УДК 519.5

Р. Г. Сафарян, канд. физ.-мат. наук (Ереван. пед. ин-т)

ДВЕ ТЕОРЕМЫ О ЗАМКНУТОСТИ МНОЖЕСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ТИПА ЛАПЛАСА

Сформулированы и доказаны две теоремы о пределе преобразований Лапласа для случайных величин со значениями в пространстве неотрицательных мер.

Сформульовано та доведено дві теореми про границю перетворень Лапласа для випадкових величин, що набувають значень у просторі невід'ємних мір.

Пусть E — метрическое полное сепарабельное пространство, $\mathcal{B}(E)$ — борелевская σ-алгебра. Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество конечных неотрицательных мер на измеримом пространстве $(E, \mathcal{B}(E))$.

На множестве $\mathfrak{M}$ можно определить измеримую структуру — σ-алгебру $\mathcal{M}$, относительно которой по определению измеримы все отображения

$$\mathcal{M} \ni m \to m(S), \quad S \in \mathcal{B}(E).$$

Введем в рассмотрение множества $\mathbb{B}_+$ и $\mathbb{C}_+$, состоящие из всех ограниченных измеримих неотрицательных функций на E и всех непрерывных ограниченных неотрицательных функций на E соответственно. Для $g \in \mathbb{B}_+$, $m \in \mathfrak{M}$ положим

$$\langle m, g \rangle = \int_E m(dx)\, g(x).$$

Пусть, далее, $\mathbb{R}_+$ — неотрицательная полупрямая. Через $\mathcal{L}$ обозначим множество функций $\varphi : \mathbb{B}_+ \to \mathbb{R}_+$ вида

$$\varphi(g) = \int_{\mathfrak{M}} e^{-\langle l, g \rangle} P(dl),$$

где P — вероятностная мера на $(\mathfrak{M}, \mathcal{M})$.

Теорема 1. *Пусть последовательность* $\varphi_n \in \mathcal{L}$ *такова, что для всех* $g \in \mathbb{B}_+$ *существует предел*

$$\varphi(g) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(g),$$

и функция $\varphi(g)$ *непрерывна на* $\mathbb{B}_+$ *в топологии поточечной ограниченной сходимости. Тогда* $\varphi \in \mathcal{L}$.

Доказательство. Ограничимся случаем несчетного E. В этом случае $(E, \mathcal{B}(E))$, как измеримое пространство, изоморфно отрезку $[0, 1]$ с борелевской σ-алгеброй $\mathcal{B}[0, 1]$. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что $E\,[0, 1]$.

Между двумя мерами m и l из $\mathfrak{M}$ определено расстояние Леви — Прохорова [2, с. 208]

$$\rho(l, m) = \min\{r \geq 0:\ l[0, x-r) - r \leq m[0, x) \leq l(0, x+r) + r$$

для всех $x \in [0, 1]\}$.

Снабженное метрикой ρ пространство $\mathfrak{M}$ становится метрическим полным сепарабельным пространством, а σ-алгебра $\mathcal{M}$ оказывается борелевской σ-алгеброй метрического пространство $(\mathfrak{M}, \rho)$.

Последнее следует из того, что любая $\mathcal{B}(E)$-измеримая ограниченная функция g есть результат не более чем счетного числа поточечных предельных переходов по непрерывным функциям и их пределам и что сходимость мер в метрике ρ равносильна их слабой сходимости [2, с. 209].

Нетрудно также понять, что множество мер $M \subset \mathfrak{M}$ ограничено в метрике ρ тогда и только тогда, когда их полные массы равномерно ограничены, т. е. когда $\sup\limits_{m \in M} m(E) < \infty$. При этом в силу компактности $E = [0, 1]$ любое ρ-ограниченное подмножество в $\mathfrak{M}$ предкомпактно в метрике ρ [3, с. 516].

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Так как $\varphi_n \in \mathcal{L}$, то

$$\varphi_n(g) = \int\limits_{\mathfrak{M}} e^{-\langle l, g\rangle} P_n(dl).$$

Проверим плотность последовательности мер P_n на метрическом пространстве $(\mathfrak{M}, \rho)$. Для этого по заданному $\varepsilon > 0$ необходимо построить такой компакт $\mathfrak{K}_\varepsilon \subset \mathfrak{M}$, что

$$\sup_n P_n(\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{K}_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{1}$$

Покажем, что в качестве такого компакта можно взять

$$\mathfrak{K}_\varepsilon = \{m \in \mathfrak{M}\colon\ m(E) \le c\}, \tag{2}$$

где $c = c(\varepsilon)$ будет выбрано позже. Обозначим через I функцию на E, тождественно равную единице, и заметим, что $\varphi_n(tI)$, как функция от $t \ge 0$, является преобразованием Лапласа некоторого распределения вероятностей $F_n(dx)$ на R_+, т. е.

$$\varphi_n(tI) = \int\limits_0^\infty e^{-tx} F_n(dx).$$

Из условий теоремы следует [4, с. 486], что последовательность распределений F_n слабо сходится к вероятностному распределению F, и

$$\varphi(tI) = \int\limits_0^\infty e^{-tx} F(dx).$$

Следовательно, последовательность мер F_n плотна, т. е.

$$\sup_n F_n(c, \infty) \underset{c \to \infty}{\to} 0. \tag{3}$$

Очевидно также, что $P_n(\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{K}_\varepsilon) = F_n(c, \infty)$, если только $\mathfrak{K}_\varepsilon$ определено по (2). Теперь, чтобы получить (1), достаточно выбрать $c = c(\varepsilon)$ из условия $\sup\limits_n F_n(c, \infty) < \varepsilon$, что возможно в силу (3).

Таким образом, последовательность P_n плотна. Значит, существуют подпоследовательность $n_k \to \infty$ и вероятностная мера P на $\mathfrak{M}$ такие, что

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathfrak{M}}\Phi(l)\,P_{n_k}(dl) = \int_{\mathfrak{M}}\Phi(l)\,P(dl) \tag{4}$$

для любой непрерывной ограниченной функции Φ на $(\mathfrak{M}, \rho)$. Пусть $f \in \mathbb{C}_+$. Тогда функция $\Phi_f(l) = \exp\{-\langle l, f\rangle\}$ непрерывна и ограничена на $(\mathfrak{M}, \rho)$. Отсюда и из (4) с $\Phi = \Phi_f$ получаем

$$\varphi(f) = \int_{\mathfrak{M}} e^{-\langle l, f\rangle}\,P(dl) \tag{5}$$

для всех $f \in \mathbb{C}_+$.

Левая часть этого равенства по условию, а правая — по построению выдерживают поточечный ограниченный предельный переход. Но $\mathbb{C}_+$ плотно в $\mathbb{B}_+$ в топологии поточечной ограниченной сходимости. Значит, (5) справедливо для всех $f \in \mathbb{B}_+$, что и требовалось доказать.

В качестве следствия теоремы 1 сформулируем следующий результат, представляющий и самостоятельный интерес. Обозначим через $\mathcal{K}$ класс функций $\psi\colon \mathbb{B}_+ \to \mathbb{R}_+$ вида

$$\psi(g) = \langle l, g\rangle + \int_{\mathfrak{M}}(1 - e^{-\langle l, g\rangle})\,\Pi(dl),$$

где $\alpha \in \mathfrak{M}$, $\Pi(dl) \geq 0$, $\int_{\mathfrak{M}}[l(E)\wedge 1]\,\Pi(dl) < \infty$.

Положим $\varphi_t(g) = \exp\{-t\,\psi(g)\}$.

В [5, с. 409] показано, что $\psi \in \mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда $\varphi_t \in \mathcal{L}$ для всех $t \geq 0$. Отсюда и из теоремы 1 непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть последовательность $\psi_n \in \mathcal{K}$ такова, что для всех $g \in \mathbb{B}_+$ существует предел $\psi(g) = \lim_{n\to\infty}\psi_n(g)$, и $\psi(g)$ непрерывно зависит от g в топологии поточечной сходимости. Тогда $\psi \in \mathcal{K}$.*

1. *Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А.* Управляемые марковские процессы и их приложения. – М.: Наука, 1975. – 338 с.
2. *Ханнекен П. Л., Тортра А.* Теория вероятностей и некоторые ее приложения. – М.: Наука, 1974. – 472 с.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 568 с.
4. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 3-х т.– М.: Мир, 1984. – Т. 2. – 738 с.
5. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3-х т.– М.: Наука, 1973. – Т. 2. – 640 с.

Получено 25.06.91