УДК 517.947

Н. Р. Сиденко, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

G-СХОДИМОСТЬ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ

Рассматривается последовательность $\mathcal{P}^k$ периодических по времени с периодом $T = \text{const}$ параболических дивергентных операторов второго порядка и их сдвигов $\mathcal{P}^k_\psi$ на произвольную периодическую вектор-функцию $\psi \in X = \{L^2((0,T)\times\Omega)\}^n$, где Ω – ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^n$. При условиях равномерной эллиптичности и ограниченности матрицы коэффициентов $\mathcal{P}^k$ и равномерной ограниченности их временной производной в пространстве $L^\infty(\Omega; L^2(0,T))$ доказаны утверждения о компактности по k семейства $\{\mathcal{P}^k_\psi \mid \psi \in X, k \in \mathbb{N}\}$ относительно сильной G-сходимости, сходимости произвольных решений уравнений с оператором $\mathcal{P}^k_\psi$, локальности сильной G-сходимости в Ω.

Розглядається послідовність $\mathcal{P}^k$ періодичних за часом з періодом $T = \text{const}$ параболічних дивергентних операторів другого порядку та їх зсувів $\mathcal{P}^k_\psi$ на довільну періодичну вектор-функцію $\psi \in X = \{L^2((0,T)\times\Omega)\}^n$, де Ω – обмежена ліпшіцева область в $\mathbb{R}^n$. За умов рівномірної еліптичності та обмеженості матриці коефіцієнтів $\mathcal{P}^k$ і рівномірної обмеженості їх часової похідної у просторі $L^\infty(\Omega; L^2(0,T))$ доведені твердження про компактність по k сімейства $\{\mathcal{P}^k_\psi \mid \psi \in X, k \in \mathbb{N}\}$ відносно сильної G-збіжності, збіжність довільних розв'язків рівнянь з оператором $\mathcal{P}^k_\psi$, локальність сильної G-збіжності в Ω.

Рассмотрим произвольную последовательность периодических по t с периодом $T = \text{const} > 0$ операторов

$$\mathcal{P}^k = \nu_k\partial_t + A^k, \quad A^k = A^k(t) = -\partial_i(a^k_{ij}(t,x)\partial_j), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $i = \overline{1,n}$, $(t,x) \in \mathbb{R}\times\Omega$, $Q = \{(t,x) \in (0,T)\times\Omega\}$, Ω — ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^n$, $\nu_k \neq 0$, $\nu_k \to 0$, по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до n, в предположении, что

$$a^k_{ij} \in L^\infty(Q), \quad \sup_{k,i,j} \|a^k_{ij}\|_{L^\infty(Q)} = M < \infty, \tag{1}$$

$$a^k_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \geq \alpha_0\xi_i\xi_i \quad \forall\xi \in \mathbb{R}^n, \ \forall(t,x) \in Q, \ \forall k, \ \alpha_0 = \text{const} > 0.$$

Обозначим через $\mathcal{T}(0,T)$ множество функций от $t \in \mathbb{R}$, периодических с периодом T, и определим на $\mathbb{R}\times\Omega$ основные пространства обобщенных функций от (t,x):

$$\mathcal{V} = L^2(0,T; \mathring{H}^1(\Omega)) \cap \mathcal{T}(0,T), \quad \mathcal{V}' = L^2(0,T; H^{-1}(\Omega)) \cap \mathcal{T}(0,T),$$
$$\mathcal{W} = \{u \in \mathcal{V} \mid \partial_t u \in \mathcal{V}'\}.$$

Имеем ограниченные операторы

$$A^k\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}', \quad (A^k)^{-1}\colon \mathcal{V}' \to \mathcal{V}, \quad \|A^k\| \leq nM, \quad \|(A^k)^{-1}\| \leq \alpha_0^{-1} \quad \forall k,$$

$$\mathcal{P}^k\colon \mathcal{W} \to \mathcal{V}', \quad (\mathcal{P}^k)^{-1}\colon \mathcal{V}' \to \mathcal{W}, \quad \|(\mathcal{P}^k)^{-1}\| \leq [\alpha_0^{-2} + \nu_k^{-2}(1 + \alpha_0^{-1}nM)^2]^{1/2}.$$

В дальнейшем обозначаем

$$(\varphi, \psi) = \int_\Omega \varphi(x)\psi(x)\,dx, \quad \langle u, v\rangle = \int_Q u(t,x)v(t,x)\,dt\,dx, \quad \|u\|_{\mathcal{V}} = \langle\partial_i u, \partial_i u\rangle^{1/2}.$$

***Определение* 1.** *Символ* $\mathcal{P}^k \xrightarrow{G} A$ (*читается: последовательность* $\{\mathcal{P}^k\}$ *G-сходится к оператору* A) *означает следующее:*

$$\exists A \in \mathfrak{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')\colon \langle Av, v\rangle \geq \alpha_1\|v\|^2_{\mathcal{V}} \quad \forall v \in \mathcal{V}, \ \alpha_1 = \text{const} > 0,$$

$$u_k = (\mathcal{P}^k)^{-1}f \longrightarrow u = A^{-1}f \ \text{ слабо в } \ \mathcal{V} \ \forall f \in \mathcal{V}'.$$

***Определение* 2.** *Символ* $\mathcal{P}^k \overset{G}{\Rightarrow} A$ (*читается: последовательность* $\{\mathcal{P}^k\}$

ISSN 0041-6053. Укр. мат. журн., 1993, т. 45, № 4

сильно G-сходится к оператору A) означает, что $\mathcal{P}^k \xrightarrow{G} A$, причем $A = -\partial_i(a_{ij}(t,x)\partial_j)$, где $a_{ij}(t,x)$ удовлетворяют условиям типа (1) (*возможно, с другими α_0, M*), *и обобщенные градиенты $a_{ij}^k\partial_j u_k \to a_{ij}\partial_j u$ слабо в $L^2(Q)$, $i=\overline{1,n}$.*

Вопросы сильной G-сходимости и усреднения линейных равномерно параболических и нелинейных равномерно монотонных параболических операторов с начально-краевым условием исследованы в работах [1–4]. Результаты настоящей работы анонсированы в [5]. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *При условиях* (1) *существует такая подпоследовательность $\{k'\} \subset \mathbb{N}$, что при $k=k'$ имеет место сходимость $\mathcal{P}^k \xrightarrow{G} A$, причем $(Au)(t) = A(t)u(t,\cdot)$, где $A(t)\colon \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ — эллиптический оператор, периодически зависящий от параметра t:*

$$\|A(t)\| \le n^2M^2\alpha_0^{-1}, \quad (A(t)\varphi,\varphi) \ge \alpha_0\|\varphi\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)}$$

для почти всех t и любой $\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

Доказательство. Поскольку $\langle\partial_t v, v\rangle = 0$ для $v \in \mathcal{W}$, то $\|(\mathcal{P}^k)^{-1}\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{V}',\mathcal{V})} \le \alpha_0^{-1}$ $\forall k$. Поэтому для некоторой последовательности $\{f_m\}$, плотной в $\mathcal{V}'$, можно выбрать подпоследовательность $\{k'\} \subset \{k\}$ так, чтобы $(\mathcal{P}^{k'})^{-1}f_m \to Bf_m$ слабо в $\mathcal{V}$ $\forall m$. При этом $\|Bf_m - Bf_{m_1}\|_{\mathcal{V}} \le \alpha_0^{-1}\|f_m - f_{m_1}\|_{\mathcal{V}'}$. Значит, если f — произвольный элемент $\mathcal{V}'$ и $f_{m'} \to f$ в $\mathcal{V}'$, то $\{Bf_{m'}\}$ — сходящаяся подпоследовательность в $\mathcal{V}$. Обозначим ее предел Bf. Если выбрать подпоследовательность $\{k''\} \subset \{k'\}$ так, чтобы $(\mathcal{P}^{k''})^{-1}f \to F$ слабо в $\mathcal{V}$, то $\|F - Bf_{m'}\|_{\mathcal{V}} \le \alpha_0^{-1}\|f - f_{m'}\|_{\mathcal{V}'} \to 0$. Следовательно, вся последовательность $\{(\mathcal{P}^{k'})^{-1}f\}$ слабо сходится в $\mathcal{V}$ к $F = Bf$ и при этом

$$\|Bf - Bf_1\|_{\mathcal{V}} \le \alpha_0^{-1}\|f - f_1\|_{\mathcal{V}'} \quad \forall f, f_1 \in \mathcal{V}'.$$

Значит, определенное на $\{f_m\}$ преобразование B непрерывно и линейно продолжается на все $\mathcal{V}'$ до линейного ограниченного оператора $B\colon \mathcal{V}' \to \mathcal{V}$, $\|B\| \le \alpha_0^{-1}$. Кроме того, из неравенства $\langle f, (\mathcal{P}^{k'})^{-1}f\rangle \ge \alpha_0\|(\mathcal{P}^{k'})^{-1}f\|^2_{\mathcal{V}}$ следует $\langle f, Bf\rangle \ge \alpha_0\|Bf\|^2_{\mathcal{V}}$. Пусть $f_0 \in \mathcal{V}'$ такая, что $Bf_0 = 0$. Тогда при $k = k'$ имеем $u_k = (\mathcal{P}^k)^{-1}f_0 \to 0$ слабо в $\mathcal{V}$,

$$\alpha_0\|u_k\|^2_{\mathcal{V}} \le \langle\mathcal{P}^k u_k, u_k\rangle = \langle f_0, u_k\rangle \to 0,$$

$$\|A^k u_k\|_{\mathcal{V}'} \le nM\|u_k\|_{\mathcal{V}} \to 0, \quad \nu_k\partial_t u_k \to 0, \text{ слабо в } \mathcal{V}',$$

т. е. слабо $\mathcal{P}^k u_k \to 0$ и, значит, $f_0 = \mathcal{P}^k u_k = 0$. Таким образом, на $B(\mathcal{V}')$ определен обратный оператор $B^{-1}\colon B(\mathcal{V}') \to \mathcal{V}'$. Если $q \in \mathcal{V}'$ такова, что $\langle g, Bf\rangle = 0$ $\forall f \in \mathcal{V}'$, то $0 = \langle g, Bg\rangle \ge \alpha_0\|Bg\|^2_{\mathcal{V}}$, откуда следует $Bg = 0$ и $g = 0$. Это означает, что $B(\mathcal{V}')$ плотно в $\mathcal{V}$. Полагая $A = B^{-1}$, имеем замкнутый линейный оператор с областью определения $D(A) = B(\mathcal{V}')$, плотной в $\mathcal{V}$, областью значений $R(A) = \mathcal{V}'$, положительно определенный:

$$\langle Au, u\rangle \ge \alpha_0\|u\|^2_{\mathcal{V}} \quad \forall u \in D(A), \tag{2}$$

для которого имеет место сходимость $(\mathcal{P}^{k'})^{-1}f \to A^{-1}f$ слабо в $\mathcal{V}'$ $\forall f \in \mathcal{V}'$. Пусть f — любая функция из $\mathcal{V}'$, $u_k = (\mathcal{P}^{k'})^{-1}f$, $u = A^{-1}f$. При $k = k' \to \infty$ имеют место слабая в $\mathcal{V}$ сходимость $u_k \to u$, слабые в $\mathcal{V}^*$ сходимости $\nu_k \partial_t u_k \to 0$, $A^k u_k \to Au$ и сходимость энергии $\langle A^k u_k, u_k\rangle = \langle Au, u_k\rangle \to \langle Au, u\rangle$. Далее, легко убедиться, что в силу (1) справедливо неравенство $\langle A^k u, v\rangle \le \lambda_1 \langle A^k u, u\rangle^{1/2} \| v \|_{\mathcal{V}}$ $\forall\, u, v \in \mathcal{V}$, $\forall k$, где $\lambda_1 = \mathrm{const}$, во всяком случае, $\lambda_1 \le nM\,\alpha_0^{-1/2}$. Подставив в это неравенство в качестве u функцию u_k и учитывая указанные выше сходимости, получаем в пределе по $k = k'$

$$\langle Au, v\rangle \le \lambda_1 \langle Au, u\rangle^{1/2} \| v \|_{\mathcal{V}} \quad \forall u \in D(A), \quad \forall v \in \mathcal{V}. \tag{3}$$

Из последнего неравенства вытекает $\|Au\|_{\mathcal{V}'} \le \lambda_1^2 \| u \|_{\mathcal{V}}$ $\forall u \in D(A)$. Следовательно, $D(A) = \mathcal{V}$. Если $\gamma(t)$ — произвольная гладкая периодическая функция на $\mathbb{R}$, то $\gamma u_k \in \mathcal{W}$, $\mathcal{P}^k(\gamma u_k) = \gamma \mathcal{P}^k u_k + \gamma' \nu_k u_k = \gamma f + \gamma' \nu_k u_k$, где $\gamma' \nu_k u_k \to 0$ сильно в $\mathcal{V}$, так что $\gamma u_{k'} = (\mathcal{P}^{k'})^{-1}(\gamma f + \gamma' \nu_{k'} u_{k'}) \to A^{-1}(\gamma f)$ слабо в $\mathcal{V}$. С другой стороны, $\gamma u_{k'} \to \gamma u$ слабо в $\mathcal{V}$. Следовательно, $\gamma u = A^{-1}(\gamma f)$ или $A(\gamma u) = \gamma A u$. Последнее тождество ввиду ограниченности A справедливо для любой $\gamma(t) \in C(\mathbb{R}) \cap \mathcal{T}(0, T)$. Это значит, что $(Au)(t) = A(t) u(t, \cdot\,)$, где $A(t)$ — оператор, зависящий от параметра t периодическим образом, действующий на $u(t, x)$ как на функцию от $x \in \Omega$. Положив в неравенствах (2) и (3) $u(t, x) = \eta_m(t)\varphi(x)$, $v(t, x) = \eta_m(t)\psi(x)$, где $\eta_m \in C[0, T]$, $\varphi, \psi \in \mathring{H}^1(\Omega)$, имеем

$$\int_0^T \eta_m^2(t)(A(t)\varphi, \varphi)dt \ \ge\ \alpha_0 \| \varphi \|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)} \int_0^T \eta_m^2(t)dt,$$

$$\int_0^T \eta_m^2(t)(A(t)\varphi, \psi)\, dt \ \le\ \lambda_1 \left\{ \int_0^T \eta_m^2(t)(A(t)\varphi, \varphi)dt \right\}^{1/2} \| \psi \|_{\mathring{H}^1(\Omega)} \left(\int_0^T \eta_m^2(t)dt \right)^{1/2}.$$

Пусть $t_0 \in (0, T)$ — точка Лебега функций $t \to (A(t)\varphi, \varphi)$ и $t \to (A(t)\varphi, \psi)$. Выбрав в качестве $\eta_m^2(t)$, $m = 1, 2, \ldots$, дельтаобразную последовательность функций с носителями в окрестности t_0, при $m \to \infty$ получим

$$(A(t_0)\varphi, \varphi) \ge \alpha_0 \| \varphi \|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)}, \quad (A(t_0)\varphi, \psi) \ \le\ \lambda_1 (A(t_0)\varphi, \varphi)^{1/2} \| \psi \|_{\mathring{H}^1(\Omega)}. \tag{4}$$

Из второго неравенства непосредственно следует

$$\| A(t_0)\varphi \|_{H^{-1}(\Omega)} \ \le\ \lambda_1^2 \| \varphi \|_{\mathring{H}^1(\Omega)}.$$

Поскольку множество точек Лебега каждой функции в $(0, T)$ имеет меру T, а пространство $\mathring{H}^1(\Omega)$ сепарабельно, можно выбрать единое, полной меры в $(0, T)$, множество точек Лебега $\{t_0\}$ всех указаных функций, когда φ и ψ пробегают счетное всюду плотное множество в $\mathring{H}^1(\Omega)$. Учитывая (4) и равномерную непрерывность оператора $A(t_0)$ на этом множестве, приходим к выводу, что при каждом t_0 из выбранного полномерного множества неравенства (4) на самом деле справедливы для любых $\varphi, \psi \in \mathring{H}^1(\Omega)$. Теорема доказана.

Установлено, что предельный оператор $A = A(t)$ является равномерно ограниченным эллиптическим оператором, зависящим от параметра t периодическим образом: $A(t + T) = A(t)$, $D(A(t)) = \mathring{H}^1(\Omega)$, $R(A(t)) = H^{-1}(\Omega)$ для почти всех t, с той же константой эллиптичности, что в условиях (1). Но осталось неясным, является ли он дифференциальным оператором. Для выяснения этого вопроса требуется расширить оператор A так, чтобы расширенный оператор был определен на функциях, не равных нулю на границе области Ω.

Определение 3. Обозначая $X = X(Q) = \{\psi(t, x) = (\psi_1(t, x),\dots, \psi_n(t, x)) \mid \psi_j \in$ $\in L^2(Q) \cap \mathcal{T}(0, T),\ j = \overline{1, n}\}$, для любого $\psi \in X$ определяем сдвиги операторов

$$A_{\psi}^{k}(t) = -\partial_i (a_{ij}^{k}(t,x)(\psi_j(t,x) + \partial_j)),\quad \mathcal{P}_{\psi}^{k} = \nu_k\partial_t + A_{\psi}^{k}(t)\colon \mathcal{W} \to \mathcal{V}',$$

$$A_{(0)}^{k}(t) = A^k(t),\quad \mathcal{P}_{(0)}^{k} = \mathcal{P}^k.$$

Теорема 2. *При условиях* (1) *существуют подпоследовательность* $\{k'\} \subset \mathbb{N}$ *и монотонный оператор* $A_\psi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$, $R(A_\psi) = \mathcal{V}'$,

$$\langle A_\psi u - A_\psi v,\ u - v\rangle \ \ge\ \alpha_0 \| u - v \|_{\mathcal{V}}^2, \tag{5}$$

такие, что при $k = k'$ *имеет место сходимость*

$$u_{k,\psi} = (\mathcal{P}_{\psi}^{k})^{-1} A_\psi u \to u \ \text{ слабо в } \mathcal{V}\ \ \forall\, u \in \mathcal{V},\ \ \forall\, \psi \in X \tag{6}$$

и справедливы соотношения

$$A_{(0)} = A,\quad A_{\psi+\partial v} u = A_\psi(u + v)\quad \forall\, \psi \in X,\ \ \forall\, u, v \in \mathcal{V},$$

$$(A_\psi\{0\})(t) = \overline{A}(t)\psi(t,\cdot),\quad \overline{A}(t) \in \mathfrak{L}\{(L^2(\Omega))^n, H^{-1}(\Omega)\},$$

$$\| \overline{A}(t) \| \le nM(\alpha_0^{-1} nM + 1),\quad (A_\psi u)(t) = \overline{A}(t)(\psi(t,\cdot) + \partial u(t,\cdot)),$$

$A(t) = \overline{A}(t) \circ \partial$ *при почти всех* $t \in \mathbb{R}$, *где* $A = A(t)$ *— оператор, фигурирующий в теореме* 1, $\partial = (\partial_1, \dots, \partial_n)$, $\overline{A}(t)$ *— оператор, периодически (с периодом* T*) зависящий от параметра* t.

Доказательство. Обозначим $\overline{A}^k\xi = -\partial_i(a_{ij}^k(t,x)\xi_j)$, $\overline{A}_{\psi}^{k}\xi = \overline{A}^k(\psi + \xi)$, $\xi =$ $= (\xi_1,\dots,\xi_n)$, $\psi \in X$, $A^k = \overline{A}^k \circ \partial$, $A_\psi^k = \overline{A}_\psi^k \circ \partial$. Для $\psi \in X$ в силу (1) справедлива оценка $\| \overline{A}^k \psi \|_{\mathcal{V}'} \le nM \| \psi \|_X$, $k \in \mathbb{N}$. Ввиду равенства $(\mathcal{P}_\psi^k)^{-1} f = (\mathcal{P}^k)^{-1} f_\psi^k$, где $f_\psi^k = f - \overline{A}^k\psi$, $f \in \mathcal{V}'$, $\psi \in X$, имеем равномерные относительно $k \in \mathbb{N}$ оценки

$$\| (\mathcal{P}_\psi^k)^{-1} f \|_{\mathcal{V}} \le \alpha_0^{-1} \| f_\psi^k \|_{\mathcal{V}'} \le \alpha_0^{-1}(\| f \|_{\mathcal{V}'} + nM \| \psi \|_X),$$

$$\| (\mathcal{P}_\psi^k)^{-1} f - (\mathcal{P}_{\psi_1}^k)^{-1} f_1 \|_{\mathcal{V}} = \| (\mathcal{P}^k)^{-1}(f - f_1 - \overline{A}^k(\psi - \psi_1)) \|_{\mathcal{V}} \le \tag{7}$$

$$\le \alpha_0^{-1}(\| f - f_1 \|_{\mathcal{V}'} + nM \| \psi - \psi_1 \|_X);\quad f, f_1 \in \mathcal{V}';\quad \psi, \psi_1 \in X.$$

Поскольку пространства $\mathcal{V}'$ и X, а значит, и $\mathcal{V}' \times X$ сепарабельны, то оценки (7) обеспечивают выбор такой подпоследовательности $\{k'\} \subset \mathbb{N}$, что $(\mathcal{P}_\psi^{k'})^{-1} f \to$ $\to B_\psi f$ слабо в $\mathcal{V}$ одновременно для всех $(f, \psi) \in \mathcal{V}' \times X$. Этот факт устанавливается точно так же, как аналогичное утверждение в доказательстве теоремы 1. При этом для предельного отображения $B_\psi f$ справедливы оценки, аналогичные (7). Отметим, что $B_\psi f$, как и $(\mathcal{P}_\psi^k)^{-1} f$, осуществляет линейное отображение $\mathcal{V}' \times X \to \mathcal{V}$. Кроме того, из неравенства

$$\langle f - f_1,\ (\mathcal{P}_\psi^k)^{-1} f - (\mathcal{P}_\psi^k)^{-1} f_1 \rangle \ \ge\ \alpha_0 \| (\mathcal{P}_\psi^k)^{-1} f - (\mathcal{P}_\psi^k)^{-1} f_1 \|_{\mathcal{V}}^2$$

после предельного перехода по $k = k' \to \infty$ получаем

$$\langle f - f_1,\ B_\psi f - B_\psi f_1 \rangle \ \ge\ \alpha_0 \| B_\psi f - B_\psi f_1 \|_{\mathcal{V}}^2. \tag{8}$$

Исходя из тождеств $(\mathcal{P}_\psi^k)^{-1} f - (\mathcal{P}_\psi^k)^{-1} f_1 = (\mathcal{P}^k)^{-1}(f_\psi^k - f_{1\psi}^k) = (\mathcal{P}^k)^{-1}(f - f_1)$, в результате слабого предельного перехода в $\mathcal{V}$ при $k = k' \to \infty$ получаем $B_\psi f - B_\psi f_1 =$ $= A^{-1}(f - f_1)$. Из последнего равенства и установленного факта, что $D(A) = \mathcal{V}$, следует, что $B_\psi(\mathcal{V}') = \mathcal{V}$ и при $B_\psi f = B_\psi f_1$ необходимо $f = f_1$. Значит, преобразование $B_\psi : \mathcal{V}' \to \mathcal{V}$ обратимо и существует обратное к B_ψ преобразование A_ψ с $D(A_\psi) = \mathcal{V}$, $R(A_\psi) = \mathcal{V}'$. Для него ввиду (8) справедливо неравенство (5) и согласно выбору подпоследовательности $\{k'\}$ имеет место сходимость (6). Равенство $A_{(0)} = A$ очевидно. Теперь, произвольно выбрав $u \in \mathcal{V}$, $v \in \mathcal{W}$, $\psi \in X$, определим функцию $u_{k,\psi+\partial v} = (\mathcal{P}^k_{\psi+\partial v})^{-1} A_{\psi+\partial v} u \in \mathcal{W}$. Из очевидных равенств

$$\mathcal{P}^k_\psi(u_{k,\psi+\partial v} + v) = \mathcal{P}^k_{\psi+\partial v} + u_{k,\psi+\partial v} + \nu_k \partial_t v = A_{\psi+\partial v} u + \nu_k \partial_t v,$$

$$u_{k,\psi+\partial v} + v = (\mathcal{P}^k_\psi)^{-1} (A_{\psi+\partial v} u + \nu_k \partial_t v) = (\mathcal{P}^k_\psi)^{-1} A_{\psi+\partial v} u + (\mathcal{P}^k)^{-1} (\nu_k \partial_t v),$$

учитывая слабые в $\mathcal{V}$ сходимости

$$u_{k',\psi+\partial v} \to B_{\psi+\partial v} A_{\psi+\partial v} u = u, \quad (\mathcal{P}^{k'}_\psi)^{-1} A_{\psi+\partial v} u \to B_\psi A_{\psi+\partial v} u$$

и оценку

$$\|(\mathcal{P}^k)^{-1} (\nu_k \partial_t v)\|_{\mathcal{V}} \le \nu_k \alpha_0^{-1} \|\partial_t v\|_{\mathcal{V}'},$$

в результате перехода к слабому в $\mathcal{V}$ пределу при $k = k' \to \infty$ получаем $u + v = B_\psi A_{\psi+\partial v} u$ или $A_\psi(u + v) = A_{\psi+\partial v} u$. Поскольку линейное преобразование $(f, \psi) \to (B_\psi f, \psi)$, отображающее $\mathcal{V}' \times X$ на $\mathcal{V} \times X$, непрерывно и обратимо, то обратное преобразование $(u, \psi) \to (A_\psi u, \psi)$ также непрерывно, т. е. $A_\psi u$: $\mathcal{V} \times X \to \to \mathcal{V}'$ — непрерывное линейное отображение. Поэтому, учитывая, что $\mathcal{W}$ плотно в $\mathcal{V}$, с помощью замыкания распространяем полученное равенство на все $u, v \in \mathcal{V}$, $\psi \in X$.

Полагая $\overline{A}\psi = A_\psi\{0\}$, имеем линейный ограниченный оператор $\overline{A}: X \to \mathcal{V}'$. Пусть $\gamma(t) \in \mathcal{T}(0, T)$ — произвольная гладкая функция. Для функций $u^1_{k,\psi} = (\mathcal{P}^k_\psi)^{-1} A_\psi\{0\}$, $u^1_{k,\gamma\psi} = (\mathcal{P}^k_{\gamma\psi})^{-1} A_{\gamma\psi}\{0\}$, при $k = k' \to \infty$ стремящихся к нулю слабо в $\mathcal{V}$, имеем тождества $\mathcal{P}^k_{\gamma\psi}(\gamma u^1_{k,\psi}) = \gamma A_\psi\{0\} + \nu_k \gamma' u^1_{k,\psi}$, $u^1_{k,\gamma\psi} - \gamma u^1_{k,\psi} = (\mathcal{P}^k)^{-1} (A_{\gamma\psi}\{0\} - \gamma A_\psi\{0\}) - \nu_k (\mathcal{P}^k)^{-1} (\gamma' u^1_{k,\psi})$. Переходя в последнем тождестве к пределу по $k = k'$, получаем $0 = A^{-1}(A_{\gamma\psi}\{0\} - \gamma A_\psi\{0\})$, т. е. равенство $\overline{A}(\gamma(t)\psi) = \gamma(t)\overline{A}\psi$, справедливое ввиду ограниченности оператора $\overline{A}$ для любых $\psi \in X$, $\gamma(t) \in C(\mathbb{R}) \cap \mathcal{T}(0, T)$. Имеем $(\overline{A}\psi)(t) = \overline{A}(t)\psi(t, \cdot)$, где $\overline{A}(t)$ — линейный оператор, действующий на функции от $x \in \Omega$ и периодически зависящий от t как от параметра: $\overline{A}(t + T) = \overline{A}(t)$. Заметим, что при $k = k' \to \infty$

$$\langle A^k_\psi u^1_{k,\psi}, u^1_{k,\psi} \rangle = \langle A_\psi\{0\}, u^1_{k,\psi} \rangle \to 0, \tag{9}$$

$$A^k_\psi u^1_{k,\psi} \to A_\psi\{0\} \quad \text{слабо в } \mathcal{V}'. \tag{10}$$

С учетом (1) имеем неравенство

$$\langle A^k_\psi u^1_{k,\psi}, u^1_{k,\psi} \rangle = \langle A^k u^1_{k,\psi}, u^1_{k,\psi} \rangle + \langle \overline{A}^k \psi, u^1_{k,\psi} \rangle \ge$$
$$\ge \alpha_0 \|u^1_{k,\psi}\|^2_{\mathcal{V}} - nM \|\psi\|_X \|u^1_{k,\psi}\|_{\mathcal{V}}.$$

Из него ввиду (9) после предельного перехода по $k = k' \to \infty$ получаем оценку

$$\varlimsup_{k=k'\to\infty} \|u^1_{k,\psi}\|_{\mathcal{V}} \le \alpha_0^{-1} nM \|\psi\|_X. \tag{11}$$

Используя последнюю оценку и сходимость (10), из неравенства

$$|\langle A^k_\psi u^1_{k,\psi}, v \rangle| \le nM(\|u^1_{k,\psi}\|_{\mathcal{V}} + \|\psi\|_X) \|v\|_{\mathcal{V}} \quad \forall v \in \mathcal{V}, \ \ \forall \psi \in X$$

после предельного перехода при $k = k' \to \infty$ находим

$$|\langle A_\psi\{0\}, v\rangle| \le nM(\alpha_0^{-1}nM + 1)\|\psi\|_X \|v\|_{\mathcal{V}},$$

т. е. оценку

$$\|\overline{A}\psi\|_{\mathcal{V}'} \le nM(\alpha_0^{-1}nM + 1)\|\psi\|_X \quad \forall\psi \in X. \tag{12}$$

Пусть $\varphi(x) \in (L^2(\Omega))^n$ и $t_0 \in (0, T)$ — точка Лебега функции $t \to \|\overline{A}(t)\varphi\|_{H^{-1}(\Omega)}$. Полагая в (12) $\psi(t, x) = \eta_m(t)\varphi(x)$, где $\eta_m \in C[0, T]$ таковы, что $\eta_m^2(t)$, $m = 1, 2, \ldots,$ — дельтаобразная последовательность с носителями в окрестности точки t_0, в пределе по m получаем неравенство

$$\|\overline{A}(t_0)\varphi\|_{H^{-1}(\Omega)} \le nM(\alpha_0^{-1}nM + 1)\|\varphi\|_{(L^2(\Omega))^n}.$$

Ввиду полномерности множества точек Лебега функции и сепарабельности пространства $(L^2(\Omega))^n$ найдется такое полномерное в $(0, T)$ множество $\{t_0\}$, что при этих t_0 последнее неравенство будет справедливо одновременно для всех $\varphi \in (L^2(\Omega))^n$.

Наконец, имеем

$$(A_\psi u)(t) = A_{\psi+\partial u}\{0\} = (\overline{A}(\psi + \partial u))(t) = \overline{A}(t)(\psi(t,\cdot) + \partial u(t,\cdot))$$

$$\forall u \in \mathcal{V}, \ \forall\psi \in X; \ A(t)u(t,\cdot) = (Au)(t) = \overline{A}(t)(\partial u(t,\cdot)).$$

Теорема доказана.

На этом этапе все свойства оператора A_ψ выяснены. Для дальнейшего рассмотрим величины

$$\overline{\Gamma}_i^k\psi = a_{ij}^k(\psi_j + \partial_j u_{k,\psi}^1), \quad i = \overline{1, n}.$$

Лемма 1. *Преобразования* $\psi \to \overline{\Gamma}_i^k\psi: X \to L^2(Q) \cap \mathcal{T}(0, T)$, $i = \overline{1, n}$, *линейные и равномерно по* k *ограниченные.*

Действительно, поскольку $(\mathcal{P}_\psi^k)^{-1}f$ является линейным отображением $\mathcal{V}' \times X \to \mathcal{V}$ и $\overline{A} \in \mathfrak{L}(X, \mathcal{V}')$, то $\psi \to u_{k,\psi}^1 = (\mathcal{P}_\psi^k)^{-1}\overline{A}\psi$ — линейное отображение $X \to \mathcal{V}$, причем ввиду (7) и (1) имеем

$$\|u_{k,\psi}^1\|_{\mathcal{V}} \le \alpha_0^{-1}(\|\overline{A}\psi\|_{\mathcal{V}'} + nM\|\psi\|_X) \le \alpha_0^{-1}(\|\overline{A}\| + nM)\|\psi\|_X,$$

$$\|\overline{\Gamma}_i^k\psi\|_{L^2(Q)}^2 \le 2nM^2(\|\psi\|_X^2 + \|u_{k,\psi}^1\|_{\mathcal{V}}^2).$$

Этим лемма доказана.

Теорема 3. *При условиях* (1) *существуют подпоследовательность* $\{k'\} \subset \subset \mathbb{N}$ *и операторы* $\overline{\Gamma}_i \in \mathfrak{L}\{X, L^2(Q) \cap \mathcal{T}(0, T)\}$ *такие, что при* $k = k' \to \infty$

$$\overline{\Gamma}_i^k\psi \to \overline{\Gamma}_i\psi \ \text{ слабо в } \ L^2(Q) \quad \forall\psi \in X, \ i = \overline{1, n}, \tag{13}$$

и имеет место сходимость (6), *причем для почти всех* t

$$(\overline{\Gamma}_i\psi)(t) = \overline{\Gamma}_i(t)\psi(t,\cdot), \quad \overline{\Gamma}_i(t) \in \mathfrak{L}\{(L^2(\Omega))^n, L^2(\Omega)\},$$

$$\|\overline{\Gamma}_i(t)\| \le M(2n)^{1/2}(1 + \alpha_0^{-2}n^2M^2)^{1/2}.$$

Доказательство. Ввиду линейности и равномерной ограниченности преобразований $\overline{\Gamma}_i^k$ и сепарабельности пространства $L^2(Q) \cap \mathcal{T}(0, T)$ из зафиксированной последовательности $\{k'\}$ можно выделить такую подпоследовательность (ее снова обозначим $\{k'\}$), что при $k = k'$ имеет место сходимость (13) для любой $\psi \in X$. При этом преобразования $\overline{\Gamma}_i: X \to L^2(Q) \cap \mathcal{T}(0, T)$, очевидно, линейные. Из сходимости (13) и оценки (11) вытекает их ограниченность:

$$\|\overline{\Gamma}_i\psi\|_{L^2(Q)} \le M(2n)^{1/2}(\|\psi\|_X^2 + \varliminf_{k=k'\to\infty}\|u_{k,\psi}^1\|_{\mathcal{V}}^2)^{1/2} \le$$

$$\le M(2n)^{1/2}(1 + \alpha_0^{-2}n^2M^2)^{1/2}\|\psi\|_X. \tag{14}$$

Пусть $\gamma(t) \in \mathcal{T}(0, T)$ — гладкая функция. Используем выведенную при доказательстве теоремы 2 формулу $u^1_{k,\gamma\psi} - \gamma u^1_{k,\psi} = -\nu_k v_{k,\psi} \equiv -\nu_k(\mathcal{P}^k)^{-1}(\gamma' u^1_{k,\psi})$ и вытекающее из нее равенство

$$\overline{\Gamma}^k_i(\gamma\psi) \equiv a^k_{ij}(\gamma\psi_j + \partial_j u^1_{k,\gamma\psi}) = \gamma\overline{\Gamma}^k_i\psi - \nu_k a^k_{ij}\partial_j v_{k,\psi}. \tag{15}$$

Учитывая равномерную по k оценку

$$\| a^k_{ij}\partial_j v_{k,\psi}\|_{L^2(Q)} \le Mn^{1/2}\| v_{k,\psi}\|_{\mathcal{V}} \le Mn^{1/2}\alpha_0^{-1}\|\gamma'\|_{L^\infty}\| u^1_{k,\psi}\|_{\mathcal{V}'} \le$$
$$\le Mn^{1/2}\alpha_0^{-2}\|\gamma'\|_{L^\infty} C(\|\overline{A}\| + nM)\|\psi\|_X,$$

где C — константа вложения $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, после слабого в $L^2(Q)$ предельного перехода в (15) при $k = k' \to \infty$ получаем тождество $\overline{\Gamma}_i(\gamma\psi) = \gamma\overline{\Gamma}_i\psi$, справедливое ввиду ограниченности $\overline{\Gamma}_i$ для любых $\psi \in X$, $\gamma \in C(\mathbb{R}) \cap \mathcal{T}(0, T)$. Из него и оценки (14) следуют, как видно из предыдущих доказательств, остальные утверждения теоремы.

***Следствие* 1.** *При* $k = k' \to \infty$

$$a^k_{ij}(\psi_j + \partial_j u_{k,\psi}) \to \overline{\Gamma}_i(\psi + \partial u) \ \textit{слабо в}\ L^2(Q)\ \ \forall\, u \in \mathcal{V},\ \forall\, \psi \in X,\ i = \overline{1, n}. \tag{16}$$

Справедливы соотношения

$$A_\psi u = -\partial_i\overline{\Gamma}_i(\psi + \partial u),\quad \overline{A}(t)\psi(t,\cdot) = -\partial_i\overline{\Gamma}_i(t)\psi(t,\cdot). \tag{17}$$

Доказательство. Ввиду соотношений теоремы 2 справедливы равенства

$$u_{k,\psi} = (\mathcal{P}^k)^{-1}\{\overline{A}(\psi + \partial u) - \overline{A}^k\psi\} = (\mathcal{P}^k)^{-1}Au +$$
$$+ (\mathcal{P}^k_\psi)^{-1}\overline{A}\psi = u_k + u^1_{k,\psi},\quad u \in \mathcal{V},\ \psi \in X,$$

а значит, имеем

$$a^k_{ij}(\psi_j + \partial_j u_{k,\psi}) = \Gamma^k_i u + \overline{\Gamma}^k_i\psi,\quad \Gamma^k_i u = a^k_{ij}\partial_j u_k. \tag{18}$$

Положим в (13) $\psi = \partial u$, $u \in \mathcal{V}$, и определим функции $u^1_k = u^1_{k,\partial u} \in \mathcal{W}$, $\tilde{u}_k = u + u^1_k \in \mathcal{V}$. Справедливо равенство $\nu_k\partial_t u^1_k + A^k\tilde{u}_k = Au$ и при $k = k' \to \infty$

$$a^k_{ij}\partial_j\tilde{u}_k = \overline{\Gamma}^k_i(\partial u) \to \overline{\Gamma}_i(\partial u)\ \text{слабо в}\ L^2(Q),\ i = \overline{1, n}.$$

Если теперь $u \in \mathcal{W}$, то имеем $\tilde{u}_k \in \mathcal{W}$,

$$\tilde{u}_k = (\mathcal{P}^k)^{-1}(Au + \nu_k\partial_t u),\quad \| u_k - \tilde{u}_k\|_{\mathcal{V}} \le \alpha_0^{-1}|\nu_k|\,\|\partial_t u\|_{\mathcal{V}'} \to 0,$$
$$\| \Gamma^k_i u - a^k_{ij}\partial_j\tilde{u}_k\|_{L^2(Q)} = \| a^k_{ij}\partial_j(u_k - \tilde{u}_k)\|_{L^2(Q)} \le Mn^{1/2}\| u_k - \tilde{u}_k\|_{\mathcal{V}} \to 0.$$

Следовательно, при $k = k' \to \infty$

$$\Gamma^k_i u \to \overline{\Gamma}_i(\partial u)\ \text{слабо в}\ L^2(Q),\ \forall\, u \in \mathcal{W},\ i = \overline{1, n}. \tag{19}$$

Поскольку пространство $\mathcal{W}$ плотно в $\mathcal{V}$ и справедливы оценки

$$\| \Gamma^k_i u\|_{L^2(Q)} \le Mn^{1/2}\| u_k\|_{\mathcal{V}} \le \alpha_0^{-1}Mn^{1/2}\|Au\|_{\mathcal{V}'} \le \alpha_0^{-2}M^3n^{5/2}\| u\|_{\mathcal{V}},$$

т. е. Γ^k_i — линейные равномерно по k ограниченные операторы $\mathcal{V} \to L^2(Q)$, сходимости (19) на самом деле справедливы для любой $u \in \mathcal{V}$. Отсюда и из (13), (18) следует (16). При этом, с одной стороны, $A^k_\psi u_{k,\psi} \to A_\psi u = \overline{A}(t)(\psi(t,\cdot) + \partial u(t,\cdot))$ слабо в $\mathcal{V}'$, а с другой, ввиду (16),

$$A^k_\psi u_{k,\psi} = -\partial_i(a^k_{ij}(\psi_j + \partial_j u_{k,\psi})) \to -\partial_i\overline{\Gamma}_i(\psi + \partial u) =$$
$$= -\partial_i\overline{\Gamma}_i(t)(\psi(t,\cdot) + \partial u(t,\cdot))\ \text{слабо в}\ \mathcal{V}'.$$

Значит, справедливы равенства (17). Следствие доказано.

Далее нужно установить свойство локальности операторов $\overline{\Gamma}_i$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (1) *и*

$$\partial_t a_{ij}^k \in L^\infty(\Omega; L^2(0,T)), \quad \sup_{k,i,j} \|\partial_t a_{ij}^k\|_{L^\infty(\Omega; L^2(0,T))} = M_1 < \infty. \tag{20}$$

Тогда если $\Omega_1 \subset \Omega$, $Q_1 = \{(t,x) \in (0,T) \times \Omega_1\}$, $\psi \in X$, $\psi|_{Q_1} = 0$, *то* $(\overline{\Gamma}_i \psi)|_{Q_1} = 0$.

Доказательство. Если $\psi|_{Q_1} = 0$, то для $u_{k,\psi}^1|_{Q_1}$ имеем уравнение $\mathcal{P}^k u_{k,\psi}^1|_{Q_1} = (\overline{A}\psi)|_{Q_1}$, которое запишем так:

$$\nu_k \partial_t u_{k,\psi}^1 + \partial_t A^k(t)\left(\int_\sigma^t u_{k,\psi}^1(t_1,\cdot)\,dt_1\right) + \partial_i\left[(\partial_t a_{ij}^k)\partial_j \int_\sigma^t u_{k,\psi}^1(t_1,\cdot)\,dt_1\right] = \overline{A}(t)\psi(t,\cdot),$$

$$(t,x) \in Q_1, \quad \sigma = \mathrm{const} \in [0,T).$$

Умножив последнее уравнение на произвольную функцию $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega_1)$ и проинтегрировав его по t в интервале (σ, t), получим

$$\varphi\nu_k(u_{k,\psi}^1(t,\cdot) - u_{k,\psi}^1(\sigma,\cdot)) + A^k(t)V_{k,\psi}(t,\cdot) + \int_\sigma^t \partial_i[\partial_{t_1} a_{ij}^k(t_1,\cdot)\partial_j V_{k,\psi}(t_1,\cdot)]\,dt_1 +$$

$$+ \partial_i\varphi \int_\sigma^t a_{ij}^k(t_1,\cdot)\partial_j u_{k,\psi}^1(t_1,\cdot)\,dt_1 + \partial_i(a_{ij}^k \partial_j \varphi \overline{V}_{k,\psi}) - \int_\sigma^t \partial_i[\partial_{t_1} a_{ij}^k(t_1,\cdot)\partial_j\varphi \times$$

$$\times \overline{V}_{k,\psi}(t_1,\cdot)]\,dt_1 = \varphi\int_\sigma^t \overline{A}(t_1)\psi(t_1,\cdot)\,dt_1,$$

$$\overline{V}_{k,\psi}(t,x) = \int_\sigma^t u_{k,\psi}^1(t_1,x)\,dt_1, \quad x \in \Omega_1, \quad V_{k,\psi} = \varphi\overline{V}_{k,\psi}. \tag{21}$$

Поскольку при $k = k'$ $u_{k,\psi}^1 \to 0$ слабо в $L^2(0,T; H^1(\Omega_1))$, то при тех же k функции $\overline{V}_{k,\psi} \to 0$ слабо в $H^1(0,T; H^1(\Omega_1))$, $V_{k,\psi} \to 0$ слабо в $H^1(0,T; \mathring{H}^1(\Omega_1))$, и следовательно, они сходятся к нулю сильно в $L^2(Q_1)$. Ввиду того, что $\|\nu_k u_{k,\psi}^1\|_{\mathcal{V}} \to 0$, $\sup_k \|\nu_k \partial_t u_{k,\psi}^1\|_{\mathcal{V}'} < \infty$, справедлива оценка ([1], теорема 2)

$$\sup_k \|\nu_k u_{k,\psi}^1\|_{C[0,T; L^2(\Omega)]} = K < \infty. \tag{22}$$

Умножим равенство (21) на $V_{k\psi}$ и проинтегрируем по $Q_1^{\sigma,t} = \{(\tau,x) \in (\sigma,t) \times \times \Omega_1\}$, $0 \le \sigma < t \le T$. В результате получим

$$\langle \nu_k(u_{k,\psi}^1(\tau,\cdot) - u_{k,\psi}^1(\sigma,\cdot)), \varphi V_{k,\psi}(\tau,\cdot)\rangle_{Q_1^{\sigma,t}} + \langle A^k V_{k,\psi}, V_{k,\psi}\rangle_{Q_1^{\sigma,t}} -$$

$$- \left\langle \int_\sigma^\tau \partial_{t_1} a_{ij}^k(t_1,\cdot)\partial_j V_{k,\psi}(t_1,\cdot)\,dt_1, \partial_i V_{k,\psi}(\tau,\cdot)\right\rangle_{Q_1^{\sigma,t}} + \left\langle \int_\sigma^\tau a_{ij}^k(t_1,\cdot)\partial_j u_{k,\psi}^1(t_1,\cdot)\,dt_1,\right.$$

$$\left.\partial_i\varphi V_{k,\psi}(\tau,\cdot)\right\rangle_{Q_1^{\sigma,t}} - \langle a_{ij}^k \partial_j\varphi\overline{V}_{k,\psi}, \partial_i V_{k,\psi}\rangle_{Q_1^{\sigma,t}} + \left\langle \int_\sigma^\tau \partial_{t_1} a_{ij}^k(t_1,\cdot)\overline{V}_{k,\psi}(t_1,\cdot)\,dt_1 \right. \times$$

$$\left. \times\ \partial_j\varphi, \partial_i V_{k,\psi}(\tau,\cdot)\right\rangle_{Q_1^{\sigma,t}} = \left\langle \varphi\int_\sigma^\tau \overline{A}(t_1)\psi(t_1,\cdot)\,dt_1, V_{k,\psi}(\tau,\cdot)\right\rangle_{Q_1^{\sigma,t}}, \tag{23}$$

где обозначено

$$\langle u(\tau,\cdot), v(\tau,\cdot)\rangle_{Q_1^{\sigma,t}} = \int_{\Omega_1}\int_\sigma^t u(\tau,x)v(\tau,x)\,d\tau\,dx.$$

В силу оценки (22) и сходимости к нулю $V_{k',\psi}$ по норме $L^2(Q_1^{\sigma,t})$ первое слагаемое левой части (23) при $k = k' \to \infty$ стремится к нулю. Из равномерной по k ограниченности коэффициентов a_{ij}^k и норм $\|\partial_j u_{k,\psi}^1\|$, $\|\partial_i V_{k,\psi}\|$ в пространстве $L^2(Q_1^{\sigma,t})$, а также сходимости к нулю $V_{k',\psi}$ и $\overline{V}_{k',\psi}$ по норме этого пространства вытекает сходимость к нулю при $k = k' \to \infty$ четвертого и пятого слагаемых левой части (23). Поскольку $V_{k',\psi} \to 0$ слабо в $L^2(\sigma, t; \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_1))$ и справедливо включение

$$\varphi \int_\sigma^\tau \overline{A}(t_1)\psi(t_1, \cdot)\, dt_1 \in H^1(\sigma, T; H^{-1}(\Omega_1)) \subset L^2(\sigma, t; H^{-1}(\Omega_1)),$$

то правая часть (23) при $k = k' \to \infty$ сходится к нулю. Для последнего слагаемого левой части (23) в силу (20) справедлива оценка

$$\left\| \int_\sigma^\tau \partial_{t_1} a_{ij}^k(t_1, \cdot)\overline{V}_{k,\psi}(t_1, \cdot)\, dt_1 \partial_j \partial\varphi \right\|_{L^2(Q_1^{\sigma,t})} \le$$

$$\le M_1 n^{1/2}(t-\sigma)^{1/2} \|\partial\varphi\|_{C(\overline{\Omega}_1)} \|\overline{V}_{k,\psi}\|_{L^2(Q_1^{\sigma,t})},$$

так что при $k = k' \to \infty$ оно также стремится к нулю. Поскольку $V_{k,\psi} \in H^1(0, T; \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_1))$, то согласно (1) имеем

$$\langle A^k V_{k,\psi}, V_{k,\psi}\rangle_{Q_1^{\sigma,t}} \ge \alpha_0 \|\partial V_{k,\psi}\|^2_{(L^2(Q_1^{\sigma,t}))^n}.$$

Наконец, третье слагаемое левой части (23) оценивается так:

$$\left| \left\langle \int_\sigma^\tau \partial_{t_1} a_{ij}^k(t_1, \cdot)\partial_j V_{k,\psi}(t_1, \cdot)\, dt_1, \partial_i V_{k,\psi}(\tau, \cdot) \right\rangle_{Q_1^{\sigma,t}} \right| \le \left(\sum_{i,j=1}^n \|\partial_t a_{ij}^k\|^2_{L^\infty(\Omega; L^2(0,T))} \right)^{1/2} \times$$

$$\times (t-\sigma)^{1/2} \|\partial V_{k,\psi}\|^2_{(L^2(Q_1^{\sigma,t}))^n} \le (t-\sigma)^{1/2} M_1 n \|\partial V_{k,\psi}\|^2_{(L^2(Q_1^{\sigma,t}))^n}.$$

Таким образом, из (23) вытекает, что для любых $0 \le \sigma < \sigma + \Delta \le T$ при условии $\Delta \le (\alpha_0/2nM_1)^2$ существует

$$\lim_{k=k'\to\infty} \|\partial V_{k,\psi}\|_{(L^2(Q_1^{\sigma,\sigma+\Delta}))^n} = 0. \tag{24}$$

Далее используем тождества

$$\varphi(\overline{\Gamma}_i^k \psi)\big|_{Q_1} = \varphi a_{ij}^k \partial_j u_{k,\psi}^1\big|_{Q_1} = \partial_t(a_{ij}^k \partial_j V_{k,\psi}) - \partial_t(a_{ij}^k \partial_j \varphi \overline{V}_{k,\psi}) -$$

$$- \partial_t a_{ij}^k \partial_j V_{k,\psi} + \partial_t a_{ij}^k \partial_j \varphi \overline{V}_{k,\psi}, \quad \varphi = \varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega_1). \tag{25}$$

В силу (13) для произвольной $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_1)$ и любого $t \in (\sigma, \sigma + \Delta]$

$$\int_\sigma^t \int_{\Omega_1} \varphi(x) \int_\sigma^{t_1} (\overline{\Gamma}_i^{k'}\psi)(t_2, x)\, dt_2 dx dt_1 \to \int_\sigma^t \int_{\Omega_1} \varphi(x) \int_\sigma^{t_1} \overline{\Gamma}_i(t_2)\psi(t_2, x)\, dt_2 dx dt_1.$$

С другой стороны, согласно (25) имеем

$$\int_\sigma^t \int_{\Omega_1} \varphi(x) \int_\sigma^{t_1} (\overline{\Gamma}_i^k \psi)(t_2, x)\, dt_2 dx dt_1 = \int_\sigma^t \int_{\Omega_1} a_{ij}^k \partial_j V_{k,\psi}\, dx dt_1 -$$

$$- \int_\sigma^t \int_{\Omega_1} a_{ij}^k \partial_j \varphi \overline{V}_{k,\psi}\, dx dt_1 - \int_\sigma^t \int_{\Omega_1} \int_\sigma^{t_1} \partial_{t_2} a_{ij}^k(t_2, x)\partial_j V_{k,\psi}(t_2, x)\, dt_2 dx dt_1 +$$

$$+\int_{\sigma}^{t}\int_{\Omega_1}\int_{\sigma}^{t_1}\partial_{t_2}a_{ij}^k(t_2,x)\partial_j\varphi(x)\overline{V}_{k,\psi}(t_2,x)dt_2dxdt_1 \equiv \sum_{l=1}^{4}I_l^k(t), \tag{26}$$

где для интегралов справа в силу условий (1) и (20) справедливы оценки

$$|I_1^k(t)| \le Mn^{1/2}\int_{\sigma}^{\sigma+\Delta}\int_{\Omega_1}|\partial V_{k,\psi}|dxdt_1, \quad |I_2^k(t)| \le Mn^{1/2}\int_{\sigma}^{\sigma+\Delta}\int_{\Omega_1}|\partial\varphi||\overline{V}_{k,\psi}|dxdt_1,$$

$$|I_3^k(t)| \le |\Omega_1|^{1/2}M_1n^{1/2}\Delta\,\|\partial V_{k,\psi}\|_{(L^2(Q_1^{\sigma,\sigma+\Delta}))^n},$$

$$|I_4^k(t)| \le M_1n^{1/2}\Delta\,\|\partial\varphi\|_{(L^2(\Omega_1))^n}\|\overline{V}_{k,\psi}\|_{L^2(Q_1^{\sigma,\sigma+\Delta})}.$$

Учитывая (24) и сильную в $L^2(Q_1)$ сходимость $\overline{V}_{k',\psi}\to 0$, заключаем, что при $k=k'\to\infty$ все интегралы $I_l^k(t)\to 0\ \ \forall\ t\in(\sigma,\sigma+\Delta]$. Значит, для любой $\varphi\in C_0^\infty(\Omega_1)$ и всех $t\in(\sigma,\sigma+\Delta]$ имеем равенство

$$\int_{\sigma}^{t}\int_{\Omega_1}\varphi(x)\int_{\sigma}^{t_1}\overline{\Gamma}_i(t_2)\psi(t_2,x)dt_2dxdt_1 = 0,$$

которое, очевидно, равносильно утверждению, что $\overline{\Gamma}_i(t)\psi(t,\cdot)=0$ как элемент $L^2(Q_1^{\sigma,\sigma+\Delta})$. Поскольку постоянная $\Delta>0$ не зависит от σ, а последнее — любое число из $[0,T-\Delta]$, то фактически получили равенство $(\overline{\Gamma}_i\psi)\big|_{Q_1}=0$. Теорема доказана.

Следствие 2. *В теореме 4 фактически доказана локальность операторов* $\overline{\Gamma}_i(t)$: *если* $\Omega_1\subset\Omega$, $\varphi_1,\varphi_2\in(L^2(\Omega))^n$, $\varphi_1\big|_{\Omega_1}=\varphi_2\big|_{\Omega_1}$, то $(\overline{\Gamma}_i(t)\varphi_1)\big|_{\Omega_1}=(\overline{\Gamma}_i(t)\varphi_2)\big|_{\Omega_1}$ *при почти всех* $t\in\mathbb{R}$. *Значит, наряду с оценкой* $\|\overline{\Gamma}_i(t)\|$ *теоремы* 3 *для почти всех* t *справедлива локальная оценка*

$$\|\overline{\Gamma}_i(t)\varphi\|_{L^2(\Omega_1)}\le M_2\|\varphi\|_{(L^2(\Omega_1))^n}\quad\forall\,\Omega_1\subset\Omega,\ \forall\,\varphi\in(L^2(\Omega))^n,\ i=\overline{1,n}, \tag{27}$$

$$M_2 = M(2n)^{1/2}(1+\alpha_0^{-2}n^2M^2)^{1/2}.$$

Следствие 3. *Для почти всех* $(t,x)\in\mathbb{R}\times\Omega$ *справедлива формула* $(\overline{\Gamma}_i\varphi)(t,x)=a_{ij}(t,x)\varphi_j(x)\quad\forall\,\varphi\in(L^2(\Omega))^n$, *где* $a_{ij}(t,x)$ *— фиксированные существенно ограниченные коэффициенты, у которых*

$$\max_{i,j}\|a_{ij}\|_{L^\infty(Q)}\le M_2. \tag{28}$$

Значит, согласно следствию 1 *при* $k=k'\to\infty$ *для любых* $u\in\mathcal{V}$, $\psi\in X$ *имеем*

$$a_{ij}^k(\psi_j+\partial_ju_{k,\psi})\to a_{ij}(\psi_j+\partial_ju)\ \ \textit{слабо в}\ L^2(Q),\ i=\overline{1,n}, \tag{29}$$

$$A_\psi u = -\partial_i(a_{ij}(\psi_j+\partial_ju)).$$

Доказательство. Полагая $\varphi=\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$, имеем линейную функцию от ξ:

$$(\overline{\Gamma}_i\xi)(t,x) = a_{ij}(t,x)\xi_j,\quad a_{il}(t,x) = \overline{\Gamma}_i(t)\{\delta_j^l,\ j=\overline{1,n}\}(x)\in L^2(Q)\cap\mathcal{T}(0,T).$$

Пусть $\varphi\in(L^2(\Omega))^n$ и (t_0,x_0), $x_0\in\Omega$, — точка Лебега функций $a_{ij}(t,x)$, $j=\overline{1,n}$, $\varphi(x)$ и $(\overline{\Gamma}_i\varphi)(t,x)$. Обозначим $\omega_k(x_0)=\{x\in\mathbb{R}^n\mid |x-x_0|<1/k\}$. С учетом равенств

$$(\overline{\Gamma}_i\varphi)(t_0,x)=(\overline{\Gamma}_i(t_0)\varphi)(x)=(\overline{\Gamma}_i(t_0)\varphi(x_0))(x)+\overline{\Gamma}_i(t_0)(\varphi(\cdot)-\varphi(x_0))(x)=$$

$$= a_{ij}(t_0, x)\varphi_j(x_0) + \overline{\Gamma}_i(t_0)(\varphi(\cdot) - \varphi(x_0))(x)$$

запишем тождество для средних величин

$$\frac{1}{|\omega_k(x_0)|}\int\limits_{\omega_k(x_0)}(\overline{\Gamma}_i\varphi)(t_0, x)dx = \frac{\varphi_j(x_0)}{|\omega_k(x_0)|}\int\limits_{\omega_k(x_0)}a_{ij}(t_0, x)dx +$$

$$+ \frac{1}{|\omega_k(x_0)|}\int\limits_{\omega_k(x_0)}\overline{\Gamma}_i(t_0)(\varphi(\cdot) - \varphi(x_0))(x)dx. \tag{*}$$

В силу оценки (27) и того, что (t_0, x_0) — точка Лебега, модуль последнего среднего оценивается сверху величиной

$$|\omega_k(x_0)|^{-1/2}\,\|\overline{\Gamma}_i(t_0)(\varphi(\cdot) - \varphi(x_0))\|_{L^2(\omega_k(x_0))} \le$$

$$\le M_2|\omega_k(x_0)|^{-1/2}\,\|\varphi - \varphi(x_0)\|_{\{L^2(\omega_k(x_0))\}^n},$$

стремящейся к нулю при $k \to \infty$. Так что после предельного перехода по $k \to \infty$ в тождестве (*) получаем $(\overline{\Gamma}_i\varphi)(t_0, x_0) = a_{ij}(t_0, x_0)\varphi_j(x_0)$. Ввиду полномерности множества точек Лебега функций это равенство справедливо для почти всех $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$. Для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ и выбранных точек (t_0, x_0) из (27) вытекает неравенство

$$|a_{ij}(t_0, x_0)\xi_j|^2 = |(\overline{\Gamma}_i\xi)(t_0, x_0)|^2 = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{|\omega_k(x_0)|}\,\|\overline{\Gamma}_i(t_0)\xi\|^2_{L^2(\omega_k(x_0))} \le$$

$$\le \frac{M_2^2}{|\omega_k(x_0)|}\,\|\xi\|^2_{\{L^2(\omega_k(x_0))\}^n} = M_2^2|\xi|^2.$$

Следовательно, имеем оценку

$$\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2(t_0, x_0)\right)^{1/2} = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\frac{|a_{ij}(t_0, x_0)\xi_j|}{|\xi|} \le M_2,$$

откуда следует выполнение (28). Следствие доказано.

Рассмотрим пространства функций, не подчиненных каким-либо условиям на границе $\partial\Omega$:

$$\overline{\mathcal{V}} \equiv \overline{\mathcal{V}}(Q) = L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap \mathcal{T}(0, T),$$

$$\overline{\mathcal{W}} \equiv \overline{\mathcal{W}}(Q) = \{u \in \overline{\mathcal{V}} \mid \partial_t u \in \mathcal{V}'\}.$$

Для решений уравнений из $\overline{\mathcal{W}}$ справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Предположим, что выполнены условия* (1), (20). *Пусть* $\mathcal{P}_\psi^k \overset{G}{\Rightarrow} A_\psi$, *т. е. при* $k \to \infty$ *справедливы сходимости* (6) и (29) *при условии* (28). *Пусть* $u \in \overline{\mathcal{V}}$, $v_k \in \overline{\mathcal{W}}$, $v_k \to u$ *слабо в* $\overline{\mathcal{V}}$, $\psi \in X$, $\mathcal{P}_\psi^k v_k = f_k, f_k \in \mathcal{V}'$, $f_k \to f$ *слабо в* $\mathcal{V}'$,

$$\int\limits_\sigma^t f_k(t_1, x)dt_1 \to \int\limits_\sigma^t f(t_1, x)dt_1 \quad \textit{сильно в } (H^1)'(\sigma, T; H^{-1}_{\text{лок}}(\Omega))$$

$\forall\,\sigma \in [0, T)$. *Тогда* $A_\psi u = f$, $a_{ij}^k(\psi_j + \partial_j v_k) \to a_{ij}(\psi_j + \partial_j u)$ *слабо в* $L^2(Q)$, $i = \overline{1, n}$.

Доказательство. Пусть Ω_1 — некоторая область, $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$, $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi\big|_{\Omega_1} \equiv 1$. Полагая $u_k = (\mathcal{P}_\psi^k)^{-1}A_\psi(\varphi u)$, имеем сходимости $u_k \to \varphi u$ слабо в $\mathcal{V}$, $a_{ij}^k(\psi_j + \partial u_k) \to a_{ij}(\psi_j + \partial_j(\varphi u))$ слабо в $L^2(Q)$, $i = \overline{1, n}$. В частности, сужения на

$Q_1 = (0, T) \times \Omega_1$

$$u_k\Big|_{Q_1} \to u\Big|_{Q_1} \text{ слабо в } \overline{\mathcal{V}}(Q_1),$$

$$a_{ij}^k(\psi_j + \partial_j u_k)\Big|_{Q_1} \to a_{ij}(\psi_j + \partial_j u)\Big|_{Q_1} \text{ слабо в } L^2(Q_1),\ i = \overline{1, n}. \tag{30}$$

Значит, для разности $z_k = (v_k - u_k)\big|_{Q_1}$ выполнены условия

$$\mathcal{P}^k z_k = (f_k - A_\psi u)\Big|_{Q_1},\ z_k \in \overline{\mathcal{W}}(Q_1),\ z_k \to 0 \text{ слабо в } \overline{\mathcal{V}}(Q_1). \tag{31}$$

Лемма 2. *При условиях теоремы* 5 *и* (31) *имеем*

$$(f - A_\psi u)\Big|_{Q_1} = 0,\ a_{ij}^k \partial_j z_k \to 0 \textit{ слабо в } L^2(Q_1),\ i = \overline{1, n}.$$

В самом деле, поскольку нормы $\| f_k \|_{\mathcal{V}'(Q_1)}$, $\| z_k \|_{\overline{\mathcal{V}}(Q_1)}$, по условию, равномерно ограничены, а из уравнения (31) вытекает и равномерная ограниченность $\| \nu_k \partial_t z_k \|_{\mathcal{V}'(Q_1)}$, то для любой $\varphi_1(x) \in C_0^\infty(\Omega_1)$ имеем $\| \nu_k z_k \varphi_1 \|_{\mathcal{V}(Q_1)} \to 0$, $\sup\limits_k \| \nu_k\, \partial_t z_k \varphi_1 \|_{\mathcal{V}'(Q_1)} < \infty$; следовательно ([1], теорема 2), справедлива оценка

$$\sup_k \| \nu_k z_k \varphi_1 \|_{C[0, T; L^2(\Omega_1)]} < \infty. \tag{32}$$

По аналогии с доказательством теоремы 4, вводя функции

$$\overline{V}_k(t, x) = \int_\sigma^t z_k(t_1, x)dt_1 \in H^1(\sigma, T; H^1(\Omega_1)),\ \ V_k = \varphi_1 \overline{V}_k \in H^1(\sigma, T; \mathring{H}^1(\Omega_1)),$$

заключаем, что они сходятся к нулю слабо в указанных пространствах и сильно в $L^2(Q_1^{\sigma, T})$. Точно так же, как и при доказательстве теоремы 4, из уравнения (31) выводим равенство, аналогичное (23), получаемое из последнего заменой $u_{k,\psi}^1$, φ, $\overline{A}(t)\psi(t,\cdot)$ соответственно на z_k, φ_1, $f_k(t,\cdot) - (A_\psi u)(t,\cdot)$. Так как, по условию теоремы,

$$\int_\sigma^t f_k(t_1, x)dt_1 \to \int_\sigma^t f(t_1, x)dt_1 \text{ сильно в } (H^1)'(\sigma, T; H^{-1}(\Omega_1)),$$

а $\varphi_1 V_k \to 0$ слабо в $H^1(\sigma, T; \mathring{H}^1(\Omega_1))$ и $(A_\psi u)\Big|_{Q_1^{\sigma,T}} \in \mathcal{V}'(Q_1^{\sigma, T})$, то правая часть указанного равенства

$$\left\langle \int_\sigma^\tau [f_k(t_1, \cdot) - (A_\psi u)(t_1, \cdot)]dt_1, \varphi_1 V_k(\tau, \cdot) \right\rangle_{Q_1^{\sigma, t}} \to 0.$$

Учитывая условия (1), (20) и оценку (32), как при доказательстве теоремы 4, приходим к выводу, что для V_k при $k \to \infty$ справедливо утверждение, аналогичное (24). Далее, выберем такую подпоследовательность $\{k'\} \subset \{k\}$, что $a_{ij}^{k'} \partial_j z_{k'} \to g_i$ слабо в $L^2(Q_1)$, $i = \overline{1, n}$. Используя аналог интегрального тождества (26) для выражения $\varphi_1 a_{ij}^k \partial_j z_k$, заключаем, что для произвольной $\varphi_1 \in C_0^\infty(\Omega_1)$ и любого $t \in (\sigma, \sigma + \Delta]$, с одной стороны,

$$\int_\sigma^t \int_{\Omega_1} \varphi_1(x) \int_\sigma^{t_1} a_{ij}^{k'}(t_2, x) \partial_j z_{k'}(t_2, x)\, dt_2 dx dt_1 \to \int_\sigma^t \int_{\Omega_1} \varphi_1(x) \int_\sigma^{t_1} g_i(t_2, x)\, dt_2 dx dt_1,$$

а с другой, — этот интеграл сходится к нулю, так что предельный интеграл справа равен нулю. Значит, $g_i = 0$ как функция из $L^2(Q_1^{\sigma, \sigma + \Delta})$, а так как σ —

произвольное число из $[0, T-\Delta]$ и $\Delta = \text{const} > 0$, то $g_i = 0$ как элемент $L^2(Q_1)$. Таким образом, при $k = k'$ имеем $a_{ij}^k \partial_j z_k \to 0$ слабо в $L^2(Q_1)$. Следовательно, эта сходимость имеет место, и когда $k \to \infty$, пробегая всю последовательность. Теперь из уравнения (31) и слабых в $\mathcal{V}'(Q_1)$ сходимостей $\nu_k \partial_t z_k \to 0$, $-\partial_i(a_{ij}^k \partial_j z_k) \to 0$, $f_k \to f$ вытекает равенство $(f - A_\psi u)|_{Q_1} = 0$, что и утверждает лемма.

Из леммы 2 и (30) следует слабая в $L^2(Q_1)$ сходимость

$$a_{ij}^k(\psi_j + \partial_j v_k)|_{Q_1} = a_{ij}^k(\psi_j + \partial_j u_k)|_{Q_1} + a_{ij}^k \partial_j z_k \to a_{ij}(\psi_j + \partial_j u)|_{Q_1}. \tag{33}$$

Так как $f - A_\psi u \in \mathcal{V}'$, последовательность $\{a_{ij}^k(\psi_j + \partial_j v_k), k \in \mathbb{N}\}$ ограниченна в $L^2(Q)$ и замкнутая область $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$ может быть как угодно близкой к Ω по мере, то из равенства $(f - A_\psi u)|_{Q_1} = 0$ и (33) вытекает, что $f - A_\psi u = 0$ как элемент $\mathcal{V}'$ и $a_{ij}^k(\psi_j + \partial_j v_k) \to a_{ij}(\psi_j + \partial_j u)$ слабо в $L^2(Q)$, $i = \overline{1, n}$. Теорема доказана.

Для того чтобы доказать, что матрица (a_{ij}), фигурирующая в (28), (29), эллиптична, используем свойство локальности сильной G-сходимости.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* (1), (20). *Если*

$$\mathcal{P}_\psi^k \overset{G}{\Rightarrow} A_\psi, \quad \text{то} \quad \mathcal{P}_\psi^k|_{Q_1} \overset{G}{\Rightarrow} A_\psi|_{Q_1} \quad \forall\, \Omega_1 \subset \Omega, \ \ Q_1 = (0, T) \times \Omega_1.$$

Доказательство. Так как в цилиндре Q_1 свойства матриц (a_{ij}^k), $k \in \mathbb{N}$, такие же, как в Q, то согласно теоремам 2, 3 и следствию 3 на некоторой подпоследовательности $\{k'\} \subset \{k\}$ имеет место сходимость $\mathcal{P}_\psi^{k'}|_{Q_1} \overset{G}{\Rightarrow} \hat{A}_{\psi_1}$, где

$$\hat{A}_{\psi_1} = -\partial_i(\hat{a}_{ij}(t, x)(\psi_{1j}(t, x) + \partial_j)), \ \ \hat{a}_{ij} \in L^\infty(Q_1) \cap \mathcal{T}(0, T),$$

$$\psi_1 = \psi|_{Q_1} \ \ \forall\, \psi \in X(Q).$$

Определив для любых $u \in \mathcal{U}(Q_1)$, $\psi \in X(Q)$ функции

$$u_{k,\psi_1} = (\mathcal{P}_\psi^k|_{Q_1})^{-1} \hat{A}_{\psi_1} u, \ \ \tilde{u}_{k,\psi} = (\mathcal{P}_\psi^k)^{-1} A_\psi \tilde{u}, \ \ \tilde{u} \in \mathcal{U}(Q): \ \tilde{u}|_{Q_1} = u, \ \ \tilde{u}|_{Q \setminus Q_1} = 0,$$

будем иметь, что $u_{k,\psi_1} \in \mathcal{W}(Q_1)$, $u_{k',\psi_1} \to u$ слабо в $\mathcal{U}(Q_1)$, $a_{ij}^{k'}(\psi_{1j} + \partial_j u_{k',\psi_1}) \to$ $\to \hat{a}_{ij}(\psi_{1j} + \partial_j u)$ слабо в $L^2(Q_1)$, $i = \overline{1, n}$, $\tilde{u}_{k,\psi} \in \mathcal{W}(Q)$, $\tilde{u}_{k,\psi} \to \tilde{u}$ слабо в $\mathcal{U}(Q)$, $a_{ij}^k(\psi_j + \partial_j \tilde{u}_{k,\psi}) \to a_{ij}(\psi_j + \partial_j \tilde{u})$ слабо в $L^2(Q)$, $i = \overline{1, n}$. Положив $z_k =$ $= u_{k,\psi_1} - \tilde{u}_{k,\psi}|_{Q_1}$, находим, что $z_k \in \overline{\mathcal{W}}(Q_1)$, $z_{k'} \to 0$ слабо в $\overline{\mathcal{V}}(Q_1)$, $\mathcal{P}^k z_k =$ $= \hat{A}_{\psi_1} u - (A_\psi \tilde{u})|_{Q_1} \in \mathcal{V}'(Q_1)$.

Следовательно, по лемме 2

$$\hat{A}_{\psi_1} u = (A_\psi \tilde{u})|_{Q_1}, \ \ a_{ij}^{k'} \partial_j z_{k'} \to 0 \ \text{слабо в}\ L^2(Q_1), \ \ i = \overline{1, n}.$$

Значит, справедливы тождества $(\hat{a}_{ij} - a_{ij})(\psi_{1j} + \partial_j u) = 0 \ \ \forall\, \psi_1 \in X(Q_1)$, $\forall\, u \in$ $\in \mathcal{U}(Q_1)$, $i = \overline{1, n}$, из которых следует, что $\hat{a}_{ij} = a_{ij}|_{Q_1}$, $i, j = \overline{1, n}$, и

$$\hat{A}_{\psi_1} = -\partial_i(a_{ij}(t, x)(\psi_j'(t, x) + \partial_j))|_{Q_1} = A_\psi|_{Q_1}, \ \ a_{ij}^{k'}(\psi_{1j} + \partial_j u_{k',\psi_1}) \to$$
$$\to a_{ij}(\psi_{1j} + \partial_j u) \ \text{слабо в}\ L^2(Q_1) \ \ \forall\, u \in \mathcal{U}(Q_1), \ \forall\, \psi_1 \in X(Q_1), \ \ i = \overline{1, n}.$$

Таким образом, получили сходимость $\mathcal{P}_\psi^{k'}|_{Q_1} \overset{G}{\Rightarrow} A_\psi|_{Q_1}$. Но в силу определенности пределов по k' эта сходимость имеет место для всей последовательности

$\{\mathcal{P}_\psi^k|_{Q_1}\}$. Теорема доказана.

Следствие 4. *Для почти всех* $(t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega$ *справедливо неравенство* $a_{ij}(t, x)\xi_i\xi_j \geq \alpha_0 \xi_i \xi_i \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$, *где постоянная* α_0 *та же, что и в условиях* (1).

Доказательство. Пусть $P_\psi^k \overset{G}{\Rightarrow} A_\psi$, $u \in \overline{\mathcal{V}}(Q_1)$. Функция

$$u_k^1 = \left(\mathcal{P}_{\partial u}^k\big|_{Q_1}\right)^{-1}\left(A_{\partial u}\{0\}\right)\Big|_{Q_1}$$

удовлетворяет следующим условиям: $u_k^1 \in \mathcal{W}(Q_1)$, $u_k^1 \to 0$ слабо в $\mathcal{V}(Q_1)$, и уравнению

$$\nu_k \partial_t u_k^1 + \overline{A}^k\big|_{Q_1}(\partial \tilde{u}_k) = \overline{A}\big|_{Q_1}(\partial u), \ \tilde{u}_k = u + u_k^1.$$

Умножив это уравнение на u_k^1 и затем проинтегрировав по Q_1, с учетом равенств $a_{ij}^k\, \partial_j\, \tilde{u}_k = a_{ij}^k(\partial_j u + \partial_j u_k^1) = \overline{\Gamma}_i^k\big|_{Q_1}(\partial u)$, $i = \overline{1, n}$, получаем интегральное равенство

$$\langle a_{ij}^k\, \partial_j\, \tilde{u}_k, \partial_i\, \tilde{u}_k \rangle_{Q_1} = \langle a_{ij}^k\, \partial_j\, \tilde{u}_k, \partial_i\, u_k^1 \rangle_{Q_1} + \langle a_{ij}^k\, \partial_j\, \tilde{u}_k, \partial_i\, u \rangle_{Q_1} =$$
$$= \langle \overline{A}\big|_{Q_1}(\partial u), u_k^1 \rangle_{Q_1} + \langle \overline{\Gamma}_i^k\big|_{Q_1}(\partial u), \partial_i u \rangle_{Q_1}.$$

Поскольку $\tilde{u}_k \to u$ слабо в $\overline{\mathcal{V}}(Q_1)$, то, учитывая условия (1), слабую сходимость u_k^1 к нулю, теорему 6 и сходимости вида (13) на Q_1, из последнего равенства выводим оценку

$$\alpha_0 \|\partial u\|_{X(Q_1)}^2 \leq \alpha_0 \varliminf_{k \to \infty} \|\partial \tilde{u}_k\|_{X(Q_1)}^2 \leq \lim_{k \to \infty} \langle a_{ij}^k \partial_j \tilde{u}_k, \partial_i u_k \rangle_{Q_1} =$$
$$= \langle \overline{\Gamma}_i\big|_{Q_1}(\partial u), \partial_i u \rangle_{Q_1} = \langle a_{ij}\, \partial_j u, \partial_i u \rangle_{Q_1} \quad \forall\, u \in \overline{\mathcal{V}}(Q_1).$$

Из нее непосредственно вытекает, что при почти всех t

$$(a_{ij}(t, \cdot)\partial_j \varphi, \partial_i \varphi)_{\Omega_1} \geq \alpha_0 \|\partial \varphi\|_{(L^2(\Omega_1))^n}^2 \quad \forall \Omega_1 \Subset \Omega, \ \forall \varphi \in H^1(\Omega_1). \tag{34}$$

Далее, как при доказательстве следствия 3, выберем любую точку Лебега $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$ всех функций $a_{ij}(t, x)$, $i, j = \overline{1, n}$, и положим в неравенстве (34) $t = t_0$, $\Omega_1 = \omega_k(x_0)$, $\varphi(x) = \xi \cdot x$, $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$\xi_i \xi_j \int\limits_{\omega_k(x_0)} a_{ij}(t_0, x)\, dx \geq \alpha_0 \xi_i \xi_i |\omega_k(x_0)|.$$

Для множества точек Лебега (t_0, x_0), мера которого в Q полна, имеем неравенство

$$a_{ij}(t_0, x_0)\, \xi_i \xi_j = \lim_{k \to \infty} \frac{\xi_i \xi_j}{|\omega_k(x_0)|} \int\limits_{\omega_k(x_0)} a_{ij}(t_0, x)\, dx \geq \alpha_0 \xi_i \xi_i.$$

Следствие доказано.

1. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* О G-сходимости параболических операторов // Успехи мат. наук. – 1981. – **36**, № 1. – С. 11–58.
2. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение параболических операторов // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1982. – **45**. – С. 182–236.
3. *Кунъч Р. М., Панков О. А.* G-збіжність монотонних параболічних операторів // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1986. – № 8. – С. 8–10.
4. *Куньч Р. Н.* G–сходимость нелинейных параболических операторов: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. – Львов, 1988. – 16 с.
5. *Сиденко Н. Р.* G–сходимость и усреднение параболических периодических операторов с малым параметром при производной по времени // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 107–110.

Получено 05.12.91