УДК 519.926

А. Г. Баскаков, д-р физ.-мат. наук (Воронеж. ун-т)

О ПРИВОДИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

The results concerning the reducing of linear differential operators with unbounded operator coefficients to differential operators with a simpler structure are obtained.

Одержані результати про звідність лінійних диференціальних операторів з необмеженими операторними коефіцієнтами до диференціальних операторів простішої структури.

В настоящей статье рассматриваются вопросы декомпозиции линейного параболического абстрактного дифференциального оператора вида $L = d/dt + A_0 - B(t)$ с неограниченным дискретным самосопряженным оператором A_0 и функцией B, значениями которой являются неограниченные несамосопряженные операторы, подчиненные оператору A_0. Приводимые здесь результаты примыкают к результатам статей [1 – 4], получены методом подобных операторов [4, 5] и группируются вокруг теоремы 2 о подобии (приводимости) дифференциального оператора L „распавшейся" системе конечномерных дифференциальных операторов. Таким образом, теорема 2 открывает возможность использования ряда известных результатов о приводимости обыкновенных дифференциальных операторов [6 – 9].

1. Основное уравнение метода подобных операторов. Пусть $A: D(A) \subset \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ — линейный оператор с областью определения $D(A)$ из комплексного банахова пространства $\mathfrak{X}$ и непустым резольвентным множеством $\rho(A) \subset \mathbb{C}$ ($\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ — спектр оператора A). Обозначим через $R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$, резольвенту оператора A, а через $\mathfrak{L}_A(\mathfrak{X})$ множество операторов, действующих в $\mathfrak{X}$ и подчиненных оператору A. Рассматриваемые здесь задачи таковы, что можно считать $D(B) = D(A)$ $\forall B \in \mathfrak{L}_A(\mathfrak{X})$. При таком соглашении $\mathfrak{L}_A(\mathfrak{X})$ является линейным пространством, которое становится банаховым, если $\mathfrak{L}_A(\mathfrak{X})$ нормировать следующим образом: $\|B\|_A = \inf\{c > 0: \|Bx\| \le c(\|x\| + \|Ax\|)\ \forall x \in D(B) = D(A)\}$ $\forall B \in \mathfrak{L}_A(\mathfrak{X})$. Если A — (непрерывно) обратимый оператор, то далее полагаем $\|B\|_A = \|BA^{-1}\|_\infty$, где $\|X\|_\infty$ — обычная норма оператора X из банаховой алгебры $\operatorname{End}\mathfrak{X}$ ограниченных линейных операторов, действующих в $\mathfrak{X}$. Ясно, что так вводимые нормы эквивалентны.

Через $\operatorname{Im} A$ и $\operatorname{Ker} A$ обозначим соответственно множество значений оператора A и его ядро.

***Определение* 1.** *Два линейных оператора* $A_i: D(A_i) \subset \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$, $i = 1, 2$, *называются подобными (приводимыми), если существует обратимый оператор* $U \in \operatorname{End}\mathfrak{X}$ *такой, что* $UD(A_2) = D(A_1)$ *и* $A_1 Ux = UA_2 x$ $\forall x \in D(A_2)$. *Оператор* U *назовем оператором преобразования оператора* A_1 *в оператор* A_2.

Заметим, что подобные операторы имеют одинаковый спектр и ряд других совпадающих спектральных характеристик. Придерживаясь аксиоматического подхода в методе подобных операторов, дадим следующее определение.

***Определение* 2.** *Пусть* $\mathfrak{A}$ *— линейное многообразие операторов из* $\mathfrak{L}_A(\mathfrak{X})$ *и* $J: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, $\Gamma: \mathfrak{A} \to \operatorname{End}\mathfrak{X}$ *— два трансформатора (линейных оператора в пространстве операторов). Тройку* $(\mathfrak{A}, J, \Gamma)$ *назовем допустимой для* *линейного оператора* $A\colon D(A) \subset \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$, *а* $\mathfrak{U}$ *— допустимым пространством возмущений, если*

1) $\mathfrak{U}$ *— банахово пространство* (*со своей нормой*), *непрерывно вложенное в* $\mathfrak{L}_A(\mathfrak{X})$ (*т. е.* $\|X\| \geq \text{const}\, \|X\|_A \ \ \forall X \in \mathfrak{U}$);

2) J *и* Γ *— непрерывные операторы;*

3) $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$ *и* $A(\Gamma X) - (\Gamma X)A = X - JX \ \ \forall X \in \mathfrak{U}$;

4) $X\Gamma Y$, $(\Gamma X)Y \in \mathfrak{U} \ \ \forall X, Y \in \mathfrak{U}$ *и существует такая постоянная* $\gamma > 0$, *что* $\|\Gamma\| \leq \gamma$ *и* $\max\{\|X\Gamma Y\|, \|(\Gamma X)Y\|\} \leq \gamma \|X\| \|Y\| \ \ \forall X, Y \in \mathfrak{U}$;

5) J *— проектор и* $J((\Gamma X)JY) = J((JX)\Gamma Y) = 0 \ \ \forall X, Y \in \mathfrak{U}$;

6) $\forall X \in \mathfrak{U} \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \lambda_\varepsilon \in \rho(A)$, *такое, что* $\|XR(\lambda_\varepsilon, A)\|_\infty < \varepsilon$.

Отметим, что построение допустимой тройки $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ для оператора A осуществляется таким образом, чтобы имелась возможность преобразовать операторы вида $A - B$, $B \in \mathfrak{U}$ в подобные операторы вида $A - B_0$, где B_0 принадлежит подпространству $\mathfrak{U}_0 = \operatorname{Im} J$ (т. е. $\exists X_0 \in \mathfrak{U}_0$, что $B_0 = JX_0$). При этом проектор J выбирается так, чтобы операторы из $\mathfrak{U}_0$ имели несложную по отношению к A структуру. Введение трансформатора Γ тесно связано с построением оператора преобразования оператора $A - B$ в оператор вида $A - B_0$.

Итак, пусть $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ — допустимая для оператора $A\colon D(A) \subset \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ тройка и $B \in \mathfrak{U}$ — возмущение оператора A. Оператор $X_0 \in \mathfrak{U}$ выберем так, чтобы выполнялось равенство

$$(A - B)(I + \Gamma X_0) = (I + \Gamma X_0)(A - JX_0), \tag{1}$$

которое при условии $\|\Gamma X_0\|_\infty < 1$ (влекущем обратимость оператора $U = I + \Gamma X_0$) означает подобие операторов $A - B$ и $A - JX_0$. Нетрудно проверить, что равенство (1) справедливо, если X_0 — решение нелинейного уравнения вида

$$X = \Phi(X) = B\Gamma X - (\Gamma X)JB - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B, \tag{2}$$

рассматриваемого в банаховом пространстве $\mathfrak{U}$ допустимых возмущений. Применяя к нелинейному оператору $\Phi\colon \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ (корректность его определения следует из определения допустимой тройки) метод сжимающих отображений, получаем (см. [5]) следующую теорему.

Теорема 1. *Если выполнено условие*

$$\|B\| \|\Gamma\| \|J\| < 1/4, \tag{3}$$

то выполняется равенство (1), *где* X_0 *— решение уравнения* (2), *которое можно найти методом последовательных приближений, причем оператор* $I + \Gamma X_0$ *обратим.*

2. Теорема о декомпозиции дифференциального оператора. Всюду далее будем предполагать, что $A_0\colon D(A_0) \subset H \to H$ — самосопряженный полуограниченный снизу дискретный оператор с собственными значениями $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \ldots \geq \lambda_n \geq \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. Ввиду характера рассматриваемых задач без ограничения общности можно считать оператор A_0 положительным (так что A_0 — обратимый оператор). Далее полагаем, что собственные значения оператора A_0 допускают асимптотическое представление вида

$$\lambda_n = Cn^\alpha + O(n^r), \tag{4}$$

где $C > 0$, $\alpha > r \geq 0$. В основе такого предположения лежит формула для собственных значений эллиптического псевдодифференциального оператора [10]. Рассмотрим число ν, удовлетворяющее условиям

$$\nu \in (-\infty, 1), \quad \alpha(1-\nu) > 1. \tag{5}$$

Если число $\rho > 0$ определено из условия

$$\tau = \rho[\alpha(1-\nu)-1] - \max\{0, 1-\rho(\alpha - r)\} > 0, \tag{6}$$

то непосредственный подсчет, основанный на условиях (4 – 6), показывает, что для любого числа $b > 0$ найдутся две последовательности положительных чисел (r_n) и (r_n') такие, что выполнены следующие условия:

1) $bn^{\rho\alpha} \leq r_n < r_n' \leq b(n+1)^{\rho\alpha}$;

2) $r_{n+1} - r_n' \geq C_1 n^{\rho(\alpha-1)}(1+n^{1-\rho(\alpha-r)})^{-1}$, $C_1 > 0$, $n \geq 1$;

3) $\sigma(A_0) \cap [r_n', r_{n+1}] = \varnothing$, $n \geq 1$;

4) $\sigma(A_0) = \bigcup\limits_{n\geq 1} \sigma_n$, $\sigma_n = \sigma(A_0) \cap (r_n, r_n')$;

5) число собственных значений оператора A_0 (с учетом кратности), лежащих в σ_n, конечно и не превышает $C_2 n^{\rho-1}(1+n^{1-\rho(\alpha-r)})^{-1}$, $n \geq 1$, $C_2 > 0$.

Обозначим через $P_n = P(\sigma_n, A_0)$, $n \geq 1$, ортопроектор Риса, построенный по спектральному множеству σ_n, и через H_n конечномерное подпространство $\operatorname{Im} P_n$ ($P(\sigma, A_0)$, $\sigma \subset \mathbb{R}$ — проекторозначная мера для A_0).

Сделанные предположения относительно асимптотики спектра оператора A_0 позволяют приступить к построению допустимых троек для дифференциального оператора $A = d/dt + A_0$: $D(A) \subset \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X} = C(\mathbb{R}, H)$ (или $\mathfrak{X} = L_p(\mathbb{R}, H)$, $1 \leq p < \infty$) и $C(\mathbb{R}, Y)$ — банахово пространство ограниченных непрерывных функций, определенных на вещественной прямой $\mathbb{R}$, со значениями в банаховом пространстве Y ($\|\varphi\|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|\varphi(t)\|$, $\varphi \in C(\mathbb{R}, Y)$). Область определения $D(A)$ оператора A состоит из функций $\varphi \in \mathfrak{X}$, которые допускают представление в виде $\varphi(t) = T(t)\varphi(\tau) + \int_\tau^t T(t-s)f(s)\,ds$ $\forall\, t, \tau \in \mathbb{R}$, $t \geq \tau$, где f — некоторая функция из $\mathfrak{X}$ и T: $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R}: t \geq 0\} \to \operatorname{End} H$ — полугруппа компактных самосопряженных операторов, производящим оператором которой является оператор $-A_0$, причем $\operatorname{Im} T(t) \supset D(A_0)$ $\forall t > 0$.

Из условия $0 \notin \sigma(A_0)$ следует обратимость оператора $A = d/dt + A_0$ и обратный A^{-1}: $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ имеет вид

$$(A^{-1}x)(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-s)x(s)ds = \int_0^{\infty} T(s)x(t-s)ds. \tag{7}$$

Допустимые пространства возмущений для оператора $A = d/dt + A_0$ (играющего в дальнейшем роль невозмущенного оператора) будут строиться с использованием функциональных банаховых алгебр из следующего определения.

Определение 3. *Подалгебру $\mathfrak{A}_*$ из банаховой алгебры операторозначных функций $C(\mathbb{R}, \operatorname{End} H)$ назовем допустимой функциональной алгеброй, если* *выполнены следующие три условия:*

1) $\mathfrak{A}_*$ — *банахова алгебра со своей нормой* $\|X\|_*$, $X \in \mathfrak{A}$, *для которой* $\|X\|_* \geq \|X\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|X(t)\|$, $X \in \mathfrak{A}_*$;

2) *для любой функции* $X \in \mathfrak{A}_*$ *и любого* $s \in \mathbb{R}$ *сдвиг* X_s $(X_s(t) = X(t-s),\ t \in \in \mathbb{R})$ *функции* X *принадлежит* $\mathfrak{A}_*$, $\|X_s\|_* = \|X\|_*$ *и функция* $s \mapsto X_s\colon \mathbb{R} \to \mathfrak{A}_*$ *непрерывна;*

3) *если* $T\colon \operatorname{End} H \to \operatorname{End} H$ — *трансформатор, то функция* $(TX)(t) = T(X(t))$, $t \in \mathbb{R}$, *принадлежит алгебре* $\mathfrak{A}_*$ *для любой функции* $X \in \mathfrak{A}_*$ *и* $\|TX\|_* \leq \|T\|\,\|X\|_*$.

Примерами допустимых функциональных алгебр являются: подалгебра $C_\omega(\mathbb{R}, \operatorname{End} H) \subset C(\mathbb{R}, \operatorname{End} H)$ равномерно непрерывных функций, алгебра $C_\omega(\mathbb{R}, \operatorname{Comp} H)$, где $\operatorname{Comp} H$ — идеал компактных операторов из алгебры $\operatorname{End} H$, алгебра $AP_\omega(\mathbb{R}, \operatorname{End} H)$ непрерывных операторозначных квазипериодических функций с частотным базисом $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$, $m \geq 1$.

Итак, пусть $\mathfrak{A}_*$ — некоторая допустимая функциональная алгебра и число ν удовлетворяет условиям (5). Символом $\mathfrak{A}_\nu$ обозначим банахово пространство линейных операторов, представимых в виде $(X\varphi)(t) = X_0(t)A_0^\nu\varphi(t)$, где A_0^ν — дробная степень оператора A_0, $X_0 \in \mathfrak{A}_*$, $\varphi \in C(\mathbb{R}, H)$, и положим $\|X\| = \|X_0\|_*$. Из определения пространства $\mathfrak{A}_\nu$ следует, что при $\nu < 0$ операторы из $\mathfrak{A}_\nu$ есть операторы умножения на функции, значениями которых являются компактные операторы. Поскольку $A_0^\nu(A^{-1}x)(t) = \int_0^\infty A_0^\nu T(s)x(t-s)ds \ \ \forall x \in \mathfrak{X}$ (см. формулу (7)), то

$$\|A_0^\nu A^{-1}x\|_\infty \leq \text{const}\,\Big(\int_0^\infty s^{-\nu}e^{-\lambda_1 s}ds\Big)\,\|x\|_\infty,$$

т. е. область определения каждого оператора из $\mathfrak{A}_\nu$ содержит $D(A)$ и $\mathfrak{A}_\nu$ непрерывно вложено в $\mathfrak{L}_A(\mathfrak{X})$, что соответствует свойству 1 из определения 2. Поскольку

$$\|A_0^\nu(A + \lambda_0 I)^{-1}\|_\infty \leq \text{const}\int_0^\infty s^{-\nu}\exp(-\lambda_1 - \lambda_0)sds \leq C(\nu)(\lambda_1 + \lambda_0)^{\nu-1},$$

где $\lambda_0 > 0$, то для пространства $\mathfrak{A}_\nu$ выполнено также условие 5 из определения 2.

Банахово пространство $\mathfrak{A}_\nu$ в дальнейшем будет играть роль допустимого пространства возмущений для оператора $A = d/dt + A_0$. По любому наперед заданному натуральному числу m введем в рассмотрение два трансформатора $J_\nu(m)\colon \mathfrak{A}_\nu \to \mathfrak{A}_\nu$, $\Gamma_\nu(m)\colon \mathfrak{A}_\nu \to \operatorname{End}\mathfrak{X}$ таких, что $(\mathfrak{A}_\nu, J_\nu(m), \Gamma_\nu(m))$ — допустимая для A тройка (построение трансформатора $\Gamma_\nu(m)$ рассматривается в следующем пункте).

Из свойства 3 определения 3 следует, что формула $(J(m)X_0)(t) = \sum_{j\geq m+1} P_j \times X_0(t)P_j + \tilde{P}_m X_0 \tilde{P}_m$, $X_0 \in \mathfrak{A}_*$, определяет проектор $J(m)\colon \mathfrak{A}_* \to \mathfrak{A}_*$, для которого $\|J(m)\| = 1$. Теперь формулой

$$(J_\nu(m)X\varphi)(t) = (J_m X_0)(t)A_0^\nu\varphi(t), \quad X(t) = X_0(t)A_0^\nu, \quad X_0 \in \mathfrak{A}_*, \quad \varphi \in D(A),$$

определим трансформатор-проектор $J_\nu(m) \in \operatorname{End} \mathfrak{A}_\nu$, $\| J_\nu(m) \| = 1$.

Теорема 2. *Пусть функция* $B\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End} H$ *принадлежит допустимой функциональной алгебре* $\mathfrak{A}_*$ *и выполнено одно из следующих условий:*

1) $\nu \in (-\infty, 1)$, $\alpha(1-\nu) > 1$;

2) $\nu \in (-\infty, 1)$, $\alpha(1-\nu) \geq 1$; $B \in C(\mathbb{R}, \operatorname{Comp} H)$ *и множество значений функции* B *предкомпактно в* $\operatorname{Comp} H$;

3) $\nu \in (-\infty, 1)$, $\alpha(1-\nu) \geq 1$ *и величина* $\|B\|_*$ *достаточно мала.*

Тогда существуют такие натуральное число m *и функция* $B_0 \in \mathfrak{A}_*$, *что дифференциальный оператор* $L = d/dt + A_0 - B(t)A_0^\nu$ *подобен (приводим к) дифференциальному оператору вида*

$$L_m = d/dt + A_0 - \sum\nolimits_{j \geq m+1} P_j B_0(t) P_j A_0^\nu - \tilde{P}_m B_0(t) \tilde{P}_m = A - J_\nu(m) B_0(t) A_0^\nu .$$

При выполнении условия 3 можно положить $m = 1$.

***Замечание* 1.** Преимущество рассмотрения дифференциального оператора L_m перед оператором L состоит в том, что конечномерные подпространства $H_j = \operatorname{Im} P_j$, $j \geq m+1$, $\tilde{H}_m = \operatorname{Im} \tilde{P}_m$ являются инвариантными относительно коэффициентов оператора L_m и поэтому его можно рассматривать как распавшуюся систему обыкновенных дифференциальных операторов вида

$$d/dt + A_j - B_j(t)\colon C^1(\mathbb{R}, H_j) \subset C(\mathbb{R}, H_j) \to C(\mathbb{R}, H_j), \quad j \geq m+1,$$

$$d/dt + \tilde{A}_m - \tilde{B}_m(t)\colon C^1(\mathbb{R}, \tilde{H}_m) \subset C(\mathbb{R}, \tilde{H}_m) \to C(\mathbb{R}, \tilde{H}_m),$$

где функции $B_j(t) = P_j B_0(t) A_0^\nu\colon H_j \to H_j$ $\forall t \in \mathbb{R}$, $j \geq m+1$, $\tilde{B}_m(t) = \tilde{P}_m B_0(t) A_0^\nu\colon \tilde{H}_m \to \tilde{H}_m$ принадлежат $C(\mathbb{R}, \operatorname{End} H_j)$ и $C(\mathbb{R}, \operatorname{End} \tilde{H}_m)$ соответственно и $C^1(\mathbb{R}, Y)$ — подпространство непрерывно дифференцируемых функций (с ограниченной производной) из $C(\mathbb{R}, Y)$ (Y — банахово пространство).

3. *Доказательство теоремы* 2. Нами введено допустимое пространство $\mathfrak{A}_\nu$ и трансформатор $J_\nu(m)$. Осталось построить трансформатор $\Gamma_\nu(m)\colon \mathfrak{A}_\nu \to \operatorname{End} \mathfrak{X}$, $\mathfrak{X} = C(\mathbb{R}, H)$ такой, чтобы тройка $(\mathfrak{A}_\nu, J_\nu(m), \Gamma_\nu(m))$ была допустимой. При этом оказывается возможным такой выбор числа $m \geq 1$, чтобы выполнялось условие (3) теоремы 1, из которой и будет следовать теорема 2.

Построение трансформатора $\Gamma_\nu(m)$ будем осуществлять с помощью линейного оператора $\Gamma(m)\colon \mathfrak{A}_* \to \mathfrak{A}_*$, к построению которого приступим и проделаем это в несколько этапов.

Этап 1. Пусть $\Delta_i = \sigma(A_0) \cap [\alpha_i, \beta_i]$, $i = 1, 2$, $\beta_2 < \alpha_1$ — два спектральных множества из $\sigma(A_0)$ и $Q_i = P(\Delta_i, A_0)$, $i = 1, 2$, — соответствующие ортопроекторы Риса. Символом $\mathfrak{A}_*(\Delta_1, \Delta_2)$ обозначим подпространство из $\mathfrak{A}_*$ функций вида $Q_1 X Q_2$, $X \in \mathfrak{A}_*$. Линейный оператор $\Gamma(\Delta_1, \Delta_2)\colon \mathfrak{A}_*(\Delta_1, \Delta_2) \to \mathfrak{A}_*(\Delta_1, \Delta_2)$ определим формулой

$$Y(t) = (\Gamma(\Delta_1, \Delta_2) Q_1 X Q_2)(t) = \int_0^\infty e^{-A_1 Q_1 s} Q_1 X(t-s) e^{A_0 Q_2 s} Q_2 \, ds. \tag{8}$$

Из свойств 2 и 3 допустимой функциональной алгебры следует принадлежность функции Y алгебре $\mathfrak{A}_*$, причем она является единственным принадлежащим подпространству $\mathfrak{A}_*(\Delta_1, \Delta_2)$ решением дифференциального уравнения [11]

$$(\mathrm{ad}_A Y)(t) = (AY - YA)(t) = dY(t)/dt + A_0 Y(t) - Y(t)A_0 = Q_1 X(t) Q_2. \tag{9}$$

Легко видеть, что справедливы оценки

$$\| Y \|_\infty \le \| Y \|_* \le \mathrm{dist}\,(\Delta_1, \Delta_2)^{-1} \| X \|_* \le (\alpha_1 - \beta_2)^{-1} \| X \|_*, \tag{10}$$

где $\mathrm{dist}\,(\Delta_1, \Delta_2)$ — расстояние между множествами Δ_1 и Δ_2.

Равенство (9) позволяет заключить, что если $\varphi \in D(A)$, то $Y\varphi = \Gamma(\Delta_1, \Delta_2) X\varphi \in D(A)$, причем выполняется равенство

$$AYA^{-1}\varphi = Y\varphi + YA^{-1}\varphi. \tag{11}$$

Отсюда с учетом (10) получаем

$$\| YA_0^{\vee} \|_* \le \beta_2^{\vee} \mathrm{dist}\,(\Delta_1, \Delta_2)^{-1} \| X \|_*, \quad \| A_0^{\vee} Y \|_* \le \beta_1^{\vee} \mathrm{dist}\,(\Delta_1, \Delta_2)^{-1} \| X \|_*,$$
$$\| AYA_0^{\vee} A^{-1} \|_\infty \le \| YA_0^{\vee} \|_* + \| X \|_* \|A^{-1}\| \alpha_2^{-1}. \tag{12}$$

Таким образом, сужение оператора $\mathrm{ad}_A X = AX - XA$ на подпространство $\mathfrak{A}(\Delta_1, \Delta_2)$ из $\mathfrak{A}_*$ есть ограниченный оператор, который обратим, причем обратный $\Gamma(\Delta_1, \Delta_2)$ определяется формулой (8).

Аналогичный результат с оценками вида (10), (12) справедлив при $\beta_1 < \alpha_2$.

Если $\Delta = \{\Delta_i = [\alpha_i, \beta_i] \cap \sigma(A_0),\ i = 1,\dots, k\}$ — система взаимно непересекающихся множеств, причем $\beta_1 < \alpha_2, \beta_2 < \alpha_3, \dots, \beta_{k-1} \le \alpha_k$, то рассмотрим семейство подпространств $\mathfrak{A}(\Delta_i, \Delta_j) = \{Q_i X Q_j :\ X \in \mathfrak{A}_*\}$, $Q_i = P(\Delta_i, A_0)$, $i, j = 1,\dots, k$, $i \ne j$, и их прямую сумму $\mathfrak{A}(\Delta)$. Из изложенного выше следует, что сужение оператора ad_A на $\mathfrak{A}(\Delta)$ является обратимым оператором, причем $\mathrm{dist}\,(0, \sigma(\mathrm{ad}_A)) \ge \inf\limits_{1 \le i \ne j \le k} \mathrm{dist}\,(\Delta_i, \Delta_j)$. Обратный оператор $\Gamma(\Delta)$: $\mathfrak{A}(\Delta) \to \mathfrak{A}(\Delta)$ является суммой соответствующих частей из равенства (8). Однако для оценки его нормы удобней использовать преднормальность оператора ad_A и оценку обратного к нему оператора (см. [4, 5]). В этом случае получаем оценку

$$\| \Gamma(\Delta) \| \le 5 \inf_{1 \le i \ne j \le k} \mathrm{dist}\,(\Delta_i, \Delta_j)^{-1}. \tag{13}$$

Замечание 2. Из оценки (13) непосредственно следуют оценки вида (12) (только в правой части приведенных неравенств появляется множитель 5) для решения $Y \in \mathfrak{A}(\Delta)$ уравнения вида (9) с правой частью X из $\mathfrak{A}(\Delta)$.

Этап 2. Займемся представлением любой функции из алгебры $\mathfrak{A}_*$ в виде объединения функциональных блоков специального типа. С этой целью представим полуось $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R}:\ t \ge 0\}$ в виде $\mathbb{R}_+ = \bigcup_{n \ge 0} \Delta_n$, где $\Delta_0 = [0, \chi)$, $\Delta_n = [\chi 2^{n-1}, \chi 2^n)$, $n \ge 1$, и $\chi = r_m$. Пусть $Q_n = P(\Delta_n, A_0)$, $n \ge 0$ (и тогда проекторы Q_n, $n \ge 1$ образуют разложение единицы).

Рассмотрим сильно непрерывное периодическое периода 1 изометрическое представление T_0: $\mathbb{R} \to \mathrm{End}\, H$, определенное формулой

$$T_0(t) = \sum\nolimits_{n \ge 0} \exp\,(i\, 2\pi n t)\, Q_n.$$

Для каждого оператора $C \in \mathrm{End}\, H$ рассмотрим сильно непрерывную операторнозначную функцию $C(t) = T_0(t)\, C T_0(-t)$, $t \in \mathbb{R}$, C: $\mathbb{R} \to \mathrm{End}\, H$, которая периодична с периодом 1 и сильно непрерывна. Поставим в соответствие ей ряд Фурье $C(t) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n \exp i2\pi nt$ ($\mathbb{Z}$ — множество целых чисел), где коэффициент Фурье C_n имеет вид

$$C_n = \int_0^1 C(t)\exp(-i2\pi nt)\,dt,$$

причем $\|C_n\|_\infty \le \|C\|_\infty$. Этот ряд сильно суммируем методом Чезари к операторной функции $C(t)$. Непосредственно из вида группы $T_0(t)$, $t\in\mathbb{R}$, легко следует, что оператор C_n имеет вид $C_n = \sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_{n+j}CQ_j$, где полагаем $Q_k = 0$ при $k<0$.

Поскольку Q_j, $j\ge 0$, — дизъюнктная система ортопроекторов, то трансформатор J_n: $\mathrm{End}\,H \to \mathrm{End}\,H$, определенный формулой $J(C) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_{n+j}CQ_j$, имеет норму, равную 1. Поэтому формула $(\tilde{J}_nX)(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_{n+j}X(t)Q_j$, $X\in\mathfrak{A}_*$, задает линейный оператор в $\mathfrak{A}_*$, являющийся проектором. Пусть $\mathfrak{A}_n = \mathrm{Im}\,\tilde{J}_n$, $n\in\mathbb{Z}$. Тогда запись $\mathfrak{A}_* = \oplus\,\mathfrak{A}_n$, $n\in\mathbb{Z}$, будет означать, что каждая функция $X\in\mathfrak{A}_*$, рассматриваемая как функция из $C(\mathbb{R}, \mathrm{End}\,H)$, восстанавливается с помощью ряда $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{J}_nX$, который сильно суммируем к X методом Чезари.

Этап 3. Оператор $\Gamma(m)$: $\mathfrak{A}_* \to \mathfrak{A}_*$ определим на каждом из подпространств $\mathfrak{A}_n$, $n\in\mathbb{Z}$, следующей формулой:

$$(\Gamma(m)X)(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Gamma(\Delta_{n+j}, \Delta_j)Q_{n+j}(X(t) - J(m)X(t))Q_j,\ X\in\mathfrak{A}_n.$$

Из свойств 2 и 3 допустимой функциональной алгебры следует корректность определения оператора $\Gamma(m)$ на $\mathfrak{A}_n$ и оценка

$$\|\Gamma(m)\|_* = \sup_{j\in\mathbb{Z}} \|\Gamma(\Delta_{n+j}, \Delta_j)Q_{n+j}(X(t) - J(m)X)Q_j\|_*.$$

Пусть $|n|\ge 2$. Тогда из оценок (12) получаем, что можно корректно определить операторозначные функции $\Gamma(m)X_nA_0^\vee$ и $A_0^\vee\Gamma(m)X_n$, принадлежащие $\mathfrak{A}_*$, причем

$$\max\{\|\Gamma(m)X_nA_0^\vee\|_*, \|A_0^\vee\Gamma(m)X_n\|_*\} \le 8\kappa^{\nu-1}2^{|n|(\nu-1)}\|X_n\|_*. \qquad (14)$$

Допустим, что $|n|\le 1$ (для определенности пусть $n=0$; случай $|n|=1$ рассматривается аналогично). Тогда каждая функция вида $Q_j(X(t) - J(m)X(t))Q_j$, $j\ge 0$, принадлежит подпространству $\mathfrak{A}(\Delta)$ из $\mathfrak{A}_*$, где Δ — конечная система спектральных множеств вида $\Delta_j\cap\sigma_i$, $i = 1, 2, \ldots$ (отметим, что $\Delta_j\cap\sigma_i = \varnothing$ для всех i, кроме конечного числа). Поэтому из замечания 2 получаем оценку

$$\beta(X_0) \le 5 \sup_{i,j\ge m+1} [\inf_{i\ne k} \mathrm{dist}(\sigma_i\cap\Delta_j, \sigma_k\cap\Delta_j)]^{-1}$$

для величины $\beta(X_0) = \max\{\|\Gamma(m)X_0A_0^\vee\|_*, \|A_0^\vee\Gamma(m)X_0\|_*\}$, $X_0\in\mathfrak{A}_*$ и, следовательно,

$$\beta(X_0) \le C_2\kappa^{-\tau} \text{ при } \alpha(1-\nu) > 1,\ \beta(X_0) \le C_2 > 0 \text{ при } \alpha(1-\nu)\ge 1, \qquad (15)$$

где число τ определено равенством (6).

Этап 4. Трансформатор $\Gamma_\nu(m)$: $\mathfrak{A}_\nu \to \mathrm{End}\,\mathfrak{X}$ определим формулой

$$(\Gamma_\nu(m)XA_0^\nu)\varphi)(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\Gamma(m)\tilde{J}_n XA_0^\nu)(t)\varphi(t) = Z(t)\varphi(t), \quad \varphi \in \mathfrak{X}.$$

Оценки (14), (15) гарантируют абсолютную сходимость этого ряда в $\operatorname{End}\mathfrak{X}$, а также принадлежность функции Z алгебре $\mathfrak{A}_*$, причем

$$\|Z\|_\infty \le \|Z\|_* \le C_3(\kappa^{\nu-1} + \kappa^{-\tau}), \tag{16}$$

если $\alpha(1-\nu) > 1$. Те же оценки (14), (15) и замкнутость оператора позволяют определить функцию из $\mathfrak{A}_*$ вида

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Gamma(m)(A_0^\nu \tilde{J}_n X)(t), \quad X \in \mathfrak{A}_*,$$

обозначаемую символом $\Gamma_\nu(m)(A_0^\nu X)$, для которой при условии $\alpha(1-\nu) > 1$ выполняется оценка

$$\|\Gamma_\nu(m)(A_0^\nu X)\|_* \le C_3(\kappa^{\nu-1} + \kappa^{-\tau})\|X\|_*. \tag{17}$$

Таким образом, полностью построена тройка $(\mathfrak{A}_\nu, J_\nu(m), \Gamma_\nu(m))$, для которой осталось проверить свойства 3 и 4 из определения 2. Свойство 3 следует из равенства $A\Gamma_\nu(m)XA^{-1} = \Gamma_\nu(m)X + X - J_\nu(m)X$, $X \in \mathfrak{A}_\nu$, которое справедливо для всех операторов вида $(X\varphi)(t) = X_n(t)A_0^\nu\varphi(t)$, $\varphi \in D(A)$, $X_n \in \mathfrak{A}_n$, $n \in \mathbb{Z}$ (см. равенство (11)). Оценки (14), (15) и замкнутость оператора A позволяют распространить его для произвольных операторов из $\mathfrak{A}_\nu$.

Устанавливая свойство 4, рассмотрим два оператора $(X\varphi)(t) = X_0(t)A_0^\nu\varphi(t)$, $(Y\varphi)(t) = (Y_0(t)A_0^\nu)\varphi(t)$, $\varphi \in D(A)$, $X_0, Y_0 \in \mathfrak{A}_*$. Тогда $(X\Gamma_\nu(m)Y)\varphi(t) = X_0(t)\Gamma_\nu(m) \times$ $\times (A_0^\nu Y_0(t))A_0^\nu\varphi(t)$, и поэтому из оценок (16), (17) следует $\|X\Gamma_\nu(m)Y\| \le C_3\times$ $\times \|X\|\|Y\|$, если $\alpha(1-\nu) \ge 1$, и $\|X\Gamma_\nu(m)Y\| \le C_3(\chi^{\nu-1} + \chi^{-\tau_0})\|X\|\|Y\|$, если $\alpha(1-\nu) < 1$. Аналогичные оценки справедливы для нормы оператора из $\mathfrak{A}_\nu$.

Таким образом, постоянная $\gamma = \gamma(m)$ из свойства 4 определения 2 при выполнении условия 1 теоремы 2 оценивается величиной $C_3(\kappa^{\nu-1} + \kappa^{-\tau})\|X\|_*$. Поскольку $\kappa = r_m$ и $r_m \to \infty$ при $m \to \infty$, то для достаточно большого m величина $\|B\|_*\gamma(m)$ принимает значения меньше $1/4$. При выполнении условия 3 величины $\gamma(m)$, $m \ge 1$, ограничены сверху и выполнение условия теоремы 1 обеспечивается малостью величины $\|B\|_*$. Если выполнено условие 2 теоремы 2, то малость величины $\gamma(m)$ (для больших m) связана с выполнением предельного соотношения $\lim\limits_{|j|+|k|\to\infty} \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|Q_j X(t) Q_k\|_* = 0$ для любой функции $X \in \mathfrak{A}_*$, где $\mathfrak{A}_*$— допустимая функциональная алгебра функций из $C(\mathbb{R}, \operatorname{Comp} H)$, имеющих компактную в $\operatorname{Comp} H$ область значений. Теорема 2 доказана.

4. Некоторые замечания, связанные с теоремой 2. Вначале рассмотрим пример, иллюстрирующий возможность применения теоремы 2.

Пример. В банаховом пространстве $\mathfrak{X} = C(\mathbb{R}, L_2(0, 1))$ (или $\mathfrak{X} = L_p(\mathbb{R}, L_2(0, 1))$) рассмотрим дифференциальный оператор вида

$$(Lu)(t,x) = \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^{2m} u(t,x)}{\partial x^{2m}} + \sum_{j=0}^{2m-2} b_j(t,x)\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial x^j},$$

где дифференциальные операторы $A_0 = -\dfrac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}$, $B(t) = \sum_{j=0}^{2m-2} b_j(t,\cdot)\dfrac{\partial^j}{\partial x^j}$, $t \in \mathbb{R}$, имеют область определения $D(A_0) \subset L_2(0, 1)$, задаваемую самосопряженными двухточечными краевыми условиями $U_j(\varphi) = 0, j = 1, \ldots, 2m$ [12]. Оператор A_0 является самосопряженным дискретным оператором, собственные значения которого имеют асимптотическое представление вида (4), где $\alpha = 2m$ и $r = 2m - 1$. При условии непрерывности по совокупности переменных функций b_j: $\mathbb{R} \times [0, 1] \to \mathbb{C}$, $j = 0, 1, \ldots, 2m - 2$, и их ограниченности получаем, что операторная функция $B(t)$ представима в виде $B(t) = B_0(t)A_0^{\nu}$, где $B_0 \in C(\mathbb{R}, \mathrm{End}\, L_2(0, 1))$ и $\nu = 2m - 2/2m$, т. е. выполнено условие 1 теоремы 2 для рассматриваемого оператора A_0. Множества σ_j, $j \geq 1$, используемые в разбиении спектра оператора A_0, в данном случае будут либо одноточечными, либо двухточечными. Поэтому оператор L подобен оператору, который соответствует распавшейся системе обыкновенных дифференциальных операторов из замечания 1, где для операторов $d/dt + A_j - B_j(t)$, $j \geq m + 1$, либо $\dim H_j = 1$, либо $\dim H_j = 2$, $j \geq m + 1$.

***Замечание* 3.** Утверждение теоремы 2 справедливо в случае, когда A_0: $D(A_0) \subset H \to H$ — дискретный секториальный спектральный (по Данфорду) оператор, резольвента которого имеет простые полюсы во всех точках из $\sigma(A_0)$, за исключением конечного числа и имеющего асимптотику спектра вида (4) для реальных частей $\mathrm{Re}\, \lambda_n$, $n \geq 1$, его собственных значений. Этот результат позволяет заменить условие самосопряженности краевых условий из приведенного примера условием их регулярности [12].

***Замечание* 4.** Удачный выбор допустимой функциональной алгебры $\mathfrak{A}_*$ часто позволяет сохранить определенные свойства операторной функции $B \in \mathfrak{A}_*$ для операторной функции B_0 (см. теорему 2).

Например, если $\mathfrak{A}_*$ — алгебра квазипериодических гладких операторных функций с частотным базисом, удовлетворяющим обычному условию несоизмеримости [1 – 3, 7], то функция B_0 также имеет указанные свойства, и поэтому в данном случае нетрудно получить условия приводимости дифференциального оператора $L = d/dt + A_0 - B(t)A_0^{\nu}$ к дифференциальному оператору с „постоянными" коэффициентами (подробнее см. [7]).

1. *Теплинский Ю. В.* К вопросу о приводимости счетных систем дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1979. – **31**, № 4. – С. 463 – 465.
2. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* О приводимости дифференциальных систем в пространстве ограниченных числовых последовательностей. – Киев, 1989. – 46 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 44).
3. *Аксенов А. А.* О приводимости линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с квазипериодическими коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 1. – С. 86 – 88.
4. *Баскаков А. Г.* Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов // Сиб. мат. журн. – 1983. – **24**, № 1. – С. 21 – 39.
5. *Баскаков А. Г.* Гармонический анализ линейных операторов. – Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1987. – 164 с.
6. *Самойленко А. М.* О приводимости систем линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1968. – **20**, № 2. – С. 279 – 281.
7. *Баскаков А. Г.* Теорема о приводимости линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Там же. – 1983. – **35**, № 4. – С. 416 – 421.
8. *Самойленко А. М.* Приводимость системы линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Там же. – 1989. – **41**, № 12. – С. 1669 – 1680.
9. *Блинов Н. Н.* Метод сверхбыстрой сходимости и приводимость почти периодических систем // Дифференц. уравнения. – 1988. – **24**, № 2. – С. 187 – 199.
10. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Мат анализ / ВИНИТИ. – 1977. – **14**. – С. 5 – 58.
11. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 584 с.
12. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.

Получено 22.05.91