УДК 517.983

Т. І. Звоздецький, С. С. Лінчук (Чернівец. ун-т)

# УЗАГАЛЬНЕННЯ ЗГОРТКИ БЕРГА–ДІМОВСЬКОГО В ПРОСТОРАХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

In the space $\mathcal{H}(G)$ of functions analytic in a $\rho$-convex region $G$ equipped with the topology of compact convergence, we construct a convolution for the operator $J_\rho + L$, where $J_\rho$ is the operator of generalized Gel'fond–Leont'ev integration and $L$ is a linear continuous functional on $\mathcal{H}(G)$. This convolution is a generalization of the well-known Berg–Dimovskii convolution. We describe the commutant of the operator $J_\rho + L$ in $\mathcal{H}(G)$ and obtain the representation of the coefficient multipliers of expansions of analytic functions in the system of Mittag–Leffler functions.

У просторі $\mathcal{H}(G)$ аналітичних в $\rho$-опуклій області $G$ функцій, наділеному топологією компактної збіжності, побудовано згортку для оператора $J_\rho + L$, де $J_\rho$ — узагальнене інтегрування Гельфонда–Леонтьєва, а $L$ — лінійний неперервний функціонал на $\mathcal{H}(G)$. Ця згортка узагальнює відому згортку Берга–Дімовського. Описано також комутант оператора $J_\rho + L$ в $\mathcal{H}(G)$ і знайдено зображення коефіцієнтних мультиплікаторів розкладів аналітичних функцій в ряди за системою функцій Міттаг–Лефлера.

Класичні згортки відіграють важливу роль у теорії розподілів, гармонічному аналізі та операційному численні. Але задача відшукання нових згорток досліджена не повністю. Тому важливо розробити методи розв'язування цієї задачі в конкретних функціональних просторах.

Поняття згортки для лінійного оператора $T$, що діє в лінійному просторі $X$, введене І. Х. Дімовським (див., наприклад, [1]). Білінійна, комутативна та асоціативна операція $*: X \times X \to X$ називається згорткою для $T$ на $X$, якщо

$$T(f*g) = (Tf)*g \quad \forall f, g \in X. \tag{1}$$

Довільний лінійний оператор $T$, що діє в $X$ і задовольняє (1), називається мультиплікатором згортки $*$. Якщо $X$ — топологічний векторний простір, то розглядаються неперервні згортки.

В працях Л. Берга [2] та І. Х. Дімовського [3] побудовано згортку в класичних функціональних просторах для оператора $T = J + L$, де $J$ — оператор звичайного інтегрування, а $L$ — фіксований лінійний неперервний функціонал, що діє у відповідному просторі. Ця згортка називається згорткою Берга–Дімовського. В [1] вивчені деякі властивості згортки Берга–Дімовського, а також за її допомогою одержано зображення коефіцієнтних мультиплікаторів розкладів у ряди Діріхле в різних функціональних просторах.

У даній статті побудовано згортку для оператора $T = J_\rho + L$ в просторах аналітичних функцій ($J_\rho$ — оператор узагальненого інтегрування Гельфонда–Леонтьєва [4]). Для цього використана загальна схема розв'язування подібних задач, запропонована в [5]. Побудована нами згортка узагальнює класичну згортку Берга–Дімовського.

Нехай $G$ — довільна область комплексної площини, зіркова відносно точки $0$. Через $\mathcal{H}(G)$ позначимо простір усіх аналітичних в області $G$ функцій, наділених топологією компактної збіжності [6], а символом $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ — множину всіх лінійних неперервних операторів, що діють у просторі $\mathcal{H}(G)$. Нехай $\mathcal{H}'(G)$ — простір усіх лінійних неперервних функціоналів на $\mathcal{H}(G)$. Для додатної сталої $\rho$ через $J_\rho$ позначимо оператор узагальненого інтегрування Гельфонда–Леонтьєва, який неперервно діє в $\mathcal{H}(G)$ за правилом

$$(J_\rho f)(z) = z\,[\Gamma(1/\rho)]^{-1}\int_0^1 (1-t)^{1/\rho-1} f(zt^{1/\rho})\,dt.$$

Зафіксуємо довільний функціонал $L \in \mathcal{H}'(G)$ і опишемо спочатку комутант оператора $J_\rho + L$ в $\mathcal{H}(G)$, тобто знайдемо зображення всіх операторів $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, які задовольняють рівність

$$T(J_\rho + L) = (J_\rho + L)T. \tag{2}$$

Розглянемо функцію Міттаг–Лефлера [7]

$$E_\rho(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n/\rho + 1)}.$$

Оскільки система $\{E_\rho(\lambda z) \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$ є повною в $\mathcal{H}(G)$, то кожному оператору $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ відповідає характеристична функція $t(\lambda, z) = T[E_\rho(\lambda z)]$, яка є цілою відносно $\lambda$ і аналітичною відносно $z$ в $G$, причому різним операторам відповідають різні характеристичні функції. Аналогічно цілу функцію $l(\lambda) = L(E_\rho(\lambda z))$ назвемо характеристичною для функціоналу $L$.

Нехай оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ переставний з оператором $J_\rho + L$. Подіявши правою і лівою частинами рівності (2) на функцію $E_\rho(\lambda z)$, одержимо рівняння для характеристичної функції $t(\lambda, z)$ оператора $T$:

$$t(\lambda, z) - \lambda J_\rho[t(\lambda, z)] = \lambda l_1(\lambda) + (1 - \lambda l(\lambda))\,\varphi(z), \tag{3}$$

де $l_1(\lambda) = L(t(\lambda, z))$, а $\varphi(z) = T1$ (при цьому потрібно врахувати, що

$$\lambda J_\rho[E_\rho(\lambda z)] = E_\rho(\lambda z) - 1).$$

Оскільки

$$(E - \lambda J_\rho)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k J_\rho^k,$$

де $E$ — тотожний оператор, а $\lambda \in \mathbb{C}$, то з (3) одержуємо

$$t(\lambda, z) = (1 - \lambda l(\lambda)) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (J_\rho^k \varphi)(z) + \lambda l_1(\lambda) E_\rho(\lambda z),$$

причому ряд у правій частині цієї рівності для кожного $\lambda \in \mathbb{C}$ збігається за топологією простору $\mathcal{H}(G)$. Подіявши на обидві частини останньої рівності функціоналом $L$, одержимо

$$l_1(\lambda) = \underset{\zeta}{L}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (J_\rho^k \varphi)(\zeta)\right].$$

Таким чином, при $\lambda \in \mathbb{C}$ і $z \in G$

$$t(\lambda, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (J_\rho^k \varphi)(z) -$$

$$- \underset{\zeta}{L}\left[\lambda E_\rho(\lambda\zeta) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (J_\rho^k \varphi)(z) - \lambda E_\rho(\lambda z) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (J_\rho^k \varphi)(\zeta)\right].$$

Скористаємося далі тим, що оператор узагальненого диференціювання Гельфонда–Леонтьєва $D_\rho$, який на елементах повної в $\mathcal{H}(G)$ системи $\{E_\rho(\lambda z) \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$ визначається співвідношенням $D_\rho[E_\rho(\lambda z)] = \lambda E_\rho(\lambda z)$, можна продовжити до оператора $D_\rho$, який лінійно і неперервно діятиме в $\mathcal{H}(G)$ [8]. Позначимо через $\Lambda$ функціонал із $\mathcal{H}'(G)$, який діє за правилом $\Lambda(f(\zeta)) = f(0) - L((D_\rho f)(\zeta))$. Тоді функцію $t(\lambda, z)$ при $\lambda \in \mathbb{C}$ і $z \in G$ можна зобразити у вигляді

$$t(\lambda, z) = \underset{z}{D_\rho} \underset{\zeta}{\Lambda} [t_1(\lambda, z, \zeta)], \tag{4}$$

де

$$t_1(\lambda, z, \zeta) = E_\rho(\lambda\zeta) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (J_\rho^{k+1} \varphi)(z) - E_\rho(\lambda z) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (J_\rho^{k+1} \varphi)(\zeta). \tag{5}$$

Таким чином, справедлива наступна лема.

**Лема 1.** *Якщо оператор* $T \in L(\mathcal{H}(G))$ *переставний з оператором* $J_\rho + L$, *то його характеристичну функцію* $t(\lambda, z)$ *можна подати у вигляді* (4), (5), *де* $\varphi(z) = T1$.

Для відновлення дії оператора $T$ на довільну функцію з простору $\mathcal{H}(G)$ за його характеристичною функцією $t(\lambda, z)$ нам потрібно перетворити праву частину (4).

Наслідуючи [9], назвемо область $G \subset \mathbb{C}$ $\rho$-опуклою, якщо існує послідовність $\rho$-опуклих компактів, яка вичерпує область $G$ зсередини [7, с. 333–334]. Надалі без додаткових пояснень будемо використовувати позначення та властивості елементарних $\rho$-опуклих множин та узагальненого перетворення Бореля $B$, які викладені в [7]. Позначимо

$$g(\tau, \lambda, z, \zeta) = [E_\rho(\lambda z) E_\rho(\zeta\tau) - E_\rho(z\tau) E_\rho(\lambda\zeta)] / (\lambda - \tau)$$

і вивчимо властивості узагальненого перетворення Бореля цієї функції.

**Лема 2.** *Для довільного $\rho$-опуклого компакта $M$ функція*

$$h_1(\tau, \lambda, z, \zeta) = \underset{\tau}{B} [g(\tau, \lambda, z, \zeta)]$$

*є аналітичною на множині* $CM \times \mathbb{C} \times \mathring{M} \times \mathring{M}$.

*Доведення.* Нехай $M$ — деякий $\rho$-опуклий компакт. Тоді

$$M = \bigcap_{i \in I} \overline{D_\rho^*(\theta_i; \nu_i)},$$

де $I \subset \mathbb{R}$ — деяка сім'я індексів, а $\overline{D_\rho^*(\theta_i; \nu_i)}$ — замкнені елементарні $\rho$-опуклі області. Для доведення аналітичності функції $h_1(\tau, \lambda, z, \zeta)$ відносно змінної $\tau$ досить показати, що для $z, \zeta \in \overline{D_\rho^*(\theta_0; \nu_0)}$ і $\lambda \in \mathbb{C}$ узагальнене перетворення Бореля функції $g(\tau) = g(\tau, \lambda, z, \zeta)$ аналітично продовжується на множину $D_\rho(\theta_0; \nu_0) = \mathbb{C} \setminus \overline{D_\rho^*(\theta_0; \nu_0)}$. Нехай $h(\theta; g)$ — індикатор зростання цілої функції $g(\tau)$ при порядкові $\rho$. Безпосередніми підрахунками легко переконатися в тому, що

$$h(\theta; g) = \max\{|z|^\rho h(\theta + \operatorname{Arg} z; E_\rho);\ |\zeta|^\rho h(\theta + \operatorname{Arg}\zeta; E_\rho)\}.$$

Використовуючи формулу для індикатора функції Міттаг–Лефлера [7, с. 329], його невід'ємність, а також те, що $z$ і $\zeta \in \overline{D^*_\rho(\theta_0;\nu_0)}$, одержуємо, що $h(-\theta_0;g) \le \nu_0$, а отже, і $D_\rho(\theta_0;\nu_0) \subset D_\rho(\theta_0;h(-\theta_0;g))$. Залишається скористатися тим, що за теоремою 6.5 з [7] функція $(Bg)(\tau)$ аналітично продовжується в область $D_\rho(\theta_0;h(-\theta_0;g))$. Зафіксуємо далі $\tau \in CM$, $\lambda \in \mathbb{C}$ і покажемо, що $h_1(z,\zeta) \equiv h_1(\tau,\lambda,z,\zeta)$ є аналітичною відносно $z$ і $\zeta$ на $\mathring{M} \times \mathring{M}$. З доведення першої частини леми з урахуванням теореми 6.5 з [7] випливає, що існує множина $D^*_\rho(\theta_0;\nu_0)$ така, що $M \subset \overline{D^*_\rho(\theta_0;\nu_0)}$, $\tau \in$ $\in D_\rho(\theta_0;\nu_0)$, і для $z$, $\zeta \in \mathring{M}$ виконується рівність

$$h_1(z,\zeta) = \rho(e^{-i\theta_0}\tau)^\rho\tau^{-1}\int\limits_0^{+\infty} g(te^{-i\theta_0},\lambda,z,\zeta)\exp\left(-t^\rho(e^{-i\theta_0}\tau)^\rho\right)t^{\rho-1}dt. \quad (6)$$

Залишається перевірити, що інтеграл (6) збігається рівномірно відносно $z$ і $\zeta$ на довільній компактній підмножині вигляду $K \times K$, де $K \subset \mathring{M}$. Для фіксованого компакта $K \subset \mathring{M}$ виберемо $\varepsilon > 0$ і $\eta > 0$ настільки малими, щоб $\varepsilon \max\limits_{z\in K}|z|^\rho + \nu_0 + \eta < \operatorname{Re}(e^{-i\theta_0}\tau)^\rho$ (це можна зробити, оскільки $\tau \in D_\rho(\theta_0;$ $\nu_0))$. З рівномірної оцінки модуля функції Міттаг–Лефлера за допомогою її індикатора $h(\theta)$ [7, с. 228] одержуємо, що існує стала $C > 0$ така, що для $z \in \mathbb{C}$

$$|E_\rho(z)| \le C\exp\left[(h(\operatorname{Arg}z) + \varepsilon)|z|^\rho\right].$$

Оскільки $K \subset \mathring{M} \subset \overline{D^*_\rho(\theta_0;\nu_0)}$, то для $z \in K$: $|z|^\rho h(\operatorname{Arg}z - \theta_0) < \nu_0$. Тому при $|t| \ge |\lambda| + 1$ і $z$, $\zeta \in K$ справедлива нерівність

$$\left|g(te^{-i\theta_0},\lambda,z,\zeta)\exp\left(-t^\rho(e^{-i\theta_0}\tau)^\rho\right)t^{\rho-1}\right| \le$$

$$\le 2C\max_{z\in K}|E_\rho(\lambda z)|\exp\left(-\eta t^\rho\right)t^{\rho-1}.$$

Тому (6) збігається рівномірно на $K \times K$.

Легко бачити, нарешті, що $h_1(\tau,\lambda,z,\zeta)$ є цілою відносно $\lambda$ і належить класу $[\rho,\infty)$.

**Лема 3.** *При* $\lambda$, $\mu$, $z \in \mathbb{C}$ $(\lambda \ne \mu)$ *виконується рівність*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k J_\rho^{k+1}(E_\rho(\mu z)) = \frac{E_\rho(\mu z) - E_\rho(\lambda z)}{\lambda - \mu}.$$

*Доведення.* При $k \ge 0$, $\mu \ne 0$ і $z \in \mathbb{C}$ маємо

$$\underset{z}{J}{}_\rho^{k+1}(E_\rho(\mu z)) = \left(E_\rho(\mu z) - \sum_{m=0}^{k}\mu^m z^m\Gamma(m/\rho + 1)\right)\mu^{-k-1} =$$

$$= \underset{\mu}{\Delta}{}^{k+1}(E_\rho(\mu z)),$$

де $\Delta$ — оператор Помм'є, що діє за правилом $(\Delta f)(z) = (f(z) - f(0))/z$. Подаючи оператор $\Delta^{k+1}$ в інтегральній формі [6], одержуємо

$$\underset{z}{J}_{\rho}^{k+1}(E_\rho(\mu z)) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=R} \frac{E_\rho(\zeta z)}{\zeta^{k+1}(\zeta-\mu)} d\zeta, \quad R > |\mu|.$$

Вибираючи $R > \max\{|\lambda|, |\mu|\}$, маємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k J_{\rho}^{k+1}(E_\rho(\mu z)) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=R} \frac{E_\rho(\zeta z)}{(\zeta-\lambda)(\zeta-\mu)} d\zeta.$$

Обчисливши інтеграл, одержимо потрібну формулу.

**Лема 4.** *Нехай $G$ — $\rho$-опукла область в $\mathbb{C}$ і $\varphi \in \mathcal{H}(G)$. Тоді для довільного $\rho$-опуклого компакта $M \subset G$ функцію* (5) *при $\lambda \in \mathbb{C}, z, \zeta \in M$ можна подати у вигляді*

$$t_1(\lambda, z, \zeta) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\gamma}\int\limits_{\gamma} \varphi(\tau) E_\rho(\lambda t) \underset{\tau}{B} \underset{t}{B} [g(\tau, t, z, \zeta)]\, dt\, d\tau, \tag{7}$$

*де $\gamma$ — замкнена спрямна жорданова крива, що міститься в $G$ і охоплює компакт $M$.*

***Доведення.*** Скориставшись лемою 2 і теоремою 6.3 з [7] про відновлення цілої функції за її узагальненим перетворенням Бореля, одержуємо, що при $\lambda$, $\mu \in \mathbb{C}$, $z$, $\zeta \in M$

$$g(\mu, \lambda, z, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} E_\rho(\mu\tau) \underset{\tau}{B} [g(\tau, \lambda, z, \zeta)]\, d\tau. \tag{8}$$

З іншого боку, використовуючи двічі (6), переконуємося в тому, що при $\lambda$, $\mu$, $z$, $\zeta \in \mathbb{C}$

$$E_\rho(\lambda\zeta) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k J_{\rho}^{k+1}(E_\rho(\mu z)) - E_\rho(\lambda z) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k J_{\rho}^{k+1}(E_\rho(\mu \zeta)) = g(\mu, \lambda, z, \zeta).$$

Таким чином, для функцій $\varphi(z) = E_\rho(\mu z)$, де $\mu \in \mathbb{C}$, виконується рівність

$$t_1(\lambda, z, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \varphi(\tau) \underset{\tau}{B} [g(\tau, \lambda, z, \zeta)]\, d\tau. \tag{9}$$

Оскільки система функцій $\{E_\rho(\mu z) \mid \mu \in \mathbb{C}\}$ є повною в $\mathcal{H}(G)$, то формула (9) вірна для довільної функції $\varphi \in \mathcal{H}(G)$. Скористаємося далі тим, що функція $g(\tau, \lambda, z, \zeta)$ є симетричною відносно перших двох аргументів. Тому $g(\tau, \lambda, z, \zeta)$ подається за формулою типу (8) стосовно другого аргумента. Тоді (9) набуває вигляду (7) і лема 4 доведена.

**Лема 5.** *Для довільного $\rho$-опуклого компакта $M$ функція $\underset{\tau}{B} \underset{t}{B} [g(\tau, t, z, \zeta)]$ є аналітичною на множині $CM \times CM \times \mathring{M} \times \mathring{M}$.*

Лема 5 доводиться за тією ж схемою, що й лема 2.

Нехай $\Lambda \in \mathcal{H}'(G)$. Тоді функціонал $\Lambda$ можна подати в інтегральній формі, тобто

$$\forall f \in \mathcal{H}(G): \quad \Lambda(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)\gamma(z)\, dz, \tag{10}$$

де $\gamma(z)$ — характеристична за Кете функція функціоналу $\Lambda$, яка є локально аналітичною на $CG$, причому $\gamma(\infty) = 0$, а $\Gamma$ — замкнена спрямна жорданова крива, що міститься в $G$ і охоплює всі особливості функції $\gamma(z)$ [6]. Назвемо компакт $K \subset G$ $\Lambda$-допустимим, якщо всі особливості його характеристичної за Кете функції містяться у внутрішності $K$. Тоді за $\Gamma$ в (10) можна взяти контур, що міститься в $\Lambda$-допустимому компакті $K$. Зауважимо, що коли деяка послідовність компактів вичерпує зсередини область $G$, тоді, починаючи з деякого номера, всі ці компакти є $\Lambda$-допустимими.

**Теорема 1.** *Нехай $G$ — $\rho$-опукла область комплексної площини і $L \in \mathcal{H}'(G)$. Для того щоб оператор $T \in L(\mathcal{H}(G))$ був переставним з оператором $J_\rho + L$, необхідно і досить, щоб для довільних $\Lambda$-допустимого $\rho$-опуклого компакта $M \subset G$, де $\Lambda(f) = f(0) - L(D_\rho f)$, і функції $f \in \mathcal{H}(G)$ при $z \in M$ виконувалася рівність*

$$(Tf)(z) = \underset{z}{D_\rho} \underset{\zeta}{\Lambda} \left[ \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma}\int_{\gamma} f(t)\,\varphi(\tau) \underset{\tau}{B} \underset{t}{B} [g(\tau, t, z, \zeta)]\, d\tau\, dt \right], \tag{11}$$

*де $\gamma$ — деякий контур, що міститься в $G$ і охоплює компакт $M$, а $\varphi$ — деяка функція з $\mathcal{H}(G)$, причому $\varphi = T1$.*

*Доведення. Необхідність.* Нехай $T \in L(\mathcal{H}(G))$ і комутує з оператором $J_\rho + L$. Тоді за лемами 1 і 4 характеристичну функцію $t(\lambda, z)$ оператора $T$ при $\lambda \in \mathbb{C}$ і $z \in M$ можна подати у вигляді

$$t(\lambda, z) = \underset{z}{D_\rho} \underset{\zeta}{\Lambda} [t_1(\lambda, z, \zeta)],$$

де $t_1(\lambda, z, \zeta)$ обчислюється за формулою (7). Розглянемо оператор $T_1$, дія якого на довільну функцію $f \in \mathcal{H}(G)$ при $z \in M$ визначається правою частиною рівності (11). Використовуючи лему 5, легко переконатися в тому, що $T_1 \in L(\mathcal{H}(G))$. Оскільки характеристичні функції операторів $T$ і $T_1$ збігаються, то $T = T_1$ і, отже, $T$ подається у вигляді (11).

*Достатність.* Розглянемо оператор $T$, який визначається формулою (11). Тоді $T \in L(\mathcal{H}(G))$ і його характеристичну функцію $t(\lambda, z)$ можна подати у вигляді (4). З (4) одержуємо, що

$$L[t(\lambda, z)] = L\left[ \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (J_\rho^k \varphi)(z) \right].$$

Враховуючи це, неважко переконатися в тому, що рівність $[T(J_\rho + L)](f) = [(J_\rho + L)T](f)$ виконується для функцій вигляду $f(z) = E_\rho(\lambda z)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, а отже, і для довільної функції $f \in \mathcal{H}(G)$.

Побудуємо тепер згортку для оператора $J_\rho + L$ в $\mathcal{H}(G)$.

**Теорема 2.** *Нехай $G$ — $\rho$-опукла область комплексної площини, $L \in \mathcal{H}'(G)$ і $\Lambda(f) = f(0) - L(D_\rho f)$. Тоді для довільних $\Lambda$-допустимого $\rho$-опуклого компакта $M \subset G$ і функцій $f$ та $\varphi$ з $\mathcal{H}(G)$ при $z \in M$ формула*

$$(f*\varphi)(z) = \underset{\zeta}{\Lambda}\left[\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\gamma\int_\gamma f(t)\,\varphi(\tau)\,\underset{t}{B}\,\underset{\tau}{B}[g(\tau,t,z,\zeta)]\,d\tau\,dt\right] \tag{12}$$

*визначає неперервну згортку для оператора* $J_\rho + L$, *де* $\gamma$ — *замкнена спрямна жорданова крива, що міститься в* $G$ *і охоплює* $M$.

*Доведення.* Те, що операція $*$ визначена на $\mathcal{H}(G)\times\mathcal{H}(G)$ і набуває значень із $\mathcal{H}(G)$, випливає з доведення теореми 1. Білінійність, комутативність та неперервність операції $*$ очевидні. Для доведення асоціативності згортки $*$ досить перевірити, що рівність $(f*g)*h = f*(g*h)$ виконується для функцій повної в $\mathcal{H}(G)$ системи $\{E^{(\lambda)}(z)\,|\,\lambda\in\mathbb{C}\}$, де $E^{(\lambda)}(z) = E_\rho(\lambda z)$. При $\lambda$, $\mu\in\mathbb{C}$, $\lambda\neq\mu$, маємо

$$(E^{(\lambda)}*E^{(\mu)})(z) = \underset{\zeta}{\Lambda}\left[\frac{E^{(\lambda)}(z)\,E^{(\mu)}(\zeta) - E^{(\mu)}(z)\,E^{(\lambda)}(\zeta)}{\lambda-\mu}\right].$$

Тому для різних комплексних чисел $\lambda$, $\mu$, $\nu$

$$(E^{(\lambda)}*E^{(\mu)})*E^{(\nu)} = E^{(\lambda)}*(E^{(\mu)}*E^{(\nu)}),$$

а отже, операція $*$ є згорткою.

Оскільки $E^{(0)}(z) = 1$, то при

$$\mu\in\mathbb{C}\setminus\{0\}:\ (\{1\}*E^{(\mu)})(z) = \underset{\zeta}{\Lambda}\left[\frac{E^{(\mu)}(z) - E^{(\mu)}(\zeta)}{\mu}\right] =$$

$$= [(J_\rho + L)\,E^{(\mu)}](z).$$

Тому для довільної функції $f\in\mathcal{H}(G)$ виконується рівність $(J_\rho+L)f = \{1\}* *f$. Отже, для $f$, $g\in\mathcal{H}(G)$:

$$(J_\rho+L)(f*g) = (1*f)*g = ((J_\rho+L)f)*g,$$

тобто оператор $J_\rho + L$ є мультиплікатором згортки $*$ і теорема 2 доведена.

*Зауваження* **1.** Як видно з доведення теореми 2, формулою (12) визначається неперервна згортка в $\mathcal{H}(G)$ для довільного фіксованого функціоналу $\Lambda\in\mathcal{H}'(G)$ (а не лише того, що породжений функціоналом $L$).

Побудована нами згортка (12) узагальнює класичну згортку Берга–Дімовського. Дійсно, нехай $\rho = 1$. Тоді $E_\rho(z) = \exp(z)$, $D_\rho = d/dz$, поняття $\rho$-опуклості для області $G$ рівносильне звичайній опуклості, а узагальнене перетворення Бореля збігається з перетворенням Бореля. Для $\tau$, $t$, $z$, $\zeta\in\mathbb{C}$ маємо

$$g(\tau,t,z,\zeta) = \frac{\exp(tz+\tau\zeta) - \exp(\tau z + t\zeta)}{t-\tau} =$$

$$= -\int_z^\zeta \exp(t\sigma)\exp[\tau(z+\zeta-\sigma)]\,d\sigma,$$

причому інтегрування здійснюється по відрізку, що з'єднує точки $z$ і $\zeta$. Тоді для довільного опуклого компакта $M$ при $\tau$, $t\in CM$ і $z$, $\zeta\in\mathring{M}$ виконується рівність

$$\underset{\tau}{B}\underset{t}{B}[g(\tau,t,z,\zeta)] = -\int_z^\zeta \frac{1}{t-\sigma}\frac{1}{\tau-(z+\zeta-\sigma)}\,d\sigma .$$

Обчисливши інтеграл в правій частині (12) одержуємо, що формула

$$(f*\varphi)(z) = -\underset{\zeta}{\Lambda}\left[\int_z^\zeta f(\sigma)\,\varphi(z+\zeta-\sigma)\,d\sigma\right] \tag{13}$$

визначає згортку в $\mathcal{H}(G)$, де $G$ — опукла область в $\mathbb{C}$. Але (13) збігається зі згорткою Берга–Дімовського [1].

*Зауваження* 2. При виконанні умов теореми 2 згортка (12) не має ануляторів у $\mathcal{H}(G)$. Дійсно, нехай існує функція $f\in\mathcal{H}(G)$, для якої $f*\varphi=0$ для всіх $\varphi\in\mathcal{H}(G)$. Тоді $f*1=0$, а тому $((J_\rho+L)f)(z)=0$, $z\in G$. Подіявши на обидві частини цієї рівності оператором $D_\rho$, одержимо $f(z)\equiv 0$, $z\in G$.

За допомогою теорем 1 і 2 комутант оператора $J_\rho+L$ можна описати в іншому вигляді.

*Наслідок* 1. *Нехай $G$ — $\rho$-опукла область в $\mathbb{C}$ і $L\in\mathcal{H}'(G)$. Для того щоб оператор $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ був переставним з оператором $J_\rho+L$, необхідно і досить, щоб він подавався у вигляді*

$$Tf = D_\rho(f*\varphi),\quad f\in\mathcal{H}(G),$$

*де $*$ — згортка* (12), *а $\varphi(z)$ — деяка функція з $\mathcal{H}(G)$, причому $\varphi=T1$.*

*Наслідок* 2. *Якщо $G$ — $\rho$-опукла область в $\mathbb{C}$ і $L\in\mathcal{H}'(G)$, то комутант оператора $J_\rho+L$ в $\mathcal{H}(G)$ складається з операторів $T$, які можна зобразити у вигляді*

$$Tf = \mu f + f*\psi,$$

*де $\mu\in\mathbb{C}$, а $\psi\in\mathcal{H}(G)$.*

Доведення випливає з наслідку 1, якщо скористатися формулою $D_\rho(f*{}$ ${}*\varphi)=\Lambda(\varphi)f+f*(D_\rho\varphi)$, де $f$, $\varphi\in\mathcal{H}(G)$. Правильність цієї формули легко перевірити на функціях повної в $\mathcal{H}(G)$ системи $\{E_\rho(\lambda z)\,|\,\lambda\in\mathbb{C}\}$.

*Наслідок* 3. *Для $\varphi\in\mathcal{H}(G)$ і $\lambda\in\mathbb{C}$ при $z\in G$ виконується рівність*

$$(\varphi*E^{(\lambda)})(z) = \underset{\zeta}{\Lambda}[t_1(\lambda,z,\zeta)],$$

*де $t_1(\lambda,z,\zeta)$, визначається формулою* (5).

Співвідношення наслідку 3 по суті було одержане при доведенні теорем 1 і 2.

Застосуємо побудовану нами згортку (12) для опису коефіцієнтних мультиплікаторів розкладів аналітичних функцій в ряди за системою Міттаг–Леффлера. В [8] показано, що для довільного $\rho$-опуклого компакта $\overline{D}$, внутрішність якого містить початок координат, існує послідовність комплексних чисел $\{\lambda_n|$ $n\in\mathbb{N}\}$ така, що кожну функцію $f(z)$, аналітичну в області $G$, $\overline{D}\subset G$, можна розкласти в ряд

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\,E_\rho(\lambda_n z), \tag{14}$$

який збігається до $f(z)$ рівномірно всередині області $D$. При цьому коефіцієнти $a_n(f)$ зображення функції $f(z)$ у вигляді (14) обчислюються за формулами

$$a_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(t)\, \psi_n(t)\, dt, \tag{15}$$

де $\{\psi_n(t) \mid n \in \mathbb{N}\}$ — система функцій, біортогональна до сім'ї $\{E_\rho(\lambda_n z) \mid n \in \mathbb{N}\}$, а $\Gamma$ — замкнений контур, що міститься в $G$ і охоплює множину $\overline{D}$ [8].

Нехай далі $v(\lambda)$ — ціла функція з класу $[\rho, \infty)$, причому $v(0) = 1$. Припустимо, що індикатор функції $v(\lambda)$ набуває строго додатних значень і $v(\lambda)$ має зліченну кількість простих нулів $\{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Через $\overline{D}$ позначимо $\rho$-опуклу оболонку множини особливих точок узагальненого перетворення Бореля функції $v(\lambda)$. При виконанні цих умов система $\{E_\rho(\lambda_n z) \mid n \in \mathbb{N}\}$ має біортогональну систему $\{\psi_n(t) \mid n \in \mathbb{N}\}$ [8]. Нехай $G$ — деяка $\rho$-опукла область, що містить $\overline{D}$. Кожній функції $f \in \mathcal{H}(G)$ можна співставити у відповідність ряд

$$f(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\, E_\rho(\lambda_n z), \tag{16}$$

коефіцієнти якого обчислюються за формулами (15). Ряд (16) назвемо формальним розкладом функції $f(z)$ за системою функцій Міттаг–Лефлера $\{E_\rho(\lambda_n z) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Наслідуючи [1], оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ назвемо коефіцієнтним мультиплікатором розкладу (16), якщо існує послідовність комплексних чисел $\{\mu_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, для якої $a_n(Tf) = \mu_n a_n(f)$ для довільних $n \ge 1$, $f \in \mathcal{H}(G)$. При цьому послідовність $\{\mu_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ називається мультиплікаторною послідовністю розкладу (16).

Наведемо спочатку інший спосіб для обчислення коефіцієнтів $a_n(f)$. Зауважимо, що формулою

$$F(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \gamma(z)\, f(z)\, dz,$$

де $\gamma(z)$ — узагальнене перетворення Бореля функції $v(\lambda)$, а $\Gamma$ — замкнений контур, що лежить в $G$ і охоплює $\overline{D}$, визначається функціонал $F \in \mathcal{H}'(G)$, характеристична функція якого збігається з $v(\lambda)$.

Лема 6. *Для довільної функції $f \in \mathcal{H}(G)$ коефіцієнти* (15) *можна обчислити за формулами*

$$a_n(f) = -\frac{1}{v'(\lambda_n)}\, F\left[\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_n^k (J_\rho^{k+1} f)(z)\right]. \tag{17}$$

***Доведення.*** Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$. Функціонал (15) є лінійним і неперервним на $\mathcal{H}(G)$. Легко бачити, що правою частиною (17) визначається також деякий функціонал $b_n(f) \in \mathcal{H}'(G)$. З властивостей біортогональної системи $\{\psi_n(t) \mid n \in \mathbb{N}\}$ випливає, що при $\lambda \in \mathbb{C}$: $a_n(E_\rho(\lambda z)) = v(\lambda)/((\lambda - \lambda_n) v'(\lambda_n))$ [8]. Використовуючи лему 3, одержуємо $b_n(E_\rho(\lambda z)) = v(\lambda)/((\lambda - \lambda_n) v'(\lambda_n))$.

Характеристичні функції функціоналів $a_n$ та $b_n$ збігаються, а тому $a_n(f) = b_n(f)$ для довільної функції $f \in \mathcal{H}(G)$.

Розглянемо далі функціонал $L \in \mathcal{H}'(G)$, який визначається формулою $L(f) = -F(J_\rho f)$, $f \in \mathcal{H}(G)$. При цьому функціонал $\Lambda$ з теорем 1 і 2, який відповідає $L$, збігається з $F$. Тому формулою (12) при $\Lambda \equiv F$ визначається неперервна згортка для $J_\rho + L$ в $\mathcal{H}(G)$.

*Наслідок* **4.** *Для $f \in \mathcal{H}(G)$ при $z \in G$ і $n \in \mathbb{N}$ виконуються рівності*

$$(f * E^{(\lambda_n)})(z) = v'(\lambda_n)\, a_n(f) E^{(\lambda_n)}(z).$$

Цей наслідок випливає безпосередньо з леми 6 і наслідку 3.

**Теорема 3.** *Для того щоб оператор $T \in L(\mathcal{H}(G))$ був коефіцієнтним мультиплікатором розкладу* (16), *необхідно і досить, щоб його можна було подати у вигляді $Tf = \mu f + \psi * f$, де $\mu \in \mathbb{C}$, а $\psi \in \mathcal{H}(G)$.*

*Доведення.* За теоремою 2.2.1 [8] система функціоналів $\{ a_n(f) \mid n \in \mathbb{N} \}$ має властивість єдиності. Тому з теореми 3.4 [10] з урахуванням наслідку 4 випливає, що множина коефіцієнтних мультиплікаторів розкладу (16) збігається з множиною мультиплікаторів згортки (12). Для оператора $J_\rho + L$, який є мультиплікатором згортки (12), функція $\varphi(z) \equiv 1$ є циклічним елементом у просторі $\mathcal{H}(G)$. Оскільки $\mathcal{H}(G)$ — простір Фреше, а згортка (12) не має ануляторів у $\mathcal{H}(G)$, за теоремою 1.3.11 [1] множина мультиплікаторів згортки (12) збігається з комутантом оператора $J_\rho + L$. Залишається скористатися наслідком 2.

*Наслідок* **5.** *Послідовність $\{ \mu_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ є мультиплікаторною послідовністю розкладу* (16) *тоді і тільки тоді, коли $\mu_n = \mu - v'(\lambda_n)\, a_n(\psi)$, $n \in \mathbb{N}$, де $\mu$ — деяка стала, а $\psi \in \mathcal{H}(G)$.*

Всі результати цієї статті легко розповсюджуються на випадок простору $\mathcal{H}(\overline{G})$.


1. *Dimovski I. H.* Convolutional calkulus. – Sofia: Publ. House Bulg. Acad. Sci., 1982. – 200 p.
2. *Berg L.* Generalized convolutions // Math. Nachr. – 1976. – **72**. – P. 239–245.
3. *Dimovski I. H.* Convolutions for the right inverse linear operators of the general linear differential operator of the first order // Serdica. – 1976. – **2**, № 1. – P. 82–86.
4. *Dimovski I. H.* Convolution representation of the commutant of Gelfond–Leont'ev integration operator // C. r. Bulg. Acad. Sci. – 1981. – **34**, № 12. – P. 1643–1646.
5. *Лінчук С. С.* Про побудову згорток у просторах аналітичних функцій // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями: Зб. наук. пр. – Чернівці, 1990. – С. 138–142.
6. *Köthe G.* Dualität in der Funktionentheorie // J. Reine und Angew. Math. – 1951. – **191**. – S. 30–49.
7. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1966. – 671 с.
8. *Леонтьев А. Ф.* Обобщения рядов экспонент. – М.: Наука, 1981. – 320 с.
9. *Епифанов О. В., Ленев А. А.* О разрешимости интегрального уравнения в пространствах аналитических функций // Мат. анализ и его прил. – Ростов-на-Дону, 1974. – Вып. 6. – С. 258–261.
10. *Bozinov N. S.* A convolutional approach to the multiplier problem connected with generalized eigenvector expansions of an unbounded operator // Serdica. – 1982. – **8**, № 4. – P. 425–441.


Одержано 13.12.93