УДК 517.911

Л. И. Каранджулов, канд. мат. наук (Ин-т прикл. математики и информатики при техн. ун-те, Болгария)

СТРУКТУРА ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ С ПОМОЩЬЮ ПОЛУОБРАТНЫХ МАТРИЦ

A general solution of linear boundary value systems of ordinary differential equations with an impulse force is constructed by using semi-inverse matrices and the generalized Green matrices.

За допомогою напівобернених матриць та узагальненої матриці Гріна побудовано загальний розв'язок лінійних крайових систем звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\dot{z} = A(t)z + \varphi(t), \quad t \in [a, b], \quad t \neq \tau_1, \tag{1}$$

$$l_0 z \equiv M_0 z(a) + N_0 z(b) = h, \tag{2}$$

$$l_{\tau_1} z \equiv S_1 z(\tau_1 + 0) + S_2 z(\tau_1 - 0) = d, \quad t = \tau_1, \tag{3}$$

где $A(t)$ — $(n \times n)$-мерная матрица, компоненты которой вещественные непрерывные на $[a, b]$ функции $A(t) \in C[a, b]$; $\varphi(t)$ — кусочно-непрерывная вектор-функция на $[a, b]$: $\varphi(t) \in C_{\tau_1}[a, b]$, т. е.

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t), & t \in [a, \tau_1]; \\ \varphi_2(t), & t \in [\tau_1, b], \end{cases}$$

$$\tau_1 \in (a, b), \quad \varphi_1(t) \in C[a, \tau_1], \quad \varphi_2(t) \in C[\tau_1, b],$$

h — m-мерный вектор-столбец констант из m-мерного вещественного евклидова пространства E_m; d — n-мерный вектор-столбец констант из n-мерного вещественного евклидова пространства E_n; M_0, N_0 — прямоугольные матрицы размерности $m \times n$; S_i, $i = 1, 2,$ — постоянные $(n \times n)$-мерные матрицы, причем $\det S_1 \neq 0$, $\det S_2 \neq 0$.

Исследуем вопросы о необходимых и достаточных условиях разрешимости и структуры общего решения из пространства $C_{\tau_1}[a, b]$ кусочно-непрерывных на $[a, b]$ вектор-функций

$$z(t) = \begin{cases} z_1(t), & t \in [a, \tau_1]; \\ z_2(t), & t \in [\tau_1, b], \end{cases}$$

с точкой разрыва первого рода при $t = \tau_1 \in (a, b)$:

$$z(\tau_1 + 0) - z(\tau_1 - 0) = z_2(\tau_1) - z_1(\tau_1),$$

где

$$z_1(t) = (z_{11}(t), \ldots, z_{1n}(t)) \in C[a, \tau_1],$$

$$z_2(t) = (z_{21}(t), \ldots, z_{2n}(t)) \in C[\tau_1, b],$$

а $C[a, \tau_1]$, $C[\tau_1, b]$ — пространства непрерывных вектор-функций соответственно на интервалах $[a, \tau_1]$, $[\tau_1, b]$. При $m = n$ эта задача рассмотрена в [1].

Наряду с неоднородной краевой задачей (1)–(3) рассмотрим соответствующую однородную задачу

$$\dot{z} = A(t)z, \tag{4}$$

$$l_0 z = 0, \tag{5}$$

$$l_{\tau_1} z = 0. \tag{6}$$

Обозначим через $\Phi(t)$ нормальную фундаментальную $(n \times n)$-мерную матрицу системы (4) при $t \in [a, b]$ без импульсного воздействия, т. е. выполняется условие $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$, $\Phi(a) = E$. Тогда общее решение системы (4) при $t \in [a, \tau_1]$ имеет вид

$$z_{10}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(a)C = \Phi(t)C, \quad t \in [a, \tau_1]. \tag{7}$$

Учитывая, что решение (7) при $t = a$ принимает вид $z(a) = C$, а при $t = \tau_1$ — $z_{10}(\tau_1 - 0) = \Phi(\tau_1)C$, а также используя (6), получаем начальное условие для нахождения решения (4) в интервале $[\tau_1, b]$:

$$z_{20}(\tau_1 + 0) = -S_1^{-1}S_2\Phi(\tau_1)C. \tag{8}$$

Тогда для решения (4) при $t \in [\tau_1, b]$ справедлива формула

$$z_{20}(t) = -\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau_1)S_1^{-1}S_2\Phi(\tau_1)C, \quad t \in [\tau_1, b]. \tag{9}$$

Если теперь принять во внимание краевые условия (5), то с помощью (7) при $t = a$ и (9) при $t = b$ получим алгебраическую систему относительно C:

$$D_0 C = 0, \tag{10}$$

в которой

$$D_0 = M_0 - N_0\Phi(b)\Phi^{-1}(\tau_1)S_1^{-1}S_2\Phi(\tau_1). \tag{11}$$

Пусть D_0^- — произвольная $(n \times m)$-мерная полуобратная матрица к $(m \times \times n)$-мерной матрице D_0. Как известно [2, с. 14], все решения алгебраической системы (10) можно получить по формуле $C = (E - D_0^- D_0)u$, где u — произвольный вектор, а E — единичная матрица. Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма. *Любое решение задачи* (4) – (6), *принадлежащее классу* $C_{\tau_1}[a, b]$, *можно представить в виде*

$$z_0(t, u) = \begin{cases} z_{10}(t)u, & t \in [a, \tau_1]; \\ z_{20}(t)u, & t \in [\tau_1, b], \end{cases}$$

где

$$z_{10}(t) = \Phi(t)(E - D_0^- D_0), \quad t \in [a, \tau_1],$$

$$z_{20}(t) = -\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau_1)S_1^{-1}S_2\Phi(\tau_1)(E - D_0^- D_0), \quad t \in [\tau_1, b],$$

а $\Phi(t)$ *— решение задачи* (4) *такое, что* $\Phi(a) = E$ *и* u *— произвольный вектор.*

***Замечание* 1.** Если (10) — только нулевое решение, то $D_0^- = D_0^+$, где D_0^+ — единственная псевдообратная матрица к D_0. Тогда задача (4) – (6) имеет только нулевое решение. В этом случае, если $m = n$, получаем результат из [1].

2. Пусть $z^*(t) \in C_{\tau_1}[a, b]$ — решение неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\dot{z} = A(t)z + \varphi(t), \quad t \neq \tau_1, \quad t \in [a, b], \tag{12}$$

$$l_0 z = M_0 z(a) + N_0 z(b) = 0, \tag{13}$$

$$l_{\tau_1} z = S_1 z(\tau_1 + 0) + S_2 z(\tau_1 - 0) = 0, \tag{14}$$

где $\varphi(t) \in C_{\tau_1}[a, b]$.

Обозначим

$$V = (M_0 - D_0)\int_a^{\tau_1} \Phi^{-1}(s)\varphi_1(s)ds - N_0 \int_{\tau_1}^{b} \Phi(b)\Phi^{-1}(s)\varphi_2(s)ds, \tag{15}$$

$$C_2^{(1)}(s) = [D_0^- M_0 - D_0^- D_0 + E]\Phi^{-1}(s), \quad t \in [a, \tau_1], \quad s \in [a, t],$$

$$C_1^{(1)}(s) = [D_0^- M_0 - D_0^- D_0]\Phi^{-1}(s), \quad t \in [a, \tau_1], \quad s \in [t, \tau_1], \tag{16}$$

$$C_1^{(2)}(s) = -D_0^- N_0 \Phi(b)\Phi^{-1}(s), \quad t \in [a, \tau_1], \quad s \in [\tau_1, b],$$

$$C_2^{(2)}(s) = [-\Phi^{-1}(\tau_1)S_1^{-1}S_2\Phi(\tau_1)D_0^- M_0 + \Phi^{-1}(\tau_1)S_1^{-1}S_2\Phi(\tau_1) \times$$
$$\times (D_0^- D_0 - E)]\Phi^{-1}(s), \quad t \in [\tau_1, b], \quad s \in [a, \tau_1], \tag{17}$$

$$C_2^{(3)}(s) = [\Phi^{-1}(\tau_1)S_1^{-1}S_2\Phi(\tau_1)D_0^- N_0\Phi(b) + E]\Phi^{-1}(s), \quad t \in [\tau_1, b], \quad s \in [\tau_1, t],$$

$$C_1^{(3)}(s) = \Phi^{-1}(\tau_1)S_1^{-1}S_2\Phi(\tau_1)D_0^- N_0\Phi(b)\Phi^{-1}(s), \quad t \in [\tau_1, b], \quad s \in [t, b].$$

Теорема 1. *Если выполняется условие*

$$(E - D_0 D_0^-)V = 0, \tag{18}$$

то для любой кусочно-непрерывной функции $\varphi(t) \in C_{\tau_1}[a, b]$ *существует решение* $z^*(t) \in C_{\tau_1}[a, b]$ *краевой задачи* (12) – (14) *с импульсным воздействием, которое задается формулой*

$$z^*(t, u) = \int_a^b G_0(t, s)\varphi(s)ds + z_0(t, u) \tag{19}$$

и допускает представление

$$z_1^*(t, u) = \Phi(t)\Bigg[\int_a^t C_2^{(1)}(s)\varphi_1(s)ds + \int_t^{\tau_1} C_1^{(1)}(s)\varphi_1(s)ds +$$
$$+ \int_{\tau_1}^b C_1^{(2)}(s)\varphi_2(s)ds + (E - D_0^- D_0)u\Bigg], \quad t \in [a, \tau_1],$$

$$z_2^*(t, u) = \Phi(t)\Bigg[\int_a^{\tau_1} C_2^{(2)}(s)\varphi_1(s)ds + \int_{\tau_1}^t C_2^{(3)}(s)\varphi_2(s)ds + \tag{20}$$
$$+ \int_t^b C_1^{(3)}(s)\varphi_2(s)ds - \Phi^{-1}(\tau_1)S_1^{-1}S_2\Phi(\tau_1)(E - D_0^- D_0)u\Bigg], \quad t \in [\tau_1, b],$$

где V, $C_j^{(i)}$ *— выражения из* (15) – (17), *а* u *— произвольный вектор.*

Доказательство. Непосредственной проверкой убеждаемся, что функции $z_1^*(t, u)$, $z_2^*(t, u)$, определяемые (20), удовлетворяют уравнению (12) и условиям (13), (14).

Дифференцируя (20) по z как по параметру, получаем

$$\dot{z}_1^*(t) = \dot{\Phi}(t)\Big[\int_a^t C_2^{(1)}(s)\varphi_1(s)ds + \int_t^{\tau_1} C_1^{(1)}(s)\varphi_1(s)ds +$$

$$+ \int_{\tau_1}^b C_1^{(2)}(s)\varphi_2(s)ds + (E - D_0^- D_0)u\Big] + \Phi(t)[C_2^{(1)}(t)\varphi_1(t) -$$

$$- C_1^{(1)}(t)\varphi_1(t)] = A(t)z_1^*(t) + \Phi(t)[(D_0^- M_0 - D_0^- D_0 +$$

$$+ E)\Phi^{-1}(t) - (D_0^- M_0 - D_0^- D_0)\Phi^{-1}(t)]\varphi_1(t) =$$

$$= A(t)z_1^*(t) + \Phi(t)(D_0^- M_0 - D_0^- D_0 + E - D_0^- M_0 + D_0^- D_0)\Phi^{-1}(t) \times$$

$$\times \varphi_1(t) = A(t)z_1^*(t) + \Phi(t)\Phi^{-1}(t)\varphi_1(t) = A(t)z_1^*(t) + \varphi_1(t).$$

Аналогично показываем, что функция $z_2^*(t)$ из (20) удовлетворяет уравнению

$$\dot{z}_2^*(t) = A(t)z_2^*(t) + \varphi_2(t), \quad t \in [\tau_1, b].$$

Так как $M_0 z_1^*(a) + M_0 z_2^*(b) = 0$, то, учитывая (20) при $t = a$ и $t = b$, получаем

$$l_0 z^* = M_0 z_1^*(a) + N_0 z_2^*(b) =$$

$$= M_0\Big[\int_a^{\tau_1} C_1^{(1)}(s)\varphi_1(s)ds + \int_{\tau_1}^b C_1^{(2)}(s)\varphi_2(s)ds + (E - D_0^- D_0)u\Big] +$$

$$+ N_0\Big[\int_a^{\tau_1} \Phi(b)C_2^{(2)}(s)\varphi_1(s)ds + \int_{\tau_1}^b \Phi(b)C_2^{(3)}(s)\varphi_2(s)ds - \Phi(b)\Phi^{-1}(\tau_1)S_1^{-1} \times$$

$$\times S_2\Phi(\tau_1)(E - D_0^- D_0)u\Big] = \int_a^{\tau_1}[M_0 C_1^{(1)}(s) + N_0\Phi(b)C_2^{(2)}(s)]\varphi_1(s)ds +$$

$$+ \int_{\tau_1}^b [M_0 C_1^{(2)}(s) + N_0\Phi(b)C_2^{(3)}(s)]\varphi_2(s)ds + [M_0 - N_0\Phi(b) \times$$

$$\times \Phi^{-1}(\tau_1)S_1^{-1}S_2\Phi(\tau_1)](E - D_0^- D_0)u.$$

С учетом (15), (17) и (11) находим

$$l_0 z^* = \int_a^{\tau_1}(D_0 D_0^- - E)M_0\Phi^{-}(s)\varphi(s)ds + \int_{\tau_1}^b (E - D_0 D_0^-)N_0\Phi(b) \times$$

$$\times \Phi^{-1}(s)\varphi_2(s)ds + D_0(E - D_0^- D_0)u.$$

Поскольку D_0^- — полуобратная матрица к матрице D_0, т. е. выполнено $D_0 D_0^- D_0 = D_0$, а $D_0(E - D_0^- D_0) = 0$, и равенства (18), окончательно получаем

$$l_0 z^* = (E - D_0 D_0^-)[-M_0\int_a^{\tau_1}\Phi^{-1}(s)\varphi(s)ds + N_0\Phi(b)\int_{\tau_1}^b \Phi(b)\Phi^{-1}(s) \times$$

$$\times \varphi_2(s)ds] = -(E - D_0 D_0^-)(V - D_0\int_a^{\tau_1}\Phi^{-1}(s)\varphi_1(s)ds) =$$

$$= -(E - D_0 D_0^-)V + (D_0 - D_0 D_0^- D_0)\int_a^{\tau_1}\Phi^{-1}(s)\varphi_1(s)ds = 0.$$

Аналогично проверяем и условие (14): $l_{\tau_1} z^* = 0$. Теорема доказана.

Матрицу-функцию $G_0(t, s)$, как и в [1, 3], будем называть функцией Грина краевой задачи (12) – (14) с импульсным воздействием. Она имеет вид

$$G_0(t, s) = \begin{cases} G_{10}(t, s), & t \in [a, s]; \\ G_{20}(t, s), & t \in [s, b], \end{cases}$$

где

$$G_{10}(t, s) = \begin{cases} \Phi(t) C_1^{(1)}(s), & t \in [a, \tau_1], \quad s \in [t, \tau_1]; \\ \Phi(t) C_1^{(2)}(s), & t \in [a, \tau_1], \quad s \in [\tau_1, b]; \\ \Phi(t) C_1^{(3)}(s), & t \in [\tau_1, b], \quad s \in [t, b], \end{cases}$$

$$G_{20}(t, s) = \begin{cases} \Phi(t) C_2^{(1)}(s), & t \in [a, \tau_1], \quad s \in [a, t]; \\ \Phi(t) C_2^{(2)}(s), & t \in [\tau_1, b], \quad s \in [a, \tau_1]; \\ \Phi(t) C_2^{(3)}(s), & t \in [\tau_1, b], \quad s \in [\tau_1, t]. \end{cases}$$

Легко показать, что $G_0(t, s)$ удовлетворяет всем требованиям определения функции Грина из [1, с. 8].

3. На основании результатов из п. 2 рассмотрим линейную неоднородную краевую задачу с импульсным воздействием

$$\dot{z} = A(t)z + \varphi(t), \quad t \neq \tau_1, \quad t \in [a, b], \tag{21}$$

$$l_0 z \equiv M_0 z(a) + N_0 z(b) = h, \tag{22}$$

$$l_{\tau_1} z \equiv S_1 z(\tau_1 + 0) + S_2 z(\tau_1 - 0) = d, \tag{23}$$

где $\varphi(t) \in C_{\tau_1}[a, b]$.

Обозначим

$$V_1 = V + h - N_0 \Phi(b) \Phi^{-}(\tau_1) S_1^{-1} d,$$

$$R(t) = \begin{cases} R_1(t) = \Phi(t) D_0^{-} \left[h - N_0 \Phi(b) \Phi^{-1}(\tau_1) S_1^{-1} d \right], & t \in [a, \tau_1]; \\ R_2(t) = \Phi(t) \Phi^{-1}(\tau_1) S_1^{-1} [(E + S_2 \Phi(\tau_1) D_0^{-} N_0 \times \\ \qquad \times \Phi(b) \Phi^{-1}(\tau_1) S_1^{-1}) d - S_2 \Phi(\tau_1) D_0^{-} h], & t \in [\tau_1, b]. \end{cases} \tag{24}$$

Теорема 2. *Краевая задача с импульсным воздействием* (21) – (23) *имеет решение* $z(t, u)$ *из класса* $C_{\tau_1}[a, b]$ *для любой кусочно-непрерывной функции* $\varphi(t)$ *в том и только в том случае, когда выполнено равенство*

$$(E - D_0 D_0^{-}) V_1 = 0. \tag{25}$$

Общее решение задачи (21) – (23) *представляется в виде*

$$z(t, u) = z^*(t, u) + R(t), \tag{26}$$

где $z^*(t, u)$ *имеет вид* (19), *а* $R(t)$ — (24).

Доказательство осуществляется с помощью теоремы 1.

Теорема 3. *Краевая задача с импульсным воздействием* (21) – (23) *имеет лишь одно решение* $z(t) \in C_{\tau_1}[a, b]$ *тогда и только тогда, когда* $C = 0$ *является единственным решением системы* (10). *Единственное решение задачи* (21) – (23) *можно получить по формуле* $z(t) = z^*(t) + R(t)$, *где*

$$z^*(t) = \int_a^b G_0(t, s) \varphi(s) ds,$$

а $R(t)$ *имеет вид* (24).

Замечание 2. Если $m = n$, то теорема 3 совпадает с теоремой 3 из [1, с. 15].

4. Построим обобщенную матрицу Грина $G(t, s)$ краевой задачи (21), (22) с импульсным воздействием (23).

Общее решение (26) можно записать следующим образом:

$$z(t, u) = z_0(t)u + \bar{z}_0(t), \tag{27}$$

где $z_0(t)$ — решение задачи (4) – (6), а $\bar{z}_0(t)$ — решение задачи (21) – (23), представимое в виде

$$\bar{z}_0(t) = \int_a^b G_0(t, s)\varphi(s)ds = R(t). \tag{28}$$

Следовательно, общее решение (27) краевой задачи (21) – (23) с импульсным воздействием состоит из суммы общего решения $z_0(t)u$ однородной задачи (4) – (6) и частного решения неоднородной краевой задачи (21) – (23). Выберем частное решение краевой задачи (21)–(23) из условия ортогональности на $[a, b]$:

$$\int_a^b z_0^T(t)z(t, u)dt = 0. \tag{29}$$

Подставляя $z(t, u)$ из (27) в (29) и полагая

$$T = \int_a^b z_0^T(t)z_0(t)dt, \quad B = -\int_a^b z_0^T(t)\bar{z}_0(t)dt,$$

получаем линейную алгебраическую систему для нахождения вектора u:

$$Tu = B. \tag{30}$$

Допустим, что (30) имеет единственное решение. Тогда его можно представить в виде $u = T^+B$, где T^+ — псевдообратная матрица к T.

Подставляя $\bar{z}_0(t)$ из (27) в B, получаем

$$B = -\int_a^b\int_a^b z_0^T(t)G_0(t, s)\varphi(s)dsdt - \int_a^b z_0^T(t)R(t)dt. \tag{31}$$

С учетом (31) получаем формулу для u:

$$u = T^+\left[-\int_a^b\int_a^b z_0^T(t)G_0(t, s)\varphi(s)dsdt - \int_a^b z_0^T(t)R(t)dt \right]. \tag{32}$$

Подставляя u в (27), находим единственное частное решение задачи (21) – (23), удовлетворяющее условию ортогональности. Обозначим его через $\bar{z}(t)$. Тогда

$$\bar{z}(t) = \int_a^b G(t, s)\varphi(s)ds + H(t), \tag{33}$$

где

$$\begin{gathered} G(t, s) = G_0(t, s) - z_0(t)T^+\int_a^b z_0^T(t)G_0(t, s)dt, \\ H(t) = R(t) - z_0(t)T^+\int_a^b z_0^T(t)R(t)dt. \end{gathered} \tag{34}$$

Учитывая изложенное выше, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 4. *Если система* $Tu = 0$ *имеет только нулевое решение, то общее* *решение задачи* (21) – (23) $z(t, u) \in C_{\tau_1}[a, b]$ *имеет вид*

$$z(t, u) = z_0(t)u + \bar{z}(t), \tag{35}$$

где $\bar{z}(t)$ — *единственное частное решение, которое удовлетворяет условию ортогональности* (29) *и задается формулой* (33).

В силу (21), (24) и (25) $z(t, u)$ из (35) допускает представление

$$\bar{z}_1(t) = \Phi(t)\Bigg[\int_a^t C_2^{(1)}(s)\varphi_1(s)ds + \int_t^{\tau_1} C_1^{(1)}(s)\varphi_1(s)ds + \int_{\tau_1}^b C_1^{(2)}(s) \times$$

$$\times \varphi_2(s)ds\Bigg] - z_{10}(t)T^+\Bigg\{\int_a^{\tau_1} z_{10}^T(t)\Phi(t)\Bigg[\int_a^t C_2^{(1)}(s)\varphi_1(s)ds +$$

$$+ \int_t^{\tau_1} C_1^{(1)}(s)\varphi_1(s)ds + \int_{\tau_1}^b C_1^{(2)}(s)\varphi_2(s)ds\Bigg]dt +$$

$$+ \int_{\tau_1}^b z_{20}^T(t)\Phi(t)\Bigg[\int_a^{\tau_1} C_2^{(2)}(s)\varphi_1(s)ds + \int_{\tau_1}^t C_2^{(3)}(s)\varphi_2(s)ds +$$

$$+ \int_t^b C_1^{(3)}(s)\varphi_2(s)ds\Bigg]dt\Bigg\} + H_1(t), \quad t \in [a, \bar{z}_1],$$

$$H_1(t) = R_1(t) - z_{10}(t)T^+\int_a^b z_0^T(t)R(t)dt,$$

$$\bar{z}_2(t) = \Phi(t)\Bigg[\int_a^{\tau_1} C_2^{(2)}(s)\varphi_1(s)ds + \int_{\tau_1}^t C_2^{(3)}(s)\varphi_2(s)ds + \int_t^b C_1^{(3)}(s)\varphi_2(s)ds\Bigg] -$$

$$- z_{20}(t)T^+\Bigg\{\int_a^{\tau_1} z_{10}^T(t)\Phi(t)\Bigg[\int_a^t C_2^{(1)}(s)\varphi_1(s)ds + \int_t^{\tau_1} C_1^{(1)}(s)\varphi_1(s)ds +$$

$$+ \int_{\tau_1}^b C_1^{(2)}(s)\varphi_2(s)ds\Bigg]dt + \int_{\tau_1}^b z_{20}^T(t)\Phi(t)\Bigg[\int_a^{\tau_1} C_2^{(2)}(s)\varphi_1(s)ds +$$

$$+ \int_{\tau_1}^t C_2^{(3)}(s)\varphi_2(s)ds + \int_t^b C_1^{(3)}(s)\varphi_2(s)ds\Bigg]dt\Bigg\} + H_2(t), \quad t \in [\tau_1, b],$$

$$H_2(t) = R_2(t) - z_{20}(t)T^+\int_a^b z_0^T(t)R(t)dt.$$

Использовав определения функции Грина из [1, с. 8; 4, с. 16], введем обобщенную матрицу Грина задачи (21) – (23) с импульсным воздействием.

Определение. *Матрицу-функцию*

$$G(t, s) = \begin{cases} G_1(t, s), & t \in [a, s]; \\ G_2(t, s), & t \in [s, b], \end{cases}$$

$$t, s \in [a, b], \quad t, s \neq \tau_1, \quad t \neq s,$$

где

$$G_1(t,s) = \begin{cases} C_1^{(1)}(t,s), & t \in [a,\tau_1], \quad s \in [t,\tau_1]; \\ C_1^{(2)}(t,s), & t \in [a,\tau_1], \quad s \in [\tau_1,b]; \\ C_1^{(3)}(t,s), & t \in [\tau_1,b], \quad s \in [t,b], \end{cases}$$

$$G_2(t,s) = \begin{cases} C_2^{(1)}(t,s), & t \in [a,\tau_1], \quad s \in [a,t]; \\ C_2^{(2)}(t,s), & t \in [\tau_1,b], \quad s \in [a,\tau_1]; \\ C_2^{(3)}(t,s), & t \in [\tau_1,b], \quad s \in [\tau_1,b], \end{cases}$$

назовем обобщенной матрицей Грина краевой задачи с импульсным воздействием (21) – (23), *если* $G(t,s)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) *каждый столбец матрицы при* $t \neq s \neq \tau_1$ *является решением из класса* $C_{\tau_1}[a,b]$ *однородной дифференциальной системы* (4):

$$\partial G(t,s)/\partial t = A(t)G(t,s); \quad s \in [a,b], \quad t \neq s \neq \tau_1;$$

2) *при* $t \neq s \neq \tau_1$ *матрица* $G(t,s)$ *имеет разрыв первого рода* $G(s+0,s) - G(s-0,s) = E$, $s \in [a,b]$;

3) *матрица удовлетворяет краевому условию*

$$l_0 G(\cdot,s) = 0, \quad s \in [a,b], \quad s \neq \tau_1;$$

4) *матрица удовлетворяет условию скачка*

$$l_{\tau_1} G(\cdot,s) = 0, \quad s \in [a,b], \quad s \neq \tau_1;$$

5) *каждый столбец матрицы ортогонален к любому решению однородной краевой задачи* (4) – (6)

$$\int_a^b z_0^T(t) G(t,s)\,dt = 0, \quad s \in [a,b], \quad s \neq \tau_1.$$

Теорема 5. *Матрица-функция* $G(t,s)$ *из* (34) *представляет обобщенную матрицу Грина краевой задачи* (21) – (23).

Доказательство проводится непосредственной проверкой свойств 1 – 5; при этом учитывается, что $G_0(t,s)$ удовлетворяет свойствам 1 – 4, $z_0(t)$ — решение задачи (4) – (6) и $\int_a^b z_0^T(t) G_0(t,s)\,ds$ — функция s. Действительно,

1) $$\frac{\partial G(t,s)}{\partial t} = \frac{\partial G_0(t,s)}{\partial t} - \frac{dz_0(t)}{dt}\, T^+ \int_a^b z_0^T(t) G_0(t,s)\,dt =$$

$$= A(t)G_0(t,s) - A(t)z_0(t)\, T^+ \int_a^b z_0^T(t) G_0(t,s)\,dt = A(t)G(t,s);$$

2) $$G(s+0,s) - G(s-0,s) = G_0(s+0,s) - G_0(s-0,s) -$$

$$- (z_0(s+0) - z_0(s-0))\, T^+ \int_a^b z_0^T(t) G_0(t,s)\,dt = E - 0 = E;$$

3) так как $l_0 G_0(\cdot,s) = 0$ и $l_0 z_0(\cdot) = 0$, то

$$l_0 G(\cdot,s) = l_0 G_0(\cdot,s) - l_0 z_0(\cdot)\, T^+ \int_a^b z_0^T(t) G_0(t,s)\,dt = 0;$$

4) поскольку $l_{\tau_1}G_0(t,s)=0$ и $l_{\tau_1}z_0(\cdot)=0$, то

$$l_{\tau_1}G(\cdot,s) = l_{\tau_1}G_0(\cdot,s) - l_{\tau_1}z_0(\cdot)\,T^+\int_a^b z_0^T(t)G_0(t,s)dt = 0;$$

5) при $s\in[a,b]$, $s\neq\tau_1$

$$\int_a^b z_0^T(t)G(t,s)dt = \int_a^b z_0^T(t)G_0(t,s)dt - \int_a^b z_0^T(t)z_0(t)T^+,$$

$$\int_a^b z_0^T(\tau)G_0(\tau,s)d\tau ds = \left(E-\int_a^b z_0^T(t)z_0(t)dt\,T^+\right)\int_a^b z_0^T(t)G_0(t,s)dt.$$

Но $T=\int_a^b z_0^T(t)z_0(t)dt$, т. е. $E=\int_a^b z_0^T(t)z_0(t)dt\,T^+$. Следовательно, $\int_a^b z_0^T(t)G(t,s)dt = 0$. Теорема доказана.

5. *Пример.* Рассмотрим следующую краевую задачу с импульсным воздействием: $\dot z = \varphi(t)$, $M_0z(a)+N_0z(b)=h$, $S_1z(\tau_1+0)+S_2z(\tau_1-0)=d$, где φ – двухмерный вектор-столбец ($n = 2$), $\varphi(t)\in C_{\tau_1}[a,b]$, т. е.

$$\varphi(t) = \begin{cases}\varphi_1(t), & t\in[a,\tau_1];\\ \varphi_2(t), & t\in[\tau_1,b],\end{cases} \quad \varphi_1(t) = \begin{Vmatrix}\varphi_{11}(t)\\ \varphi_{12}(t)\end{Vmatrix}, \quad \varphi_2(t) = \begin{Vmatrix}\varphi_{21}(t)\\ \varphi_{22}(t)\end{Vmatrix},$$

M_0, N_0 — (3×2)-мерные матрицы такие, что

$$M_0 = N_0 = \begin{Vmatrix} m_1 & 0\\ 0 & m_2\\ 0 & m_3\end{Vmatrix}, \quad m_i\in R, \quad i=1,2,3, \quad m_i\neq 0, \quad h = \begin{Vmatrix}h_1\\ h_2\\ h_3\end{Vmatrix}, \quad d = \begin{Vmatrix}d_1\\ d_2\end{Vmatrix},$$

а S_1, S_2 — (2×2)-мерные матрицы вида

$$S_1 = \begin{Vmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{Vmatrix}, \quad S_2 = \begin{Vmatrix}b_1 & 0\\ 0 & b_2\end{Vmatrix}, \quad \det S_1\neq 0, \quad \det S_2\neq 0.$$

Проводя элементарные выкладки, получаем

$$\Phi(t) = E_2 = \begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix}, \quad \Phi^{-1}(t) = E_2, \quad S_1^{-1} = \begin{Vmatrix}a_1^{-1} & 0\\ 0 & a_2^{-1}\end{Vmatrix},$$

$$D_0 = \begin{Vmatrix} m_1(1-l_1/a_1) & 0\\ 0 & m_2(1-b_2/a_2)\\ 0 & m_3(1-b_2/a_2)\end{Vmatrix}.$$

Если предположить, что $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, т. е. $S_1=S_2$, то

$$D_0 = \begin{Vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{Vmatrix} \text{ и тогда } D_0^- = \begin{Vmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}.$$

Следовательно,

$$z_0(t) = \begin{cases} z_{10}(t) = E_2, & t\in[a,\tau_1];\\ z_{20}(t) = -E_2, & t\in[\tau_1,b],\end{cases}$$

и $T=(b-a)E_2$, $T^{-1}=(b-a)^{-1}E_2$,

$$V = \begin{Vmatrix} m_1 \int\limits_a^{\tau_1} \varphi_{11}(s)\,ds - m_1 \int\limits_{\tau_1}^{b} \varphi_{21}(s)\,ds \\ m_2 \int\limits_a^{\tau_1} \varphi_{12}(s)\,ds - m_2 \int\limits_{\tau_1}^{b} \varphi_{22}(s)\,ds \\ m_3 \int\limits_a^{\tau_1} \varphi_{12}(s)\,ds - m_3 \int\limits_{\tau_1}^{b} \varphi_{22}(s)\,ds \end{Vmatrix}$$

Если $m_i \left[\int_a^{\tau_1} \varphi_{1j}(s)ds - \int_{\tau_1}^{b} \varphi_{2j}(s)ds \right] = 0,\ i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2,$ то выполняется (18). Тогда

$$V_1 = \begin{Vmatrix} h_1 - m_1 d_1 / a_1 \\ h_2 - m_2 d_2 / a_2 \\ h_3 - m_3 d_2 / a_2 \end{Vmatrix}.$$

Допустим, что $h_1 - m_1 d_1 / a_1 = 0,\ h_2 - m_2 d_2 / a_2 = 0,\ h_3 - m_3 d_2 / a_2 = 0.$ Тогда $V_1 = 0$, а

$$R(t) = \begin{cases} R_1(t) = 0, & t \in [a, \tau_1]; \\ R_2(t) = \begin{Vmatrix} d_1 / a_1 \\ d_2 / a_2 \end{Vmatrix}, & t \in [\tau_1, b]. \end{cases}$$

Функция Грина имеет вид

$$G_{10}(t, s) = \begin{cases} 0; \\ 0; \\ 0, \end{cases} \quad G_{20}(t, s) = \begin{cases} E_2; \\ -E_2; \\ E_2. \end{cases}$$

Частное решение $\bar{z}(t)$ имеет представление

$$\bar{z}_1(t) = \int\limits_a^{t} \begin{Vmatrix} \varphi_{11}(s) \\ \varphi_{12}(s) \end{Vmatrix} ds - \frac{1}{b-a} \left\{ \int\limits_a^{\tau_1} \int\limits_a^{t} \begin{Vmatrix} \varphi_{11}(s) \\ \varphi_{12}(s) \end{Vmatrix} ds\,dt + \right.$$

$$\left. + (b - \tau_1) \int\limits_a^{\tau_1} \begin{Vmatrix} \varphi_{11}(s) \\ \varphi_{12}(s) \end{Vmatrix} ds - \int\limits_{\tau_1}^{b} \int\limits_{\tau_1}^{t} \begin{Vmatrix} \varphi_{11}(s) \\ \varphi_{22}(s) \end{Vmatrix} ds\,dt \right\} + \frac{b - \tau_1}{b - a} \begin{Vmatrix} d_1 / a_1 \\ d_2 / a_2 \end{Vmatrix}, \quad t \in [a, \tau_1],$$

$$\bar{z}_2(t) = \int\limits_{\tau_1}^{t} \begin{Vmatrix} \varphi_{21}(s) \\ \varphi_{22}(s) \end{Vmatrix} ds - \int\limits_a^{\tau_1} \begin{Vmatrix} \varphi_{11}(s) \\ \varphi_{12}(s) \end{Vmatrix} ds + \frac{1}{b-a} \left\{ \int\limits_a^{\tau_1} \int\limits_a^{t} \begin{Vmatrix} \varphi_{11}(s) \\ \varphi_{12}(s) \end{Vmatrix} ds\,dt + \right.$$

$$\left. + (b - \tau_1) \int\limits_a^{\tau_1} \begin{Vmatrix} \varphi_{11}(s) \\ \varphi_{12}(s) \end{Vmatrix} ds - \int\limits_{\tau_1}^{b} \int\limits_{\tau_1}^{t} \begin{Vmatrix} \varphi_{21}(s) \\ \varphi_{22}(s) \end{Vmatrix} ds\,dt \right\} - \frac{\tau_1 - a}{b - a} \begin{Vmatrix} d_1 / a_1 \\ d_2 / a_2 \end{Vmatrix}, \quad t \in [\tau_1, b].$$

Общее решение, согласно теореме 4, имеет вид

$$z(t, u) = \begin{cases} E_2 u + \bar{z}_1(t), & t \in [a, \tau_1]; \\ -E_2 u + \bar{z}_2(t), & t \in [\tau_1, b]. \end{cases}$$

1. *Самойленко А. М., Ронто Н. И., Курбанбаев О. О.* Метод коллокации для краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. – Киев, 1989. – 41 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 89. 61).
2. *Бояринцев Ю. Е.* Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений . – Новосибирск: Наука, 1988. – 158 с.
3. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. – 288 с.
4. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1990. – 96 с.

Получено 17. 10. 91