УДК 519. 46

Р. О. Попович (Ін-т математики НАН України, Київ),
В. О. Попович (Київ. ун-т)

ПРО РІВНЯННЯ НАВ'Є – СТОКСА З ДОДАТКОВОЮ УМОВОЮ $u_1^1 = u^3 = 0$

We study the Navier–Stokes equation with the additional condition $u_1^1 = u^3 = 0$. In some cases, solutions are represented in a closed form. In the other cases, the investigated system is reduced to simpler systems of partial differential equations. We study the symmetry properties of these systems and construct classes of their particular solutions.

Проведено дослідження рівнянь Нав'є – Стокса при додатковій умові $u_1^1 = u^3 = 0$. В деяких випадках розв'язки зображені в замкненій формі. В інших випадках досліджувана система зведена до більш простих систем диференціальних рівнянь в частинних похідних (ДРЧП), для яких (після вивчення симетрійних властивостей) побудовані класи часткових розв'язків.

1. Вступ. Для опису еволюції вихрової структури в узагальненій зсувній течії в роботі [1] були використані деякі точні розв'язки рівнянь Нав'є – Стокса (РНС)

$$\bar{u}_t + (\bar{u}\cdot\bar{\nabla})\bar{u} - \Delta\bar{u} + \bar{\nabla}p = \bar{0}, \qquad \operatorname{div}\bar{u} = 0, \tag{1}$$

кожен з яких задовольняє додаткову умову

$$u_1^1 = u_2^2 = u_1^2 = u^3 = 0, \quad p = \text{const}. \tag{2}$$

Тут і в подальшому $\bar{u} = \{u^a\}$ — поле швидкостей рідини, p — тиск, $\bar{x} = \{x_a\}$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_a = \partial/x_a$, $\bar{\nabla} = \{\partial_a\}$, $\Delta = \bar{\nabla}\cdot\bar{\nabla}$ — лапласіан, кінематичний коефіцієнт в'язкості та густину рідини покладемо рівними одиниці. Домовимось також вважати, що індекси a, b змінюються від 1 до 3, індекси i, j — від 1 до 2, по індексах, що повторюються, всюди ведеться підсумовування.

У даній роботі РНС розглядаються з більш слабкою, ніж (2), додатковою умовою

$$u_1^1 = u^3 = 0. \tag{3}$$

Проведено дослідження всієї множини розв'язків РНС, що задовольняють умову (3). Вивчено всі можливі випадки. В деяких з них розв'язки зображені в замкненій формі. В інших випадках досліджувана система зведена до більш простих систем ДРЧП, для яких (після вивчення симетрійних властивостей) побудовані класи часткових розв'язків. Зокрема, одержано формули, в яких розв'язки РНС нелінійно виражаються через розв'язки лінійного рівняння теплопровідності.

***Зауваження* 1.** Додаткова умова (3) є неліївською, тобто її не можна зобразити у вигляді $Q_k u^a = 0$, $Q_k p = 0$, $k = \overline{1, N}$, де $N \leq 3$ і $\langle Q_k, k = \overline{1, N}\rangle$ є підалгеброю максимальної в розумінні Лі алгебри інваріантності РНС (1), що задається базисними елементами

$$\partial_t = \partial/\partial t, \qquad D = 2t\partial_t + x_a\partial_a - u^a\partial_{u^a} - 2p\partial_p,$$

$$J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a + u^a\partial_{u^b} - u^b\partial_{u^a}, \quad a < b,$$

$$R(\bar{m}(t)) = m^a\partial_a + m_t^a\partial_{u^a} - m_{tt}^a x_a\partial_p, \qquad Z(\chi(t)) = \chi\partial_p,$$

де $m^a = m^a(t)$, $\chi = \chi(t)$ — довільні досить гладкі функції (див. [2, 3]). Вичерпне дослідження РНС (1) з ліївськими додатковими умовами виконано в [4].

При вивченні РНС (1) з додатковою умовою (3) необхідно окремо розглянути два випадки: $u^1_2 u^2_1 \neq 0$ та $u^1_2 u^2_1 = 0$.

2. Про рівняння Нав'є – Стокса з додатковою умовою (3) у випадку $u^1_2 u^2_1 \neq 0$. Нехай $u^1_2 u^2_1 \neq 0$. РНС (1) з додатковою умовою (3) еквівалентні системі

$$u^1_t + u^2 u^1_2 - u^1_{22} - u^1_{33} + p_1 = 0, \tag{4}$$

$$u^2_t + u^1 u^2_1 - u^2_{11} - u^2_{33} + p_2 = 0, \tag{5}$$

$$u^1_1 = u^2_2 = u^3 = p_3 = 0. \tag{6}$$

Зауваження 2. Розв'язки системи (4)–(6) будемо шукати з точністю до перетворень еквівалентності, які включають дискретне перетворення

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x}_1 = x_2, \quad \tilde{x}_2 = x_1, \quad \tilde{x}_3 = x_3,$$

$$\tilde{u}^1 = u^2, \quad \tilde{u}^2 = u^1, \quad \tilde{u}^3 = u^3, \quad \tilde{p} = p$$

та неперервні перетворення, що породжуються операторами ∂_t, ∂_{x_3}, $R(m^1, m^2, 0)$, $Z(\chi)$ з алгебри інваріантності системи (4)–(6). Диференціальними наслідками системи (4)–(6) є рівняння

$$(u^1_t + u^2 u^1_2 - u^1_{22} - u^1_{33})_2 = (u^2_t + u^1 u^2_1 - u^2_{11} - u^2_{33})_1, \tag{7}$$

$$u^1_{222} / u^1_2 = u^2_{111} / u^2_1 = h, \tag{8}$$

де $h = h(t, x_3)$ — деяка гладка функція змінних t, x_3, та

$$(u^1_2 u^2_1)_3 = 0. \tag{9}$$

Розглянемо три можливих випадки.

А. $h(t, x_3) > 0$. Нехай $k := h^{1/2}$. Тоді з (8) випливає, що функції u^1, u^2 можна записати у вигляді

$$u^1 = f^1 e^{k^2 t + kx_2} + f^2 e^{k^2 t - kx_2} + f^3,$$

$$u^2 = g^1 e^{k^2 t + kx_1} + g^2 e^{k^2 t - kx_1} + g^3.$$

Тут $f^a = f^a(t, x_3)$, $g^a = g^a(t, x_3)$ — гладкі функції змінних t, x_3 такі, що $(f^1, f^2) \neq (0, 0)$, $(g^1, g^2) \neq (0, 0)$. Оскільки $(u^1_2 u^2_1)_3 = 0$, а функції

$$\varphi^{1ij}(x_1, x_2) = x_1 e^{k(\pm x_1 \pm x_2)}, \quad \varphi^{2ij}(x_1, x_2) = x_2 e^{k(\pm x_1 \pm x_2)},$$

$$\varphi^{3ij}(x_1, x_2) = e^{k(\pm x_1 \pm x_2)}, \quad \varphi^4(x_1, x_2) = 1$$

лінійно незалежні як функції змінних x_1, x_2 (t і x_3 при цьому вважаємо параметрами), то $k_3 k f^i g^j = 0$, а отже, $k_3 = 0$ (у противному разі, якщо $k_3 \neq 0$, то $u^1_2 u^2_1 = 0$). Аналогічно з рівняння (7) випливає, що $k_t = 0$, тобто $k = \text{const}$, причому $k \neq 0$, і

$$Tf^1 + kg^3 f^1 = 0, \quad Tf^2 - kg^3 f^2 = 0, \tag{10}$$

$$Tg^1 + kf^3 g^1 = 0, \quad Tg^2 - kf^3 g^2 = 0, \tag{11}$$

де $T = \partial_t - \partial_{33}$. Продиференціюємо рівняння (4), (5) по x_3 і за допомогою співвідношення (6) одержимо ще такі рівняння для функцій f^a, g^a:

$$(f^i g^j)_3 = 0,$$
$$(Tf^3)_3 = (Tg^3)_3 = 0, \tag{12}$$

або з урахуванням зауваження 2 (тобто розв'язки, для яких $\tilde{f}_3^3 = f_3^3$, $\tilde{g}_3^3 = g_3^3$ вважаємо еквівалентними) покладемо

$$Tf^3 = Tg^3 = 0. \tag{13}$$

Підставимо вирази для u^i в рівняння (4) – (6) і врахуємо умови (10)–(13). Інтегруючи одержану таким чином систему, знаходимо вираз для p:

$$p = -e^{2k^2t}(f^1 e^{kx_2} - f^2 e^{-kx_2})(g^1 e^{k^2t+kx_1} + g^2 e^{k^2t-kx_1}).$$

За умов (10) – (13) можна вважати, що

$$f^1 f^2 g^3 = g^1 g^2 f^3 = 0.$$

Дійсно, нехай, наприклад, $f^1 \neq 0$, $g^1 \neq 0$. Тоді з рівнянь (12) і (13) випливає $g^i = \chi^i(t)/f^1$, тобто $g^2 = \chi(t) g^1$, а тому $2k\chi f^3 = \chi_t$. Звідси або $\chi = g^2 = 0$, або $f^3 = \chi_t/(2k\chi)$, отже, можна покласти $f^3 = 0$ (див. зауваження 2). Аналогічно $f^2 g^3 = 0$.

Нехай $f^1 f^2 \neq 0$, $g^1 g^2 \neq 0$. Тоді $f^3 = g^3 = 0$ і f^i, g^i задовольняють рівняння

$$Tf^i = 0, \quad Tg^i = 0, \quad (f^i g^j)_3 = 0. \tag{14}$$

Внаслідок леми 2

$$f^i = C_{1i} e^{\kappa^2 t + \kappa x_3}, \quad g^i = C_{2i} e^{\kappa^2 t - \kappa x_3}, \tag{15}$$

де C_{ij}, $\kappa = \mathrm{const}$, $C_{ij} \neq 0$, а тому

$$u^1 = e^{(k^2+\kappa^2)t + \kappa x_3}(C_{11} e^{kx_2} + C_{12} e^{-kx_2}),$$
$$u^2 = e^{(k^2+\kappa^2)t - \kappa x_3}(C_{21} e^{kx_1} + C_{22} e^{-kx_1}), \tag{16}$$
$$p = -e^{2(k^2+\kappa^2)t}(C_{11} e^{kx_2} - C_{12} e^{-kx_2})(C_{21} e^{kx_1} - C_{22} e^{-kx_1}).$$

Нехай $g^2 = 0$, $f^1 f^2 \neq 0$. Тоді $g^1 \neq 0$ (інакше $u_2^1 u_1^2 = 0$),

$$g^3 = 0, \quad Tf^a = 0, \quad (f^i g^1)_3 = 0, \quad Tg^1 + kf^3 g^1 = 0.$$

В силу леми 4 $f^i = C_{1i}{}^{\kappa^2 t + \kappa x_3}$, $g^1 = C_{21}{}^{Bt - \kappa x_3}$, де $C_{1i}, C_{21}, B, \kappa = \mathrm{const}$ та C_{1i}, $C_{21} \neq 0$, звідки

$$f^3 = -(kg^1)^{-1} Tg^1 = -k^{-1}(B - \kappa^2).$$

Отже, внаслідок існування перетворення еквівалентності, яке породжується оператором $R(-k^{-1}(B-\kappa^2)t, 0, 0)$, функцію f^3 можна вважати рівною нулю, а тому покладемо $B = \kappa^2$. В результаті одержимо розв'язок вигляду (16), де $C_{22} = 0$. Інші подібні випадки ($g^1 = 0$, $f^1 f^2 \neq 0$; $f^1 = 0$, $g^1 g^2 \neq 0$; $f^2 = 0$, $g^1 g^2 \neq 0$) розглядаються аналогічно.

Нехай $f^1 f^2 = g^1 g^2 = 0$. Без обмеження загальності можна вважати, що $f^1 \neq 0$. Перепозначимо f^1 через f, а ненульову функцію серед функцій g^1, g^2 через g. Тоді

$$Tf + kg^3 f = 0, \quad Tg \pm kf^3 g = 0,$$

$$Tf^3 = 0, \quad Tg^3 = 0, \tag{17}$$
$$(fg)_3 = 0.$$

З рівнянь (17) випливає, що функції f, g задовольняють систему (49), а тому в силу леми 5 маємо три різних сім'ї розв'язків. Кожну з цих сімей можна привести до більш компактного вигляду з допомогою перетворень еквівалентності, породжених операторами ∂_t і $R(m^1, m^2, 0)$ з відповідно підібраними функціями m^i. Вирази для f^3 і g^3 знаходимо за формулами

$$f^3 = -(kg)^{-1}Tg, \quad g^3 = \mp(kf)^{-1}Tf.$$

В результаті отримаємо такі розв'язки РНС (1):

1. $$u^1 = C_1 \exp\left\{A\left(\frac{1}{12}x_3^3 + tx_3\right) + k^2t + kx_2\right\} \pm Ak^{-1}\left(x_3 + A\left(\frac{1}{4}x_3^2 + \frac{3}{2}t\right)^2\right),$$
$$u^2 = C_2 \exp\left\{-A\left(\frac{1}{12}x_3^3 + tx_3\right) + k^2t \pm kx_1\right\} + Ak^{-1}\left(-x_3 + A\left(\frac{1}{4}x_3^2 + \frac{3}{2}t\right)^2\right).$$

2. $$u^1 = C_1 \exp\left\{A\frac{1}{2}x_3^3 + k^2t + kx_2\right\} \pm Ak^{-1}(Ax_3^2 - 1),$$
$$u^2 = C_2 \exp\left\{-A\frac{1}{2}x_3^3 + k^2t \pm kx_1\right\} + Ak^{-1}(Ax_3^2 + 1).$$

3. $$u^1 = C_1 \exp\{(A_1t + A_2)x_3 + k^2t + kx_2\} \pm k^{-1}((A_1t + A_2)^2 + A_1x_3),$$
$$u^2 = C_2 \exp\{-(A_1t + A_2)x_3 + k^2t + kx_1\} + k^{-1}((A_1t + A_2)^2 - A_1x_3).$$

Тут $A, A_i, C_i = \mathrm{const}$, $A \neq 0$, і для всіх сімей розв'язків

$$p = \mp C_1C_2 \exp\{2k^2t + kx_2 \pm kx_1\}.$$

Крім того, якщо в третій сім'ї $A_1 \neq 0$, то за допомогою зсувів по t можна досягти того, що A_2 буде дорівнювати нулеві, а при $A_1 = 0$ розв'язки з цієї сім'ї приводяться до вигляду (16), де $C_{12} = 0$, $C_{21}C_{22} = 0$.

Б. $h(t, x_3) < 0$. Нехай $k := (-h)^{1/2}$. Тоді з рівняння (8) випливає, що функції u^1, u^2 можна записати у вигляді

$$u^1 = f^1e^{-k^2t}\cos kx_2 + f^2e^{-k^2t}\sin kx_2 + f^3,$$
$$u^2 = g^1e^{-k^2t}\cos kx_1 + g^2e^{-k^2t}\sin kx_1 + g^3,$$

де $f^a = f^a(t, x_3)$, $g^a = g^a(t, x_3)$ — деякі гладкі функції змінних t і x_3, $(f^1, f^2) \neq (0, 0)$, $(g^1, g^2) \neq (0, 0)$. Аналогічно підвипадку А з рівнянь (4)–(7), (9) маємо, що $k = \mathrm{const}$,

$$Tf^1 + kg^3f^2 = 0, \quad Tf^2 - kg^3f^1 = 0, \tag{18}$$
$$Tg^1 + kf^3g^2 = 0, \quad Tg^2 - kf^3g^1 = 0, \tag{19}$$
$$(f^ig^j)_3 = 0, \tag{20}$$
$$(Tf^3)_3 = (Tg^3)_3 = 0.$$

За умов (18)–(20) можна вважати, що $f^3 = g^3 = 0$. Дійсно, нехай, наприклад, $f^1 \neq 0$, $g^1 \neq 0$. Тоді з рівнянь (19), (20) випливає $g^i = \chi^i(t)/f^1$, тобто $g^2 =$

$=\chi(t)g^1$, а тому $f^3=\chi_t(1+\chi^2)^{-1}/k$. Аналогічно $g_3^3=0$. Тому з урахуванням зауваження 2 покладемо $f^3=g^3=0$.

Таким чином, функції f^i, g^i задовольняють систему (14), з якої в силу леми 2 випливає, що ці функції мають вигляд (15), а тому

$$u^1 = e^{(\kappa^2-k^2)t+\kappa x_3}(C_{11}\cos kx_2+C_{12}\sin kx_2),$$

$$u^2 = e^{(\kappa^2-k^2)t-\kappa x_3}(C_{21}\cos kx_1+C_{22}\sin kx_1).$$

Після підстановки виразів для функцій u^1, u^2 в рівняння (4) – (6) і інтегрування одержаної таким чином системи знайдемо

$$p = e^{2(\kappa^2-k^2)t}(C_{12}\cos kx_2-C_{11}\sin kx_2)(C_{22}\cos kx_1-C_{21}\sin kx_1).$$

B. $h(t,x_3)=0$. Тоді з рівнянь (8) маємо

$$u^1 = f^3x_2^2+f^2x_2+f^1, \quad u^2 = g^3x_1^2+g^2x_1+g^1,$$

де $f^a=f^a(t,x_3)$, $g^a=g^a(t,x_3)$ — гладкі функції змінних t, x_3, $(f^2,f^3)\neq(0,0)$, $(g^2,g^3)\neq(0,0)$ (інакше $u_2^1u_1^2=0$). Це означає, що права і ліва частини рівняння (7) є поліномами по x_1 і x_2. Збираючи коефіцієнти при степенях x_1 і x_2, для функцій f^a, g^a отримуємо такі рівняння:

$$f^3g^3 = 0, \quad Tg^3 = f^3g^2, \quad Tf^3 = g^3f^2, \tag{21}$$
$$Tf^2+2g^1f^3 = Tg^2+2f^1g^3.$$

З рівнянь (21) випливає, що $f^3=g^3=0$ (інакше $u_2^1u_1^2=0$). Тоді $f^2\neq0$, $g^2\neq0$, причому $Tf^2=Tg^2$. Продиференціюємо рівняння (4), (5) по x_3 і, врахувавши, що $p_3=0$, одержимо ще такі рівняння для функцій f^i, g^i:

$$(Tf^2)_3 = 0, \quad (Tg^2)_3 = 0, \quad (f^2g^2)_3 = 0, \tag{22}$$

$$(Tf^1+f^2g^1)_3 = 0, \quad (Tg^1+g^2f^1)_3 = 0. \tag{23}$$

В силу леми 3 маємо дві різних сім'ї розв'язків системи (22). Якщо $f_3^2=$ $=g_3^2=0$, то з рівняння $Tf^2=Tg^2$ випливає, що $f_t^2=g_t^2$, тобто $f^2=\eta(t)$, $g^2=\eta(t)+C$, де $\eta=\eta(t)$ — деяка гладка функція змінної t, $C=\mathrm{const}$, а рівняння (23) (див. зауваження 2) можна записати у вигляді

$$Tf^1+\eta g^1 = 0, \quad Tg^1+(\eta+C)f^1 = 0. \tag{24}$$

Відповідний розв'язок РНС (1) задається формулами

$$\begin{gathered} u^1 = f^1(t,x_3)+\eta(t)x_2, \quad u^2 = g^1(t,x_3)+(\eta(t)+C)x_2, \\ u^3 = 0, \quad p = -\eta_t(t)x_1x_2-\frac{1}{2}\eta(t)(\eta(t)+C)\left(x_1^2+x_2^2\right), \end{gathered} \tag{25}$$

де функції f^1, g^1 задовольняють систему (24). Локальне перетворення

$$f^1 = \chi^{11}(t)\tilde{f}+\chi^{12}(t)\tilde{g}, \quad g^1 = \chi^{21}(t)\tilde{f}+\chi^{22}(t)\tilde{g},$$

де (χ^{1i},χ^{2i}) — фундаментальна система розв'язків ЗДР

$$\chi_t^1+\eta\chi^2 = 0, \quad \chi_t^2+(\eta+C)\chi^1 = 0,$$

приводить рівняння (24) до двох незачеплених лінійних рівнянь теплопровідності. Тому розв'язок (25) відноситься до розв'язків типу (5.1) або (5.2) з роботи [4].

Якщо функції f^2, g^2 належать другій сім'ї з леми 3, то, інтегруючи рівняння (23) по x_3 і використовуючи для спрощення перетворення еквівалентності, породжені оператором $R(m^1, m^2, 0)$, одержимо такий розв'язок РНС (1):

$$u^1 = C_1 x_2 e^{\kappa^2 t + \kappa x_3} + f(t, x_3), \quad u^2 = C_2 x_1 e^{\kappa^2 t - \kappa x_3} + g(t, x_3),$$
$$u^3 = 0, \quad p = -\frac{1}{2} C_1 C_2 e^{2\kappa^2 t}\left(x_1^2 + x_2^2\right). \tag{26}$$

де κ, $C_i = \text{const}$, $\kappa, C_i \neq 0$, а на функції f, g маємо лінійну однорідну систему ДРЧП

$$Tf + C_1 e^{\kappa^2 t + \kappa x_3} g = 0, \quad Tg + C_2 e^{\kappa^2 t - \kappa x_3} f = 0. \tag{27}$$

Дослідимо симетрійні властивості системи (27) та побудуємо деякі її точні розв'язки.

Теорема 1. *Максимальною в сенсі Лі алгеброю інваріантності системи* (27) *є алгебра, породжена операторами*

$$P^1 = \partial_3 - \kappa g \partial_g, \quad I^1 = f\partial_f + g\partial_g, \quad \hat{f}(t, x_3)\partial_f + \hat{g}(t, x_3)\partial_g,$$

де $\left(\hat{f}, \hat{g}\right)$ *— довільний розв'язок системи* (27).

Зауваження 3. Всі твердження про симетрійні (в розумінні Лі) властивості ДРЧП доводяться з допомогою стандартного алгоритму Лі.

Точний розв'язок системи (27), побудований з допомогою редукції по одновимірній алгебрі $\langle P^1 + a\kappa I^1 \rangle$, має вигляд

$$f = e^{a\kappa x_3 + (a^2 - a + 1)\kappa^2 t}\left(C_3 J_{a-1}(\omega) + C_4 Y_{a-1}(\omega)\right),$$
$$g = (-C_1 C_2)^{1/2} C_1^{-1} e^{(a-1)\kappa x_3 + (a^2 - a + 1)\kappa^2 t}\left(C_3 J_a(\omega) + C_4 Y_a(\omega)\right), \tag{28}$$

де $\omega = \kappa^{-2}(-C_1 C_2)^{1/2} e^{\kappa^2 t}$, якщо $C_1 C_2 < 0$, або

$$f = e^{a\kappa x_3 + (a^2 - a + 1)\kappa^2 t}\left(C_3 I_{a-1}(\omega) + C_4 K_{a-1}(\omega)\right),$$
$$g = (C_1 C_2)^{1/2} C_1^{-1} e^{(a-1)\kappa x_3 + (a^2 - a + 1)\kappa^2 t}\left(C_3 I_a(\omega) + C_4 K_a(\omega)\right), \tag{29}$$

де $\omega = \kappa^{-2}(C_1 C_2)^{1/2} e^{\kappa^2 t}$, якщо $C_1 C_2 > 0$. Тут J_a, Y_a — функції Бесселя дійсної змінної, I_a, K_a — функції Бесселя уявної змінної.

Підставляючи вирази (28) (або (29)) для f, g в формули (26), одержуємо розв'язок РНС (1) у замкненій формі.

3. Про рівняння Нав'є – Стокса з додатковою умовою (3) у випадку $u_2^1 u_1^2 = 0$. Нехай $u_1^2 = 0$ (достатньо розглянути тільки цей підвипадок, оскільки випадок $u_2^1 = 0$ зводиться до нього дискретним перетворенням з зауваження 2). Тоді з рівнянь (4) – (6) випливає, що $p_{11} = p_{12} = p_{22} = 0$, тобто $p = \psi(t) + \chi^i(t) x_i$, а тому перетвореннями, що породжуються операторами $R(m^1, m^2, 0)$, $Z(\eta)$ (див. зауваження 2), функцію p можна зробити рівною нулю. В результаті система (4) – (6) набуде вигляду

$$u_t^1 + u^2 u_2^1 - u_{22}^1 - u_{33}^1 = 0, \tag{30}$$

$$u_t^2 - u_{33}^2 = 0, \qquad u_2^2 = 0, \tag{31}$$
$$u^3 = p = 0,$$

де $u^i = u^i(t, x_2, x_3)$.

Зауваження 4. Легко помітити, що система (30), (31) є лінійною по u^1. Тому якщо $\left(\underset{(1)}{u}{}^1, u^2\right)$, $\left(\underset{(2)}{u}{}^1, u^2\right)$ є розв'язками системи (30), (31), то

$$(u^1, u^2) = \left(\underset{(1)}{u}{}^1 + \underset{(2)}{u}{}^1, u^2\right)$$

також буде її розв'язком.

Дослідимо симетрійні властивості системи (30), (31) та побудуємо деякі сім'ї її точних розв'язків.

Теорема 2. *Максимальна в сенсі Лі алгебра інваріантності системи* (30), (31) *породжується операторами*

$$\partial_1, \ \ \partial_2, \ \ \partial_3, \ \ G^2 = t\partial_2 + \partial_{u^2}, \qquad S^1 = (tu^2 - x_2)\,\partial_{u^1}, \quad u^2\partial_{u^1},$$
$$D^2 = 2t\partial_t + x_2\partial_2 + x_3\partial_3 - u^2\partial_{u^2}, \qquad I^2 = u^1\partial_{u^1}, \qquad f(t, x_3)\partial_{u^1},$$

де f — довільний розв'язок рівняння $Tf = 0$.

З теореми 2 випливає, що

$$\left(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2\right) = \left(u^1 + \varepsilon(tu^2 - x_2) + f(t, x_3), u^2\right),$$

де (u^1, u^2) — розв'язок системи (30), (31), $Tf = 0$, також є її розв'язком.

Позначимо через ${}_3f$ стандартний перший інтеграл звичайного диференціального рівняння (ЗДР)

$$f_3\,dt + f\,dx_3 = 0,$$

який виражається формулою

$${}_3f(t, x_3) = \int\limits_{\xi_0}^{x_3} f(t, \xi)\,d\xi + \int\limits_{\tau_0}^{t} f_3(t, \xi_0)\,d\tau, \quad \xi_0, \ \tau_0 = \text{const},$$

${}_{33}f := {}_3({}_3f)$, і т.д. Якщо $Tf = 0$, то $T({}_3f) = 0$. Тому систему (30), (31) можна переписати у вигляді

$$u_t^1 + v_3u_2^1 - u_{22}^1 - u_{33}^1 = 0, \tag{32}$$
$$v_t - v_{33} = 0, \qquad v_2 = 0, \tag{33}$$

де $v = {}_3u^2$ (а отже, $u^2 = v_3$).

Теорема 3. *Максимальна в сенсі Лі алгебра інваріантності системи* (32), (33) *породжується операторами*

$$\partial_1, \ \ \partial_2, \ \ \partial_3, \ \ G^3 = t\partial_2 + x_3\partial_v, \qquad D^3 = 2t\partial_t + x_2\partial_2 + x_3\partial_3,$$
$$I^2 = u^1\partial_{u^1}, \qquad \partial_v, \ \ f(t, x_3)\partial_{u^1}, \qquad (g(t, x_3)v + 2g_3(t, x_3)x_2)\,\partial_{u^1},$$

де f, g — довільні розв'язки рівнянь $Tf = 0$, $Tg = 0$.

З теореми 3 випливає, що

$$\left(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2\right) = \left(u^1 + g(t, x_3)({}_3u^2) + 2g_3(t, x_3)x_2, u^2\right),$$

де (u^1, u^2) — розв'язок системи (30), (31), $Tg = 0$, також є її розв'язком.

Запис системи (30), (31) у вигляді

$$u^1_t + v_{33}u^1_2 - u^1_{22} - u^1_{33} = 0, \tag{34}$$

$$v_t - v_{33} = 0, \quad v_2 = 0, \tag{35}$$

де $v = {}_{33}u^2$ (тобто $u^2 = v_{33}$) не веде до розширення або суттєвої зміни її лієвської симетрії. Алгеброю інваріантності системи (34), (35) є алгебра

$$\Big\langle \partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ G^4 = t\partial_2 + \Big(t + \frac{1}{2}x_3^2\Big)\partial_v,\ I^2 = u^1\partial_{u^1},\ \partial_v,$$

$$x_3\partial_v,\ D^2 = 2t\partial_t + x_2\partial_2 + x_3\partial_3 + v\partial_v,\ f(t, x_3)\partial_{u^1} \Big\rangle,$$

де f — довільний розв'язок рівняння $Tf = 0$.

Наслідки з теорем 2, 3 наводять на думку, що система (30), (31) має допускати широкий клас перетворень загального вигляду

$$\tilde{u}^1 = u^1 + \Sigma(t, x_2 x_3, u, {}_{(1)}u, {}_{(2)}u, \ldots, {}_{(N)}u), \qquad \tilde{u}^2 = u,$$

де $u := u^2$, ${}_{(1)}u = {}_3u$, ${}_{(2)}u = {}_{33}u$, $\ldots$, $N \geq 1$. Обмежимось тут випадком, коли $N = 2$.

Теорема 4. *Система* (30), (31) *інваріантна відносно перетворень вигляду*

$$\tilde{u}^1 = u^1 + \Sigma(t, x_2 x_3, u, {}_3u, {}_{33}u), \qquad \tilde{u}^2 = u, \tag{36}$$

де $u := u^2$, *тоді і тільки тоді, коли*

$$\Sigma = C_1\Big(tx_2u + \frac{1}{2}t({}_3u)^2 + \frac{1}{4}({}_{33}u)^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - t\Big) + C_2\Big(x_2u + \frac{1}{2}({}_3u)^2\Big) +$$

$$+ C_3(x_3({}_{33}u)({}_3u) + 2x_2x_3({}_3u) - ({}_{33}u)^2 + 2x_2({}_{33}u) + 2x_2^2 + 4t) +$$

$$+ C_4({}_{33}u + 2x_2)({}_3u) + C_5(4t^2u + 4tx_3)({}_3u) + (x_3^2 + 2t)({}_{33}u) +$$

$$+ C_6(tu - x_2) + C_7u + C_8\Big(t({}_3u) + \frac{1}{2}x_3({}_{33}u)\Big) + C_9({}_{33}u) +$$

$$+ f^1(t, x_3)({}_3u) + 2x_2f^1_3(t, x_3) + f^2(t, x_3),$$

де $Tf^i = 0$, $C_n = \mathrm{const}$, $n = \overline{1, 9}$.

Доведення. Підставимо вираз (36) для $\tilde{u}^1$ у рівняння (30). Враховуючи (31), одержимо

$$\Sigma_0 - \Sigma_{22} - \Sigma_{33} + u\Sigma_2 - 2\Sigma_{3u}u_3 - 2\Sigma_{3({}_3u)}u - 2\Sigma_{3({}_{33}u)}({}_3u) -$$

$$- 2\Sigma_{u({}_3u)}u_3u - 2\Sigma_{u({}_{33}u)}u_3({}_3u) - 2\Sigma_{({}_3u)({}_{33}u)}u({}_3u) -$$

$$- \Sigma_{uu}u_3u_3 - \Sigma_{({}_3u)({}_3u)}(u)^2 - \Sigma_{({}_{33}u)({}_{33}u)}({}_3u)^2 = 0. \tag{37}$$

Розщеплення умови (37) по похідній u_3 дає такі визначальні рівняння:

$$\Sigma_{uu} = \Sigma_{u({}_3u)} = \Sigma_{u({}_{33}u)} = \Sigma_{3u} = 0,$$

а тому функція Σ має вигляд

$$\Sigma = \Sigma^1(t, x_2)u + \Sigma^2(t, x_2, x_3, {}_3u, {}_{33}u). \tag{38}$$

Оскільки функції Σ^1, Σ^2 не залежать від змінної u, то, підставляючи вираз (38) для Σ в умову (37) і розщеплюючи її по змінній u, одержуємо визначальні рівняння на функції Σ^1, Σ^2. Продовжуючи цю процедуру, в результаті прийдемо до твердження теореми 4.

Зафіксуємо довільний розв'язок u^2 рівнянь (31). Розв'язки рівняння (30) шукаємо у вигляді

$$u^1 = \sum_{m=0}^{M} g^m(t, x_3) x_2^m, \tag{39}$$

де функції g^m, $m = \overline{0, M}$, задовольняють систему ДРЧП

$$\begin{gathered} g_t^m - g_{33}^m + (m+1)u^2 g^{m+1} - (m+1)(m+2)g^{m+2} = 0, \quad m = \overline{0, M}, \\ g^{M+1} = g^{M+2} = 0. \end{gathered} \tag{40}$$

Кожне рівняння в системі (40) є неоднорідним лінійним одновимірним рівнянням теплопровідності (неоднорідним ЛОРТ) відносно функції g^m, якщо функції g^{m+1}, g^{m+2} вже відомі. Тому інтегрування системи (40), якщо послідовно розв'язувати її, починаючи з останнього рівняння $(m = M)$, зведеться до інтегрування M неоднорідних ЛОРТ. Часткові розв'язки цих рівнянь можна шукати як згортку джерела з фундаментальним розв'язком ЛОРТ, але тоді отримаємо вирази для функцій g^m, $m = \overline{0, M}$, через кратні інтеграли. В деяких випадках цього вдається уникнути, або фіксуючи M — степінь полінома (39) по x_2, або конкретизуючи вигляд функції u^2. Так, для $M = 0$ та $M = 1$ довільний розв'язок системи (40) можна виразити через похідні розв'язків (однорідного) ЛОРТ. Для $M = 2$ знайдені часткові розв'язки системи (40), що виражаються через похідні розв'язків ЛОРТ. В результаті одержимо такі розв'язки РНС (1):

1. $u^1 = f^1$, $u^2 = f^2$, $u^3 = p = 0$ $(M = 0)$.
2. $u^1 = f_3^2 x_2 + f^3 + \dfrac{1}{2} f^1 f^2$, $u^2 = f_3^1$, $u^3 = p = 0$ $(M = 1)$.

Тут і нижче $f^k = f^k(t, x_3)$, $k = \overline{1, 4}$, — довільні розв'язки ЛОРТ, тобто $f_t^k = f_{33}^k$, $f_{(n)} = \partial^n f / \partial x_3^n$, $C_1, C_2 = \mathrm{const}$, $P^N = P^N(t, x_3)$ — поліном теплопровідності N-го порядку.

3.
$$\begin{gathered} u^1 = \left(C_1 f_{(N+3)}^1 + P_{(1)}^N\right) x_2^2 + \left(f_3^2 + C_1 f_{(N+1)}^1 f_{(N+2)}^1 + f_{(N+1)}^1 P^N\right) x_2 + \\ + f^3 + \frac{1}{2} f_{(N+1)}^1 f^2 - \left(C_1 f_{(N+2)}^1 + P^N\right) x_3 + C_1 \left(f_{(N+1)}^1\right)^3 / 6 + \\ + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \left(f_{(N+1-n)}^1 f_{(N-n)}^1\right)_{(n)} P_{(n)}^N, \\ u^2 = f_{(N+2)}^1, \quad u^2 = p = 0 \ (M = 2). \end{gathered}$$

4.
$$\begin{gathered} u^1 = f_{(N+2)}^1 x_2^2 + \left[f_3^2 + P_{(N+1)}^{2N+2} f_{(N+1)}^1\right] x_2 + f^3 + \frac{1}{2} P_{(N+1)}^{2N+2} f^2 - \\ - x_3 f_{(N+1)}^1 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \left(P_{(N-n)}^{2N+2} f_{(N-n)}^1\right)_{(n)} P_{(N+2+n)}^{2N+2}, \\ u^2 = P_{(N+2+n)}^{2N+2}, \quad u^3 = p = 0 \ (M = 2). \end{gathered}$$

Деякі розв'язки з наведених сімей отримані в [1].

Лема 1. *Якщо $f = f(t, x_3)$ — розв'язок ЛОРТ, тобто $Tf = 0$, то функція*

$$g = g(t, x_3) = \sum_{l=0}^{m} \frac{n!}{(n+l+1)!} t^{n+l+1} \left\{\partial_{33}^l, x_3^m\right\} f,$$

де

$$\left\{\partial_{33}^0, x_3^m\right\} = x_3^m, \quad \left\{\partial_{33}^{l+1}, x_3^m\right\} = \left[\partial_{33}, \left\{\partial_{33}^l, x_3^m\right\}\right], \quad \partial_{33} = \partial^2 / \partial x_3 \partial x_3,$$

є частковим розв'язком неоднорідного ЛОРТ

$$g_t - g_{33} = t^n x_3^m f(t, x_3).$$

В силу леми 1 загальний розв'язок системи (40) при $u^2 = P^N(t, x_3)$ для довільного $M \in \mathbb{N}$ виражається через похідні розв'язків ЛОРТ.

Розв'язки рівняння (30) можна також шукати у вигляді

$$u^1 = e^{a^2 t + a x_2} \sum_{m=0}^{M} g^m(t, x_3)\, x_2^m, \tag{41}$$

де $a \neq 0$. Після підстановки виразу (41) в рівняння (30) одержимо таку систему ДРЧП відносно функцій g^m, $m = \overline{0, M}$:

$$g_t^m - g_{33}^m + a u^2 g^m + (m+1)(u^2 - 2a) g^{m+1} - (m+1)(m+2) g^{m+2} = 0,$$

$$m = \overline{0, M}, \quad g^{M+1} = g^{M+2} = 0.$$

Розглянемо два часткових випадки. Нехай $M = 0$, тобто

$$u^1 = g^0(t, x_3)\, e^{a^2 t + a x_2},$$

де функція g^0 задовольняє рівняння

$$g_t^0 - g_{33}^0 + a u^2 g^0 = 0. \tag{42}$$

Систему (31), (42) для зручності перепишемо у вигляді

$$f_t^1 - f_{33}^1 + a f^2 f^1 = 0, \qquad f_t^2 - f_{33}^2 = 0, \tag{43}$$

де $f^i = f^i(t, x_3)$, $a \neq 0$.

Теорема 5. *Максимальною в сенсі Лі алгеброю інваріантності системи* (43) *є алгебра*

$$\Big\langle \partial_t,\ \partial_3,\ D^4 = 2t\partial_t + x_3\partial_3 - 2f^2\partial_{f^2},\ f^1\partial_{f^1},$$
$$S^2 = a t f^1 \partial_{f^1} - \partial_{f^2} \Big\rangle. \tag{44}$$

Точні розв'язки системи (43) можна побудувати, редукуючи її по нееквівалентних одновимірних підалгебрах

$$\big\langle D^4 + a_1 f^1 \partial_{f^1} \big\rangle, \quad \langle \partial_t + a_2 \partial_3 + a_1 S^2 \rangle, \quad \langle \partial_3 + a_2 S^2 \rangle, \quad \big\langle \partial_3 + a_3 f^1 \partial_{f^1} \big\rangle,$$

де $a_1 \in \mathbb{R}$, $a_2 \in \{-1;\ 0;\ 1\}$, $a_3 \in \{-1;\ 1\}$, алгебри (44), але на цьому зупинятися не будемо.

Нехай $M = 1$. Тоді

$$u^1 = [g^1(t, x_3) x_2 + g^0(t, x_3)]\, e^{a^2 t + a x_2},$$

де функції g^0, g^1 задовольняють рівняння

$$g_t^1 - g_{33}^1 + a u^2 g^1 = 0, \quad g_t^0 - g_{33}^0 + a u^2 g^0 + (u^2 - 2a) g^1 = 0.$$

Якщо $u_3^2 = b u^2$, де $b \neq 0$, тобто $u^2 = C e^{b^2 t + b x_3}$, $C = \text{const}$, то

$$g^0 = g + 2 a t g^1 + \frac{1}{ab} g_3^1,$$

де на функцію $g = g(t, x_3)$ маємо таке саме рівняння, як і на функцію g^1. В результаті одержимо розв'язок РНС (1)

$$u^1 = \left[g^1(t, x_3)(x_2 + 2at) + \frac{1}{ab} g_3^1(t, x_3) + g(t, x_3)\right] e^{a^2 t + ax_2},$$

$$u^2 = C e^{b^2 t + bx_3}, \quad u^3 = p = 0, \tag{45}$$

де функції g, g^1 задовольняють рівняння

$$f_t - f_{33} + a C e^{b^2 t + bx_3} f = 0. \tag{46}$$

Теорема 6. *Максимальною в сенсі Лі алгеброю інваріантності рівняння* (46) *є алгебра*

$$\left\langle \partial_t - b\partial_3, \; f\partial_f, \; \tilde{f}(t, x_3)\partial_f \right\rangle, \tag{47}$$

де $\tilde{f}$ *— довільний розв'язок рівняння* (46).

Редукцією по одновимірній підалгебрі $\langle \partial_t - b\partial_3 + a_1 f \partial_f \rangle$ алгебри (47) побудуємо такий розв'язок рівняння (46):

$$f = e^{a_1 t} \psi(\omega), \tag{48}$$

де

$$\psi = e^{\omega/2}\left(C_1 I_\nu\left(2\tilde{C}^{1/2} e^{\omega/2}\right) + C_2 K_\nu\left(2\tilde{C}^{1/2} e^{\omega/2}\right)\right), \text{ якщо } \tilde{C} > 0,$$

$$\psi = e^{\omega/2}\left(C_1 J_\nu\left(2(-\tilde{C})^{1/2} e^{\omega/2}\right) + C_2 Y_\nu\left(2(-\tilde{C})^{1/2} e^{\omega/2}\right)\right), \text{ якщо } \tilde{C} < 0,$$

$$\omega = b^2 t + b x_3, \quad \tilde{C} = ab^{-2}C, \quad \nu = (1 + 4ab^{-2})^{1/2}.$$

Тут J_ν, Y_ν — функції Бесселя дійсної змінної, I_ν, K_ν — функції Бесселя уявної змінної.

Підставивши вирази типу (48) для функцій g і g^1 в формулу (45), отримаємо розв'язок РНС (1) в замкненій формі.

4. Деякі допоміжні твердження. Всюди в цьому пункті $x_3 = x$, $f = f(t, x)$, $g = g(t, x)$, $T := \partial_t - \partial_{xx}$, $t, x \in \mathbb{R}$.

Лема 2. *Довільний розв'язок системи*

$$Tf = 0, \quad Tg = 0, \quad (fg)_x = 0$$

при умові $f \neq 0$, $g \neq 0$ *має вигляд*

$$f = C_1 e^{\kappa^2 t + \kappa x}, \quad g = C_2 e^{\kappa^2 t - \kappa x},$$

де C_i, κ *— деякі константи.*

Лема 3. *Довільний розв'язок системи*

$$(Tf)_x = 0, \quad (Tg)_x = 0, \quad (fg)_x = 0,$$

у якого $f \neq 0$, $g \neq 0$, *належить одній з наступних сімей:*

1) $f = f(t)$, $g = g(t)$;

2) $f = C_1 e^{\kappa^2 t + \kappa x}$, $g = C_2 e^{\kappa^2 t - \kappa x}$, *де* C_i, κ *— деякі константи,* $\kappa \neq 0$.

Лема 4. *Довільний розв'язок системи*

$$Tf = 0, \quad T(g^{-1} Tg) = 0, \quad (fg)_x = 0$$

при умові $f \neq 0$, $g \neq 0$ *має вигляд*

$$f = C_1 e^{\kappa^2 t + \kappa x}, \quad g = C_2 e^{Bt - \kappa x},$$

де C_i, B, κ *— деякі константи.*

Лема 5. *Довільний розв'язок системи*

$$T(f^{-1}Tf) = 0, \quad T(g^{-1}Tg) = 0, \quad (fg)_x = 0, \tag{49}$$

у якого $f \neq 0$, $g \neq 0$, *з точністю до зсувів відносно незалежних змінних належить одній з наступних сімей:*

1) $f = C_1 \exp\left\{A\left(\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{2}tx\right) + \frac{1}{2}A^2t^3 + B_1 t\right\}$,

$g = C_2 \exp\left\{-A\left(\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{2}tx\right) + \frac{1}{2}A^2t^3 + B_2 t\right\}$;

2) $f = C_1 \exp\left\{\frac{1}{2}Ax^2 - A^2t^2 + B_1 t\right\}$, $\quad g = C_2 \exp\left\{-\frac{1}{2}Ax^2 - A^2t^2 + B_2 t\right\}$;

3) $f = C_1 \exp\left\{\left(A_1 t + A_2\right)x + \frac{1}{3}A_1^2t^3 + A_1A_2t^2 + B_1 t\right\}$,

$g = C_2 \exp\left\{-\left(A_1 t + A_2\right)x + \frac{1}{3}A_1^2t^3 + A_1A_2t^2 + B_2 t\right\}$.

Тут A, A_i, B_i, $C_i = \text{const}$, $A \neq 0$

При доведенні леми 5 була використана система аналітичних обчислень REDUCE.

1. *Брутян М. А., Крапивский П. Л.* Точное решение уравнений Навье – Стокса, описывающее эволюцию вихревой структуры в обощенном сдвиговом течении // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1992. – **32**, № 2. – С. 326–329.
2. *Данилов Ю. А.,* Групповые свойства уравнений Максвелла и Навье – Стокса. – М., 1967. – 15 с. – (Препринт / АН СССР. Ин-т атом. энергии им. И. В. Курчатова).
3. *Бытев В. О.* Групповые свойства уравнений Навье – Стокса // Численные методы механики сплошной среды. – 1972. – **3**, № 4. – С. 13–17.
4. *Fushchych W. I., Popowych R. O.* Symmetry reduction and exact solutions of the Navier – Stokes equations // J. Nonlinear Math. Phys. – 1995. – **1**, № 1, 2 – P. 75–113, 158–188.

Одержано 06.06.95