверху и, следовательно [5, с. 128], замкнуто. По определению φ_{1n} имеем $G(\varphi_{1n}) \ni 0$. Тогда $G(\hat{\varphi}_{10}) \ni 0$. Но $G(\hat{\varphi}_{10}) = F_1^0(\hat{\varphi}_{10})$ и в силу единственности $\hat{\varphi}_{10} = \varphi_{10}$. Поэтому $\hat{\varphi}_{20}(t) \equiv \varphi_{20}(t)$.

Покажем, что для всех $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $0 < \mu \le \delta$

$$\max_{t \in \Delta} \| \varphi_{j\mu}(t) - \varphi_{j0}(t) \| \le \varepsilon, \quad j = 1, 2.$$

Предполагая противное, находим числа $\varepsilon_0 > 0$, $0 < \mu_k \to 0$, $k \to \infty$, $t_k \in \Delta$ и решения $\varphi_{j\mu_k}(t)$ такие, что $\| \varphi_{j\mu_k}(t_k) - \varphi_{j0}(t_k) \| > \varepsilon_0$, где $j = 1$ либо $j = 2$. По предыдущему последовательность $\{\varphi_{j\mu_k}(t)\}$ компактна, поэтому содержит равномерно на Δ сходящуюся подпоследовательность. В силу единственности, отмеченной выше, пределом этой подпоследовательности является φ_{j0}. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 3 примыкает к исследованиям по обоснованию принципа усреднения Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского (см. [9]).

1. *Благодатских В. И., Филиппов А. Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1985. – **169**. – С. 194–252.
2. *Хацкевич В. Л.* Дифференциальные включения с монотонными операторами. – Воронеж, 1990. – 55 с. –(Препринт / Воронеж. ун-т; № 6-5-90).
3. *Поволоцкий А. И., Ганго Е. А.* О периодических решениях дифференциальных уравнений с многозначной правой частью // Учен. зап. Ленингр. пед. ин-та. – 1972. – Вып. 541. – С. 145–154.
4. *Crandall M. G., Pazy A.* Non-linear evolution equations in Banach Spaces // Isr. J. Math.– 1972.– **11**. – P. 52–94.
5. *Обэн Ж. П., Экланд П.* Прикладной нелинейный анализ. – М.: Мир, 1988. – 510 с.
6. *Трубников В. Ю., Перов А. И.* Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями. – Минск: Наука и техника, 1986. – 200 с.
7. *Тихонов А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Мат. сб. – 1952. – **31**, № 3. – С. 575–586.
8. *Толстоногов А. А.* Дифференциальные включения в банаховом пространстве.– Новосибирск: Наука, 1986. – 295 с.
9. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1979. – 440 с.

Получено 15.02.91