УДК 519.21

М. В. Працьовитий (Ін-т математики НАН України, Київ)

СИНГУЛЯРНІСТЬ РОЗПОДІЛІВ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН, ЗАДАНИХ РОЗПОДІЛАМИ ЕЛЕМЕНТІВ СВОГО ЛАНЦЮГОВОГО ЗОБРАЖЕННЯ

The structure of the distribution of a random variable for which the elements of the corresponding continued fraction are independent random variables is completely studied. We prove that the distribution is pure, give a criterion of singularity, prove that the absolute continuity is impossible, and study the properties of the spectrum. In the case of a random variable for which the elements of the corresponding continued fraction form a Markov chain, we describe the spectrum, obtain expressions for the distribution function and density, give a criterion of the Cantor property, and prove that an absolutely continuous component is absent.

Повністю вивчена структура розподілу випадкової величини, елементи елементарного ланцюгового зображення якої є незалежними випадковими величинами. Доведено чистоту розподілу, знайдено критерій сингулярності і доведено неможливість абсолютної неперервності, вивчено властивості спектра. Для розподілу випадкової величини, елементи ланцюгового зображення якої утворюють однорідний ланцюг Маркова, описано спектр, знайдено вираз для функції розподілу, виведено формулу для щільності, знайдено критерій канторовості і доведено відсутність абсолютно неперервної компоненти.

Існують певні труднощі у простому формальному заданні фрактальних об'єктів [1], в тому числі сингулярних розподілів. Кожна система числення (спосіб зображення чисел) має свої можливості і обмеження в цьому відношенні. В [1, 2] для вивчення названих об'єктів використовувались n-адичні розклади і Q-зображення. Для аналогічних цілей пропонується використання ланцюгових дробів.

1. Нехай

$$\xi = [0; \eta_1, \dots, \eta_k, \dots] \tag{1}$$

— випадкова величина (в. в.), зображена елементарним ланцюговим дробом (далі ланцюговим дробом), елементи η_k якої є незалежними, взагалі кажучи, різнорозподіленими в. в., які набувають значень $1, 2, \dots, i, \dots$ з імовірностями $p_{1k}, p_{2k}, \dots, p_{ik}, \dots$ відповідно, $p_{ik} \geq 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} p_{ik} = 1$ для будь-якого $k \in N$.

Оскільки елементів в ланцюговому зображенні (1) нескінченна кількість, то в. в. ξ набуває лише ірраціональних значень. Очевидно, що матриця $\|p_{ik}\|$ однозначно визначає розподіл ξ і обумовлює його властивості.

Як відомо, кожна функція розподілу (ф. р.) $F(x)$ єдиним способом подається у вигляді

$$F(x) = \alpha_1 F_d(x) + \alpha_2 F_{ac}(x) + \alpha_3 F_s(x), \tag{2}$$

де $\alpha_i > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, F_d, F_{ac}, F_s — відповідно дискретна, абсолютно неперервна і сингулярна (неперервна функція, похідна якої майже скрізь у значенні міри Лебега рівна нулю) ф. р. Вираз (2) називається *структурою ф. р. (розподілу)* $F(x)$. Вивчення структури розподілу, тобто за функцією $F(x)$ (розподілом) відшукання α_1, α_2, α_3, F_d, F_{ac}, F_s, є традиційною задачею теорії ймовірностей (див., наприклад, [3]). Якщо один з коефіцієнтів у розкладі (2) рівний 1, то розподіл називають *чистим*, чисто *дискретним*, якщо $\alpha_1 = 1$; чисто *абсолютно неперервним*, якщо $\alpha_2 = 1$; чисто *сингулярним*, якщо $\alpha_3 = 1$. При $\alpha_1 = 0$ розподіл є *неперервним*. Якщо розподіл не є чистим, то його називають *сумішшю* розподілів, для яких коефіцієнти α_i ненульові.

Перейдемо до вивчення структури розподілу в. в. ξ.

Теорема 1 [4]. *В. в.* ξ *має дискретний розподіл тоді і тільки тоді, коли*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_{k} \{p_{ik}\} > 0, \tag{3}$$

причому у випадку дискретності максимальний стрибок ф. р. в. в. ξ *має в точці*

$$x_0 = [0; a_1', a_2', \ldots, a_k', \ldots], \quad \text{де} \quad p_{a_k' k} = \max_{i} \{p_{ik}\}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Всі інші атоми розподілу відрізняються від x_0 *лише скінченним числом елементів ланцюгового зображення.*

Наслідок. *Для того щоб в. в.* ξ *мала неперервний розподіл, необхідно і достатньо, щоб нескінченний добуток в* (3) *був рівним нулю.*

Ф. р. $F_\xi(x)$ в. в. ξ може бути записана у вигляді

$$F_\xi(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \le 0 \quad \text{і} \quad F_\xi(x) = 1 \quad \text{при} \quad x \ge 1,$$
$$F_\xi(x) = \beta_{a_1(x)} + \sum_{m=2}^{\infty} \left[\beta_{a_m(x)} \prod_{j=1}^{m-1} p_{a_j(x) j} \right], \quad \text{якщо} \quad x \in (0; 1) \bigcap I, \tag{4}$$

де $a_m(x)$ — m-й елемент ланцюгового зображення числа x, I — множина ірраціональних чисел,

$$\beta_{a_m(x)} = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{a_m(x)-1} p_{im} & \text{при} \ \ m = 2k; \\ 1 - \sum\limits_{j=1}^{a_m(x)} p_{jm} & \text{при} \ \ m = 2k+1. \end{cases}$$

В усіх раціональних точках $[0; 1]$ $F_\xi(x)$ є продовженням (4) за неперервністю зліва.

Спектром розподілу в. в. ξ (спектром називається множина $S = \{x : F(x + \varepsilon) - F(x - \varepsilon) > 0 \ \ \forall \varepsilon > 0\}$) є множина

$$A = \{x : x \in [0; 1), \ p_{a_k(x) k} > 0 \ \ \forall k > N\},$$

доповнена раціональними точками $[0; 1]$, які є граничними для неї.

Отже, $\mu(S) = \mu(A)$ для кожної неперервної міри μ.

Якщо $x = [0; a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots]$ — розклад числа x в елементарний ланцюговий дріб, то його елементи $a_k = a_k(x)$ є функціями x. Всі ті $x \in [0; 1]$, які мають фіксовані елементи $a_1, a_2, \ldots, a_k$, утворюють півінтервал з кінцями

$$\frac{p_k(x)}{q_k(x)} = [0; a_1, a_2, \ldots, a_k] \quad \text{і} \quad \frac{p_k(x) + p_{k-1}(x)}{q_k(x) + q_{k-1}(x)} = [0; a_1, a_2, \ldots, a_k + 1],$$

де $p_k(x)/q_k(x)$ — підхідний дріб k-го порядку числа x, який будемо називати півінтервалом k-го рангу і позначати $\rhd a_1 \ldots a_k$, причому

$$\rhd a_1 \ldots a_k = [[0; a_1, a_2, \ldots, a_k]; [0; a_1, a_2, \ldots, a_k + 1]) \quad \text{при парних} \ \ k,$$

$$\rhd a_1 \ldots a_k = ([0; a_1, a_2, \ldots, a_k + 1]; [0; a_1, a_2, \ldots, a_k]] \quad \text{при непарних} \ \ k.$$

Для зображення відрізка (інтервала) з тими ж кінцями, що й в $\rhd a_1 \ldots a_k$, використовуватимемо позначення $\Delta_{a_1 \dots a_k}$ ($\nabla_{a_1 \dots a_k}$). Очевидно, що для кожного ірраціонального $x \in (0; 1)$ існує єдиний півінтервал рангу k, який його містить, причому

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{a_1(x) \dots a_k(x)}.$$

Сингулярну ф. р. (розподіл) $F(x)$ називають [5] ф. р. (розподілом)

1) *канторівського* типу (*C-типу*), якщо міра Лебега λ спектра S_F ф. р. $F(x)$ рівна 0, тобто $\lambda(S_\xi) = 0$;

2) *салемівського* типу (*S-типу*), якщо $S_F = \bigcup_i [a_i; b_i]$;

3) *квазіканторівського* типу (*K-типу*), якщо S_F — ніде не щільна множина і $\lambda(S_\xi) > 0$.

Теорема 2 [5, с. 81]. *Кожна сингулярна ф. р. $F(x)$ подається у вигляді*

$$F(x) = \gamma_1 F^S(x) + \gamma_2 F^C(x) + \gamma_3 F^K(x), \tag{5}$$

де F^S, F^C, F^K — ф. р. S-, C-, K-типів відповідно,

$$\gamma_i \geq 0, \quad \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1.$$

Якщо один з коефіцієнтів γ_i дорівнює 1, то тип сингулярної ф. р. $F(x)$ називають чистим. Розклад (5) називається *структурою сингулярної ф. р. $F(x)$*.

Теорема 3 [6]. *Спектр S_ξ в. в. ξ є об'єднанням відрізків тоді і тільки тоді, коли матриця $\|p_{ik}\|$ містить лише скінченне число стовпців, які містять нулі (рядків може бути і нескінченне число).*

Теорема 4 [6]. 1. *Якщо матриця $\|p_{ik}\|$ має нескінченну кількість нулів у першому рядку, то спектр S_ξ розподілу в. в. ξ має канторівський розподіл ($\lambda(S_\xi) = 0$).*

2. *Якщо в першому рядку матриці $\|p_{ik}\|$ немає нулів, то міра Лебега спектра S_ξ розподілу в. в. ξ задовольняє нерівність*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left[1 - 2 \sum_{s \in S_{j_k}} \frac{1}{s^2}\right] \leq \lambda(S_\xi) \leq \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{3} \sum_{s \in S_{j_k}} \frac{1}{s^2}\right], \tag{6}$$

де $p_{sj_k} = 0$, якщо $s \in S_{j_k}$, і $p_{cj_k} > 0$, якщо $c \notin S_{j_k}$, $p_{cm} > 0$, якщо $m \notin \{j_k\}$, тобто S_{j_k} — це множина номерів рядків j_k-го стовпця матриці $\|p_{ik}\|$, в яких знаходиться 0, а j_k — номер k-го стовпця, який має нулі.

3. *Якщо в першому рядку матриці $\|p_{ik}\|$ міститься скінченна кількість нулів, тобто $p_{1i_0} = 0$ і $p_{1i} > 0$ для всіх $i > i_0$, то*

$$\lambda(E_{i_0}) \prod_{k=i_0+1}^{\infty} \left[1 - 2 \sum_{s \in S_{j_k}} \frac{1}{s^2}\right] \leq \lambda(S_\xi) \leq \lambda(E_{i_0}) \prod_{k=i_0+1}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{3} \sum_{s \in S_{j_k}} \frac{1}{s^2}\right], \tag{7}$$

де E_{i_0} — сукупність відрізків рангу i_0, які містять точки з S_ξ.

Наслідок 1. *В. в. ξ матиме сингулярний розподіл канторівського типу ($\lambda(S_\xi) = 0$) тоді і тільки тоді, коли виконується*

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left[1-\sum_{s\in S_{j_k}}\frac{1}{s^2}\right]=0 \quad \textit{або (що рівносильно)} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{s\in S_{j_k}}\frac{1}{s^2}\right]=\infty. \tag{8}$$

Наслідок 2. *Якщо в деякому рядку матриці* $\|p_{ik}\|$ *міститься нескінченна кількість нулів, то розподіл* ξ *є сингулярним розподілом канторівського типу.*

Наслідок 3. *Якщо матриця* $\|p_{ik}\|$ *містить нескінченну кількість стовпців, які містять* 0, *але в першому рядку їх не більш ніж скінченне число, причому*

$$\prod_{k=m}^{\infty}\left[1-\sum_{s\in S_{j_k}}\frac{1}{s^2}\right]>0 \quad \textit{або (що рівносильно)} \quad \sum_{k=m}^{\infty}\left[\sum_{s\in S_{j_k}}\frac{1}{s^2}\right]<\infty \tag{9}$$

для деякого $m\in N$, *то спектр* S_ξ *має додатну міру Лебега.*

Лема 1. *Якщо кількість відмінних від нуля елементів кожного стовпця матриці* $\|p_{ik}\|$ *не перевищує числа* m, *то в. в.* ξ *має сингулярний розподіл канторівського типу* $(\lambda(S_\xi)=0)$.

Доведення. Покажемо, що при виконанні умов леми існує рядок матриці $\|p_{ik}\|$ з нескінченною кількістю нулів.

Розглянемо числа $1, 2, \ldots, m, m+1$. Нехай в i-му рядку $(i=\overline{1, m})$ нулів скінченна кількість, тобто існує k_i таке, що $p_{ik}>0$ для всіх $k>k_i$. Розглянемо $(m+1)$-й рядок і $k_0=\max\limits_{1\le i\le m}\{k_i\}$. Оскільки $p_{ik}>0$ для всіх $i=\overline{1, m}$ і $k>k_0$, то $p_{(m+1)k}=0$ для всіх $k>k_0$, інакше це суперечило б умові, що кількість відмінних від нуля елементів не перевищує m. Отже, якщо жоден з перших m рядків не містить нескінченної кількості нулів, то таким є $(m+1)$-й рядок.

Враховуючи доведене, з наслідку 2 теореми 4 випливає висновок леми 1. Остання доведена.

Наслідок. *Множина*

$$A[V_k]=\{x\colon x\in(0;1),\ a_k\in V_k,\ |V_k|\le m,\ \ k\in N\},$$

тобто множина точок $x\in(0;1)$, *кожний елемент ланцюгового зображення яких може набувати значень з множини, кількість елементів якої не перевищує фіксованого числа* m, *має міру Лебега, рівну нулю.*

Метричні властивості спектра розподілу, вивчені вище, не дозволяють повністю розв'язати задачу про структуру останнього. Більш корисним в цьому відношенні є поняття „носія".

Носієм ф. р. $F(x)$ (розподілу) в. в. ξ називається [1] множина

$$N_\xi=\{x\colon F'(x)\ne 0\}, \tag{10}$$

тобто множина, яка містить ті і тільки ті точки x, для яких $F'(x)>0$, $F'(x)=\infty$ або $F'(x)$ не існує.

Очевидно, що $N_\xi\subset S_\xi$.

Відмітимо, що часто (наприклад, в [7]) носієм називають найменшу замкнену множину, на якій зосереджена ймовірність. Але так означений носій співпадає зі спектром. Множина ж N_ξ, яка є по суті множиною точок „суттєвого" росту ф. р. $F(x)$ і є „фактично" носієм щільності розподілу в термінах теорії узагальнених функцій, корисна при вивченні структур розподілів, оскільки умова $\lambda(N_\xi)=0$ рівносильна відсутності абсолютно неперервної компоненти в розподілі тощо (детальніше див. [1]).

Лема 2. *Якщо в точці* x *існує скінченна чи нескінченна похідна* $F'(x)$ *ф. р. в. в.* ξ, *то вона рівна*

$$B(x) = \lim_{k\to\infty}\left[q_k(x)(q_k(x)+q_{k-1}(x))\prod_{j=1}^{k} p_{a_j(x)j}\right], \qquad (11)$$

де $a_j(x)$ — *j-й елемент ланцюгового зображення,* $q_k(x)$ — *знаменник підхідного дробу k-го порядку числа* x.

Наслідок. *Якщо* $B(x_0)>0$, *то* $x_0\in N_\xi$ *і*

$$S_\xi \supset N_\xi \supset B_\xi = \{x:\ B(x)>0\}.$$

В роботі [6] доведена наступна теорема.

Теорема 5. *Якщо матриця* $\|p_{ik}\|$ *має властивість*

$$B_1:\ \forall\,\varepsilon>0\ \exists\, n_0(\varepsilon):\ p_{nk}<\varepsilon \quad \forall\, n>n_0(\varepsilon) \quad i \quad \forall\, k\in N,$$

то розподіл в. в. ξ *у випадку розбіжності нескінченного добутку* (3) *є сингулярним.*

Відмітимо, що властивість B_1 є обмежувальною, умови цієї теореми не виконуються, наприклад, тоді, коли $p_{ii}=1/2$ для всіх $i\in N$, тобто коли по діагоналі матриці $\|p_{ik}\|$ розміщено $1/2$.

Доведемо справедливість висновку теореми 5 без будь-яких обмежень для матриці $\|p_{ik}\|$.

Теорема 6 (основний результат). *Розподіл в. в.* ξ *є чистим, причому при*

$$\prod_{k=1}^{\infty}\max_i\{p_{ik}\} = 0$$

чисто сингулярним.

Доведення. Позначимо $L=\{x:\ x\in[0;1],\ F'(x)$ — скінченна$\}$. Як відомо, $\lambda(L)=1$.

Відомо [8, с. 83] також, що існують дві абсолютно постійні константи a і $A\,(1<a<A)$ такі, що для майже всіх $x\in(0;1)$ при достатньо великих n

$$a < \sqrt[n]{q_n(x)} < A.$$

Позначимо множину таких x через W. Тоді $\lambda(L\cap W)=1$.

З леми 2 випливає, що для $x\in(L\cap W)$ виконується

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\prod_{j=1}^{\infty}[a^2 p_{a_j(x)j}] \le F'(x) \le \left(1+\frac{1}{A}\right)\prod_{j=1}^{\infty}[A^2 p_{a_j(x)j}]. \qquad (12)$$

Зафіксуємо $\varepsilon>0$ таке, що $1-\varepsilon>0$. Розглянемо множину

$$E_\varepsilon = \{x:\ \exists n_0(x,\varepsilon) A^2 p_{a_n(x)n} > 1-\varepsilon \quad \forall\, n>n_0(x,\varepsilon)\}.$$

Якщо x_0 — конкретна точка множини E_ε, то в її ланцюговому розкладі елементи $a_n(x_0)$ $(n>n_0(x_0,\varepsilon))$ належать множині V_n, кількість членів якої, очевидно, не перевищує числа $m=[(1-\varepsilon)/A^2]+1$. Позначивши через $E_\varepsilon^{(k)}$ множину всіх тих $x\in E_\varepsilon$, для яких $n_0=k_0-1$, матимемо

$$E_\varepsilon^{(1)}\subset E_\varepsilon^{(2)}\subset\ldots\subset E_\varepsilon^{(k-1)}\subset E_\varepsilon^{(k)}\subset\ldots.$$

За наслідком з леми 1 маємо $\lambda(E_\varepsilon^{(1)})=0$. Враховуючи σ-адитивність міри Лебега, легко бачити, що рівність $\lambda(E_\varepsilon^{(1)})=0$ рівносильна $\lambda(E_\varepsilon^{(k)})=0$ для кожного $k\in N$.

Оскільки $E_\varepsilon=\bigcup_k E_\varepsilon^{(k)}$, то $\lambda(E_\varepsilon)\le\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(E_\varepsilon^{(k)})=0$, тобто $\lambda(E_\varepsilon)=0$.

Легко бачити, що $F'(x)=0$, якщо $x\notin E_\varepsilon\cap L\cap W$, тобто $F'(x)=0$ для всіх $x\in([0;1)\setminus E_\varepsilon)\cap L\cap W$, оскільки всі члени нескінченного добутку (12) починаючи з деякого номера відокремлені від 1. А враховуючи, що $\lambda([[0;1)\setminus E_\varepsilon]\cap L\cap W)=1$, робимо висновок, що похідна ф. р. в. в. ξ майже скрізь рівна нулю, тобто розподіл ξ не містить абсолютно неперервної компоненти. Це разом з наслідком з теореми 1 приводить до твердження теореми 6. Доведення завершено.

Резюмує отримані результати щодо структури розподілу в. в. ξ наступна теорема.

Теорема 7. *Якщо матриця* $\|p_{ik}\|$ *задовольняє умову* (3), *то розподіл в. в.* ξ *є чисто дискретним, якщо ні — то чисто сингулярним, причому*

1) *канторівського типу тоді і тільки тоді, коли виконується* (8);

2) *S-типу тоді і тільки тоді, коли матриця* $\|p_{ik}\|$ *має лише скінченну кількість стовпців, які містять нулі*;

3) *K-типу, якщо матриця* $\|p_{ik}\|$ *має нескінченну кількість стовпців, які містять нулі, і при цьому нескінченний добуток (ряд)* (9) *збігається*.

2. Нехай

$$\tilde{\xi}=[0;\eta_1,\ldots,\eta_k,\ldots] \tag{13}$$

— в. в., зображена елементарним ланцюговим дробом, елементи η_k якої утворюють однорідний ланцюг Маркова $\{\eta_k\}$ з початковими ймовірностями $p_1,\ldots$ $\ldots,p_i,\ldots$ і матрицею перехідних імовірностей $\|p_{ij}\|$, $i,j\in N$, причому $p_i>0$, $p_{ij}\ge 0$. Очевидно, що в. в. (13) може набувати лише ірраціональних значень.

Можна довести, що ф. р. $F(x)$ в. в. $\tilde{\xi}$ записується у вигляді $F(x)=0$ при $x\le 0$, $F(x)=1$ при $x\ge 1$ і

$$F(x)=\beta_{a_1(x)}+p_{a_1(x)}\sum_{k=2}^{\infty}\left[\beta_{a_k(x)a_{k+1}(x)}\prod_{j=1}^{k-1}p_{a_j(x)a_{j+1}(x)}\right],\quad \text{якщо}\quad x\in(0;1)\cap I,$$

де $a_k(x)$ — k-й елемент ланцюгового зображення числа x,

$$\beta_{a_1(x)}=1-\sum_{j=1}^{a_1(x)-1}p_j,$$

$$\beta_{a_k(x)a_{k+1}(x)}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{a_{k+1}(x)-1}p_{a_k(x)j} & \text{при } k=2m;\\ \displaystyle 1-\sum_{j=1}^{a_{k+1}(x)}p_{a_k(x)j} & \text{при } k=2m+1.\end{cases}$$

Лема 3. *Спектром* $S_{\tilde{\xi}}$ *розподілу в. в.* $\tilde{\xi}$ *є множина*

$$A=\{x\colon x\in(0;1),\ p_{a_k(x)k}>0\ \ \forall k>N\},$$

доповнена раціональними точками $[0;1]$, *які є граничними для неї.*

Доведення. Досить довести два включення: 1) $A_0 \subset S_\xi$; 2) $S_\xi \subset A_0 = A \cup \cup \{x_k\}$, де x_k — множина раціональних точок, які є граничними для A.

1. Якщо $x \in A_0$, то $x \in A$ або $x \in \{x_k\}$. Нехай $x \in A$. Тоді

$$P\{\tilde{\xi} \in \nabla_{a_1(x)\ldots a_k(x)}\} = p_{a_1(x)} \prod_{j=1}^{k-1} p_{a_j(x)a_{j+1}(x)} > 0 \quad \forall k \in N. \tag{14}$$

А з цього випливає, що

$$\nabla_{a_1(x)\ldots a_k(x)} \cap S_\xi \neq \varnothing \quad \text{для} \quad k \in N. \tag{15}$$

Оскільки для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вказати таке k, що

$$\nabla_{a_1(x)\ldots a_k(x)} \subset (x-\varepsilon; x+\varepsilon),$$

то $F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon) > 0$, тобто $x \in S_\xi$.

Нехай тепер $x \in \{x_n\} \neq \varnothing$. А це означає, що множина A незамкнена, тоді як спектр S_ξ завжди множина замкнена. Отже, всі граничні точки множини A, в тому числі і $\{x_k\}$, належать S_ξ. Таким чином, $A_0 \subset S_\xi$.

2. Нехай $x \in S_\xi$. Якщо x — ірраціональне число, то з означення спектра S_ξ випливає (15) для будь-якого $k \in N$, а тому виконується (14) і $p_{a_k(x)a_{k+1}(x)} > 0 \;\; \forall k \in N$. Отже, $x \in A$.

Нехай тепер x — раціональне число. Оскільки в. в. $\tilde{\xi}$ не може набувати раціональних значень, то $P\{\tilde{\xi} = x\} = 0$. Тому для будь-якого $\varepsilon > 0$ з означення спектра (точніше, точки росту) випливає, що в інтервал $(x-\varepsilon; x+\varepsilon)$ попадають і ірраціональні точки S_ξ, а вони, як ми довели, з A. Зафіксуємо одну з них x_ε. Тоді очевидно, що $x = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon$, тобто x — гранична точка множини A. Таким чином, $S_\xi \subset A_0$ і $S_\xi = A_0$. Лема 3 доведена.

Наслідок. *Якщо всі елементи матриці перехідних імовірностей* $\|p_{ik}\|$ *додатні, то ф. р.* $F_\xi(x)$ *є строго зростаючою на* $[0; 1]$. *Якщо ж* $p_{\tau s} = 0$, *то* $F_\xi(x)$ *є постійною на кожному з інтервалів* $\nabla_{a_1\ldots a_k \tau s}$.

Легко бачити, що розподіл в. в. $\tilde{\xi}$ не завжди є чистим. Наприклад, коли $p_{11} = 1$, а $p_{ik} > 0$ для всіх $i > 1$ і $k \in N$, то кожна точка $x_m = [0; a_1, \ldots, a_m, 1, 1, \ldots]$, $a_i > 1$ є атомом розподілу $\tilde{\xi}$ тоді, коли його неперервна компонента теж ненульова.

Дійсно, $P\{\tilde{\xi} \in C\} > 0$, де $C = \{x: a_k(x) > 1 \;\; \forall k \in N\}$.

Лема 4. *Якщо існує нескінченний набір* $(i_1, \ldots, i_k, \ldots)$ *такий, що*

$$p_{i_1} \prod_{k=1}^{\infty} p_{i_k i_{k+1}} > 0,$$

то розподіл $\tilde{\xi}$ *має атоми, в протилежному випадку атоми відсутні.*

Доведення. Твердження леми 4 випливає з того, що стрибок σ_x ф. р. $F(x)$ в. в. $\tilde{\xi}$ в точці $x \in (0; 1) \cap I$ рівний

$$\sigma_x = \lim_{\varepsilon\to 0} [F(x+\varepsilon) - F(x)] = \lim_{k\to\infty} P\{\tilde{\xi} \in \nabla_{a_1(x)\ldots a_k(x)}\} =$$

$$= p_{a_1(x)} \lim_{k\to\infty} \prod_{j=1}^{k-1} p_{a_j(x)a_{j+1}(x)} = p_{a_1(x)} \prod_{j=1}^{\infty} p_{a_j(x)a_{j+1}(x)}.$$

Лема 5. *Для того щоб спектр розподілу в. в. $\tilde{\xi}$ мав нульову міру Лебега, необхідно і достатньо, щоб матриця перехідних імовірностей $\|p_{ik}\|$ мала принаймні один нуль.*

Доведення. Необхідність випливає безпосередньо з наслідку леми 3. *Достатність*, очевидно, досить довести для випадку, коли матриця перехідних імовірностей $\|p_{ik}\|$ має тільки один нуль. Нехай $p_{\tau s}=0$. Якщо F_k — сукупність інтервалів k-го рангу, які не містять точок з $S_{\tilde\xi}$, але містяться у інтервалах $(k-1)$-го рангу з непорожнім перерізом з $S_{\tilde\xi}$; E_k — сукупність відрізків k-го рангу, які містять точки з $S_{\tilde\xi}$, то

$$S_{\tilde\xi} \subset E_{k+1} \subset E_k, \quad S_{\tilde\xi} = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k, \quad E_k = E_{k+1} \cup F_{k+1}, \quad E_k \cap F_k = \varnothing$$

і

$$\lambda(S_{\tilde\xi}) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(F_k) = \lim_{k\to\infty} \lambda(E_k).$$

Оскільки $p_i > 0 \ \forall i \in N$, то $F_1 = \varnothing$ і $\lambda(F_1)=0$, а $\lambda(E_1)=1$.

Враховуючи [8], що

$$\frac{1}{3\tau^2} < |\Delta_\tau| < \frac{2}{\tau^2} \quad \text{і} \quad \frac{1}{3\tau^2} < \frac{|\Delta_{\tau s}|}{|\Delta_\tau|} < \frac{2}{s^2},$$

маємо

$$a < |\Delta_{\tau s}| < b, \quad a = \left(\frac{1}{3\tau s}\right)^2, \quad b = \left(\frac{2}{\tau s}\right)^2.$$

Тоді

$$a < \lambda(F_2) = |\Delta_{\tau s}| < b,$$

а

$$1-b < \lambda(E_2) = 1 - \lambda(F_2) < 1-a$$

і

$$\lambda(S_{\tilde\xi}) < \lambda(E_2) < 1-a.$$

1. Нехай $\tau \neq s$. Розглянемо відрізки (інтервали) 3-го рангу

$$a|\Delta_i| < |\Delta_{i\tau s}| < b|\Delta_i|, \quad \lambda(F_3) = \sum_{i_1=1}^{\infty} |\Delta_{i_1\tau s}|, \tag{16}$$

оскільки $\nabla_{i_1\tau} \cap S_{\tilde\xi} \neq 0 \ (\tau \neq s)$ і $\nabla_{i_1\tau s} \cap S_{\tilde\xi} \neq \varnothing$. Отже,

$$a < \lambda(F_3) < b$$

і

$$\lambda(S_{\tilde\xi}) < \lambda(E_3) = \lambda(E_2) - \lambda(F_3) < 1-a-a < 1-a.$$

Для відрізків (інтервалів) 4-го рангу

$$a|\Delta_{i_1 i_2}| < |\Delta_{i_1 i_2 \tau s}| < b|\Delta_{i_1 i_2}|, \quad \lambda(F_n) = \sum_{i_1 i_2 \neq \tau s} |\Delta_{i_1 i_2 \tau s}|,$$

оскільки $\Delta_{i_1 i_2 \tau} \cap S_\xi \neq \varnothing$, якщо $i_1 i_2 \neq \tau s$. Тому $a\lambda(E_2) < \lambda(F_4) < b\lambda(E_2)$, оскільки $\lambda(E_2) = \sum_{i_1 i_2 \neq \tau s} |\Delta_{i_1 i_2}|$, і

$$\lambda(S_\xi) < \lambda(E_4) = \lambda(E_3) - \lambda(E_4) = \lambda(E_2) - \lambda(F_3) - \lambda(F_4) <$$
$$< \lambda(E_2) - \lambda(F_3) - a\lambda(E_2) = (1-a)\lambda(E_2) - \lambda(F_3) <$$
$$< (1-a)^2 - a < (1-a)^2. \tag{17}$$

Аналогічно для відрізків (інтервалів) k-го рангу

$$a|\Delta_{i_1 \ldots i_{k-2}}| < |\Delta_{i_1 \ldots i_{k-2} \tau s}| < b|\Delta_{i_1 \ldots i_{k-2}}|, \tag{18}$$

$$a\lambda(E_{k-2}) < \lambda(F_k) = \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_{k-2} \\ i_j i_{j+1} \neq \tau s}} |\Delta_{i_1 \ldots i_{k-2} \tau s}| < b\lambda(E_{k-2}) \tag{19}$$

(сумування ведеться по всіх інтервалах рангу $k-2$, які містять точки спектра, тобто по інтервалах, що входять до E_{k-2}) і

$$\lambda(S_\xi) < \lambda(E_k) = \lambda(E_{k-1}) - \lambda(F_k) = \lambda(E_2) - \sum_{i=3}^{k} \lambda(F_i) < \ldots < (1-a)^{[k/2]}, \tag{20}$$

де $[x]$ — ціла частина x. Звідси $\lambda(S_\xi) = \lim_{k\to\infty} \lambda(E_k) = 0$, оскільки $0 < 1 - a < 1$.

2. Для випадку $\tau = s$ відмінним буде те, що

$$a(1 - |\Delta_s|) < \lambda(F_3) < b(1 - |\Delta_s|),$$

але залишаються в силі $\lambda(E_3) < 1 - a$, співвідношення (18) – (20) і висновок $\lambda(S_\xi) = 0$. Лема 5 доведена.

Теорема 8. *Для того щоб в. в. $\tilde{\xi}$ мала сингулярний розподіл канторівського типу, необхідно і достатньо, щоб матриця перехідних імовірностей мала принаймні один нуль і*

$$p_{i_1} \prod_{k=1}^{\infty} p_{i_1 i_{k+1}} = 0 \quad \textit{для будь-якої послідовності } \{i_k\}.$$

Доведення. Теорема 8 є прямим наслідком лем 4 і 5.

Лема 6. *Якщо в точці x існує скінченна чи нескінченна похідна $F'(x)$ ф. р. в. в. $\tilde{\xi}$, то вона рівна*

$$A(x) = p_{a_1(x)} \lim_{k\to\infty} \left(q_k(x)[q_k(x) + q_{k-1}(x)] \prod_{j=1}^{k-1} p_{a_j(x) a_{j+1}(x)} \right), \tag{21}$$

де $q_k(x)$ — знаменник підхідного дробу k-го порядку числа x, а отже, якщо $A(x) > 0$, то x належить носію N_ξ розподілу в. в. $\tilde{\xi}$.

Доведення. Якщо похідна $F'(x)$ існує, то

$$F'(x) = \lim_{\substack{x' \le x < x'' \\ x'' - x' \to 0}} \frac{F(x'') - F(x')}{x'' - x'} = \lim_{k \to \infty} \frac{P(\Delta_{a_1(x) \ldots a_k(x)})}{|\Delta_{a_1(x) \ldots a_k(x)}|}.$$

Оскільки ж

$$P(\Delta_{a_1(x) \ldots a_k(x)}) = p_{a_1(x)} \prod_{j=1}^{k-1} p_{a_j(x) a_{j+1}(x)}$$

і

$$|\Delta_{a_1(x) \ldots a_k(x)}| = \frac{1}{q_k(x)(q_k(x) + q_{k-1}(x))},$$

то виконується (21). Належність $x \in N_\xi$ при $A(x) > 0$ випливає з означення носія. Лема 6 доведена.

Теорема 9 (основний результат). *Якою б не була матриця перехідних імовірностей $\|p_{ik}\|$, розподіл в. в. $\bar{\xi}$ не містить абсолютно неперервної компоненти.*

Доведення. Враховуючи теорему 8, доведення досить провести для випадку, коли матриця $\|p_{ik}\|$ не містить нулів. Воно аналогічне доведенню теореми 6 з тією лише різницею, що множина

$$E_\varepsilon = \{x : x \in (0; 1) \; \exists n_0(x, \varepsilon) : A^2 p_{a_n(x) a_{n+1}(x)} > 1 - \varepsilon \quad \forall n > n_0(x, \varepsilon)\}$$

має міру Лебега, рівну нулю, що випливає з теореми 8.

1. *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – Киев: Наук. думка, 1992. – 208 с.
2. *Pratsevytyi N. V.* Fractal, superfractal and anomalously fractal distributions of random variables with independent n-adic digits, an infinite set of which is fixed // Skorokhod A. V., Borovskikh Yu. V. (EDS). Exploring stochastic laws. Festschrift in Honor of 70-th Birthday of Acad. V. S. Koroljuk. – VSP, 1995. – P. 409–416.
3. *Золотарев В. М., Круглов В. М.* Структура безгранично делимых распределений на локально бикомпактной абелевой группе // Теория вероятностей и ее применения. – 1975. – **20**, № 4. – С. 712–724.
4. *Брагин А. Б.* Сингулярные распределения случайных величин, заданных с помощью цепных дробей // Случайные эволюции: теоретические и прикладные задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1992. – С. 10–16.
5. *Працевитый Н. В.* Классификация сингулярных распределений в зависимости от свойств спектра // Случайные эволюции: теорет. и прикл. задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1992. – С. 77–83.
6. *Лещинський О. Л., Працьовитий М. В.* Один клас сингулярних розподілів випадкових величин, представлених елементарним ланцюговим дробом з незалежними елементами // Сучасні фізико-математичні дослідження молодих науковців вузів України: Зб. наук. пр. – Київ: Київ. нац. ун-т ім. Т. Г. Шевченка, 1995. – С. 20–30.
7. *Математическая* энциклопедия. – М.: Сов. энцикл., 1984. – Т. 4. – 630 с.
8. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. – М.: Наука, 1978. – 112 с.

Одержано 12.10.95