УДК 517: 512

А. Г. Мазко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ЛОКАЛИЗАЦИЯ СПЕКТРА И УСТОЙЧИВОСТЬ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ*

We develop a method for localization of spectra of multiparameter matrix pencils and matrix functions, which reduce the problem to solution of linear matrix equations and inequalities. We formulate algebraic conditions for stability of linear systems of differential, difference, and difference-differential equations.

Пропонується методика локалізації спектра багатопараметричних пучків матриць і матричних функцій, що зводиться до розв'язування лінійних матричних рівнянь та нерівностей. Формулюються алгебраїчні умови стійкості лінійних систем диференціальних, різницевих та диференціально-різницевих рівнянь.

1. Введение и основные результаты. В теории устойчивости и стабилизации динамических систем широко используются алгебраические методы, основанные на решении линейных матричных уравнений и неравенств [1]. В частности, задачи локализации спектра линейных систем сводятся к исследованию эрмитовых решений матричных уравнений типа уравнения Ляпунова [2–4]. Целью настоящей работы является развитие метода матричных уравнений и неравенств при исследовании спектральных задач для многопараметрических пучков матриц и матричных функций и его применение в задачах устойчивости линейных динамических систем.

Пусть $\Phi(z)=A_0-z_1A_1-\ldots-z_mA_m$ — многопараметрический пучок матриц размера $n\times n$, удовлетворяющий условию регулярности

$$\det\Phi(z)\not\equiv 0,\quad z=\begin{bmatrix} z_1\\ \vdots\\ z_m\end{bmatrix}\in C^m. \tag{1}$$

Спектр $\sigma(\Phi)$ данной матрицы определяется как геометрическое место точек z, для которых $\det\Phi(z)=0$. Ставится задача локализации спектра $\sigma(\Phi)$, т.е. построения векторных множеств $\mathfrak{L}$, содержащих все точки $\sigma(\Phi)$.

Теорема 1. *Пусть эрмитовы матрицы X и Y удовлетворяют соотношениям*

$$\sum_{i,j=0}^{m}\gamma_{ij}A_iXA_j^*=Y, \tag{2}$$

$$BXB^*\geq 0,\quad B=\begin{bmatrix} A_1\\ \vdots\\ A_m\end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$Y+\Phi(z)E\Phi(z)^*>0\quad (\forall\, z\notin\mathfrak{L}), \tag{4}$$

где $\gamma_{ij}=\bar{\gamma}_{ji}$ — скалярные коэффициенты, составляющие матрицу Γ, $E>0$,

$$\mathfrak{L}=\{z:\ \operatorname{rang}\Delta(z)+\operatorname{sign}\Delta(z)\geq 2\}, \tag{5}$$

$\Delta(z)=Z\Gamma Z^*$, $Z=[z, I_m]$, *I_m — единичная матрица порядка m. Тогда каждая точка спектра $\sigma(\Phi)$ принадлежит множеству $\mathfrak{L}$.*

Векторные множества $\mathfrak{L}$, локализующие спектр $\sigma(\Phi)$, описываются в терминах ранга (rang) и сигнатуры (sign) эрмитовой матрицы $\Delta(z)$ и определяются значениями лишь скалярных коэффициентов уравнения (2). Условие

* Выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий.

$z \in \mathfrak{X}$ означает, что матрица $\Delta(z)$ имеет, по крайней мере, одно положительное собственное значение, а условие $z \notin \mathfrak{X}$ эквивалентно неравенству $\Delta(z) = \gamma_{00} zz^* + zg^* + gz^* + G \leq 0$, где

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{00} & g^* \\ g & G \end{bmatrix}.$$

Например, если $\gamma_{00} > 0$ и $\gamma_{00} G \leq gg^*$, то множество $\mathfrak{X}$ расположено вне m-мерного шара: $\mathfrak{X} \subset \Omega = \{z\colon \|z - z_0\|^2 > r\}$, где $z_0 = -\gamma g$, $r = \gamma e$, $\gamma = 1/\gamma_{00}$, $e > 0$ — максимальное собственное значение матрицы $\gamma gg^* - G$.

При изучении множества (5) могут быть использованы равенства [5]

$$\operatorname{rang}\Gamma = \operatorname{rang}\Delta(z) + \operatorname{rang}S(z), \quad \operatorname{sign}\Gamma = \operatorname{sign}\Delta(z) + \operatorname{sign}S(z),$$

где $S(z) = \Gamma - \Gamma Z^* \Delta^+ Z\Gamma$, Δ^+ — произвольная полуобратная матрица, удовлетворяющая уравнению $\Delta(z)\Delta^+\Delta(z) = \Delta(z)$. Если матрица Γ имеет лишь одно положительное собственное значение, то условия $z \in \mathfrak{X}$ и $S(z) \leq 0$ эквивалентны.

Из теоремы 1 вытекает методика построения областей в комплексной плоскости, содержащих спектр матричных функций вида

$$F(\lambda) \triangleq \Phi(z(\lambda)) = A_0 - z_1(\lambda)A_1 - \ldots - z_m(\lambda)A_m,$$

где $z(\lambda)$ — заданная вектор-функция с компонентами $z_k(\lambda)$, $k = \overline{1, m}$.

Теорема 2. *Если эрмитовы матрицы X и Y удовлетворяют соотношениям* (2)–(4), *причем в условии* (4) $z = z(\lambda)$, $\lambda \notin \Lambda$, *где* $\Lambda = \{\lambda\colon z(\lambda) \in \mathfrak{X}\}$, *а $\mathfrak{X}$ — множество вида* (5), *то спектр матричной функции $F(\lambda)$ расположен в области Λ.*

Примечание. Для выполнения условий (3) ((4)) достаточно, чтобы $X(Y)$ была неотрицательно (положительно) определенной матрицей.

Если $Y \geq 0$, то ограничение (4) эквивалентно тождеству

$$\operatorname{rang}[\Phi(z), Y] \equiv n \quad (\forall z \notin \mathfrak{X}),$$

которое является аналогом условий управляемости и стабилизируемости линейных систем в форме Симона–Миттера [6, 7]. Для выполнения условия (4) достаточно также положить

$$Y \geq CQC^*, \; C = [A_1, \ldots, A_m].$$

Здесь и в дальнейшем Q — произвольная положительно определенная матрица порядка nm. В скалярном случае $n = 1$, в частности, для полинома $F(\lambda) = a_0 + \lambda a_1 + \ldots + \lambda^m a_m$ условия (2)–(4) сводятся к одному неравенству $a\Gamma a^* > 0$, где $a = [a_1, \ldots, a_m]$.

Можно показать, что если $z_k(\lambda) = -\lambda^m$, $k = \overline{1, m}$, то матрица Δ в (5) конгруэнтна матрице $\tilde{\Delta} = \Gamma_0 - \lambda\Gamma_1 - \bar{\lambda}\Gamma_1^* + \lambda\bar{\lambda}\Gamma_2$, где

$$\Gamma_0 = \|\gamma_{ij}\|_1^m, \;\; \Gamma_1 = \|\gamma_{i-1j}\|_1^m, \;\; \Gamma_2 = \|\gamma_{i-1j-1}\|_1^m.$$

При этом условия $\tilde{\Delta} \leq 0$ и $\lambda \notin \Lambda$ эквивалентны. В частности, если неравенство $\tilde{\Delta} \leq 0$ выполнено при всех λ, для которых $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$, то область Λ расположена слева от мнимой оси.

2. Устойчивость в области локализации спектра некоторых динамических систем. В качестве следствий теоремы 2 сформулируем алгебраические условия устойчивости непрерывных и дискретных динамических систем, наиболее часто используемых в приложениях.

В случае $m=1$ область локализации спектра линейного пучка $F(\lambda)=A_0+$ $+\lambda A_1$ в теореме 2 описывается в виде

$$\Lambda=\{\lambda:\ \gamma_{00}\lambda\bar{\lambda}-\gamma_{01}\lambda-\gamma_{10}\bar{\lambda}+\gamma_{11}>0\}.$$

Ее границей может выступать произвольная прямая или окружность. В частности, при следующих значениях матрицы коэффициентов:

$$\Gamma=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\gamma\end{bmatrix},\ \gamma\leq 0,\quad \Gamma=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & r^2\end{bmatrix},\ 0<r\leq 1,$$

имеем алгебраические условия устойчивости дифференциальных и разностных систем, не разрешенных относительно производных и итераций

$$A_0x(t)+A_1\dot{x}(t)=0, \tag{6}$$

$$A_0x_k+A_1x_{k+1}=0,\quad k=0,1,\ldots. \tag{7}$$

***Следствие* 1.** *Если матричное неравенство*

$$A_0XA_1^*+A_1XA_0^*+2\gamma A_1XA_1^*=Y\geq A_1QA_1^*$$

имеет решение X *такое, что* $A_1XA_1^*\geq 0$, *то система дифференциальных уравнений* (6) *асимптотически устойчива и ее спектр расположен в полуплоскости* $\Lambda=\{\lambda:\ \mathrm{Re}\,\lambda<\gamma\}$. *Система* (6) *асимптотически устойчива в том и только в том случае, когда для некоторых эрмитовых матриц* X *и* Y *выполнены соотношения*

$$A_0XA_1^*+A_1XA_0^*=Y,$$

$$A_1XA_1^*\geq 0,$$

$$Y+(A_0+\lambda A_1)(A_0+\lambda A_1)^*>0\quad (\forall\,\lambda:\ \mathrm{Re}\,\lambda\geq 0).$$

***Следствие* 2.** *Если матричное неравенство*

$$r^2A_1XA_1^*-A_0XA_0^*=Y\geq A_1QA_1^*$$

имеет решение X *такое, что* $A_1XA_1^*\geq 0$, *то система разностных уравнений* (7) *асимптотически устойчива и ее спектр расположен внутри круга* $\Lambda=$ $=\{\lambda:\ |\lambda|<r\}$. *Система* (7) *асимптотически устойчива в том и только в том случае, когда для некоторых эрмитовых матриц* X *и* Y *выполнены соотношения*

$$A_1XA_1^*-A_0XA_0^*=Y,$$

$$A_1XA_1^*\geq 0,$$

$$Y+(A_0+\lambda A_1)(A_0+\lambda A_1)^*>0\quad (\forall\,\lambda:\ |\lambda|\geq 1).$$

Первые утверждения следствий 1 и 2 установлены в [8] на основе канонического представления регулярного пучка матриц. При этом изучены условия разрешимости и структура решений соответствующих матричных уравнений и неравенств, позволяющие сформулировать критерии асимптотической устойчивости систем (6) и (7). В частности, неизвестные эрмитовы матрицы могут быть определены в виде $X=T\hat{X}T^*$, $Y=A_1T\hat{Y}TA_1^*$, где T — решение максимального ранга алгебраической системы [2]

$$A_0TA_1 = A_1TA_0, \quad T = TA_1T.$$

Теорема 2 может быть использована при изучении условий устойчивости более сложных, чем (6) и (7), динамических систем. Так, рассмотрим следующие классы систем:

$$A_0x(t) + A_1\dot{x}(t) + A_2x(t-\tau) = 0, \tag{8}$$

$$A_0x(t) + A_1\dot{x}(t) + A_2\ddot{x}(t) = 0, \tag{9}$$

$$A_0x_k + A_1x_{k+1} + A_2x_{k+2} = 0. \tag{10}$$

Спектр системы (8) с постоянным запаздыванием $\tau \geq 0$ образуют собственные значения матричной функции $F(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + e^{-\lambda\tau}A_2$, а спектры систем (9) и (10) состоят из собственных значений квадратичного пучка $F(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2$. Обозначим матрицы

$$B = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \quad C = [A_1, A_2].$$

***Следствие* 3.** *Если матричное неравенство*

$$A_0XA_1^* + A_1XA_0^* - \alpha A_1XA_1^* - \beta A_2XA_2^* = Y \geq CQC^*,$$

где $\alpha \geq 1/\beta > 0$, *имеет решение* X *такое, что* $BXB^* \geq 0$, *то система дифференциально-разностных уравнений* (8) *асимптотически устойчива при любых постоянных значениях параметра* $\tau \geq 0$ *и ее спектр расположен в области* $\Lambda = \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < \xi\}$, *где* $\xi = \xi(\tau) \leq 0$ — *единственный корень трансцендентного уравнения* $2\beta\xi + \alpha\beta = e^{-2\tau\xi}$.

Аналогичные условия устойчивости системы (8) в случае $A_1 = I_n$ устанавливаются с помощью функционала Ляпунова–Красовского [9–11].

Рассматривая случай квадратичного пучка $F(\lambda)$, полагаем

$$Z = [z(\lambda), I_2] = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -\lambda^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix}\tilde{Z}, \quad \tilde{Z} = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{bmatrix}.$$

При этом области локализации спектра $\sigma(F)$ в теореме 2 можно описать в виде

$$\Lambda = \Lambda_0 \dot{\cup} \Lambda_1, \quad \Lambda_0 = \{\lambda : \operatorname{tr}\tilde{\Delta} > 0\}, \quad \Lambda_1 = \{\lambda : \det\tilde{\Delta} = \omega^*\check{\Gamma}\omega < 0\},$$

где $\tilde{\Delta} = \tilde{Z}\Gamma\tilde{Z}^*$, $\omega^* = [1, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}^2]$, $\check{\Gamma}$ — присоединенная матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов матрицы Γ. Например, для матрицы

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -1 & \delta & \theta \\ \delta & -\delta^2 & \delta \\ \theta & \delta & -1 \end{bmatrix} \quad (0 < \delta < 1, \ -1 < \theta \leq 1 - 2\delta^2)$$

$\Lambda_0 = \varnothing$, а Λ_1 — некоторая область, расположенная слева от мнимой оси. Причем в случае $\theta = 1 - 2\delta^2$ область Λ_1 вырождается в открытую левую полуплоскость.

***Следствие* 4.** *Если матричное неравенство*

$$-A_0XA_0^* - A_2XA_2^* - \delta^2A_1XA_1^* + \theta(A_0XA_2^* + A_2XA_0^*) +$$
$$+ \delta(A_0XA_1^* + A_1XA_0^* + A_1XA_2^* + A_2XA_1^*) = Y \geq CQC^*$$

имеет решение X *такое, что* $BXB^* \geq 0$, *то система дифференциальных уравнений второго порядка* (9) *асимптотически устойчива и ее спектр расположен в области*

$$\Lambda = \{\lambda \colon \eta^2(c-\xi) > \xi(1+d\xi+\xi^2)\},$$

где

$$\lambda = \xi + i\eta, \quad c = \delta - \frac{1-\theta}{2\delta}, \quad d = \delta + \frac{1-\theta}{2\delta}.$$

***Следствие* 5.** *Если матричное неравенство*

$$-A_0XA_0^* - A_1XA_1^* + 2\rho A_2XA_2^* = Y \geq CQC^*,$$

где $0 < \rho \leq 1/4$, *имеет решение* X *такое, что* $BXB^* \geq 0$, *то система разностных уравнений* (10) *асимптотически устойчива и ее спектр расположен внутри круга*

$$\Lambda = \left\{\lambda \colon |\lambda|^2 < \rho + \sqrt{\rho^2 + 2\rho}\right\}.$$

***Следствие* 6.** *Если матричное неравенство*

$$-A_0XA_2^* - A_2XA_0^* - \frac{1}{2}A_1XA_1^* - 4\varepsilon^2A_2XA_2^* = Y \geq CQC^*,$$

где $\varepsilon \geq 0$, *имеет решение* X *такое, что* $BXB^* \geq 0$, *то спектр квадратичного пучка* $F(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2$ *расположен в области* $\Lambda = \{\lambda \colon |\operatorname{Re}\lambda| > \varepsilon\}$.

Данное утверждение при $\varepsilon = 0$ выражает условия дихотомии системы (9), т.е. отсутствия у нее чисто мнимых собственных значений. Используя преобразование $\lambda = i\mu$, можно сформулировать условия, при которых все собственные значения системы (9) комплексные.

В заключение отметим, что ряд сформулированных утверждений, вытекающих из теорем 1, 2 и являющихся полезными для приложений, может быть продолжен. Эрмитовы матрицы Γ, отвечающие желаемым наперед заданным свойствам множества $\mathfrak{X}$ или области Λ, определяются неоднозначно. При построении новых условий устойчивости систем (9) и (10) могут быть использованы следствия 4 и 5 и билинейное преобразование спектрального параметра $\lambda = (\mu+1)/(\mu-1)$.

Рассматривая обобщение системы (8) вида

$$A_0x(t) + A_1\dot{x}(t) + A_2x(t-\tau_1) + \ldots + A_mx(t-\tau_{m-1}) = 0,$$

можно установить, что область Λ, локализующая спектр матричного квазиполинома

$$F(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + e^{-\lambda\tau_1}A_2 + \ldots + e^{-\lambda\tau_{m-1}}A_m$$

в теореме 2 при условиях

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & g^* \\ g & G \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & h^* \\ h & H \end{bmatrix}, \quad g^* = [1, 0, \ldots, 0],$$

$$h^* = [h_1, \ldots, h_{m-1}], \quad \gamma_{11}\gamma \geq \sum_{j=1}^{m-1}(1+|h_j|)^2, \quad H < 0,$$

где $\gamma < 0$ — максимальное собственное значение блока H, расположена слева от мнимой оси. При этом соотношения (2) – (4) обеспечивают асимптотическую устойчивость данной системы при любых постоянных значениях параметров запаздываний $\tau_1 \geq 0, \ldots, \tau_{m-1} \geq 0$.

3. Доказательство теорем 1 и 2. Представим матричное уравнение (2) в виде

$$A(\Gamma \otimes X)A^* = Y, \quad A = [A_0, \ldots, A_m], \tag{11}$$

где $\otimes$ — знак кронекерова произведения. Пусть $v^* \neq 0$ — левый собственный вектор матрицы $\Phi(z)$, отвечающий точке спектра $z \in \sigma(\Phi)$. Тогда выполнено соотношение

$$v^*A = v^*[A_0, C] = v^*C([z, I_m] \otimes I_n) = v^*C[Z \otimes I_n].$$

При этом $v^*C \neq 0$. В противном случае выполнено неравенство $\operatorname{rang} A < n$, которое противоречит условию (1).

Предположим, что $z \notin \mathfrak{L}$. Умножая (11) слева (справа) на v^* (v) с учетом (3), (4) и свойств кронекерова произведения, получаем соотношение

$$v^*C(\Delta(z) \otimes X)C^*v = \operatorname{tr}(\Delta(z)W^T) = v^*Yv > 0,$$

где

$$W = VBXB^*V^* \geq 0, \quad V = \begin{bmatrix} v^* & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & v^* \end{bmatrix}.$$

В случае $Y \geq 0$ неравенства $v^*Yv > 0$ и $v^*Y \neq 0$ эквивалентны. Используя разложение неотрицательно определенной матрицы $W^T = RR^* \geq 0$ и переставляя множители под знаком операции tr, приходим к неравенству

$$\operatorname{tr}(R^*\Delta(z)R) > 0.$$

Отсюда с учетом закона инерции следует, что матрица $\Delta(z)$ не может быть отрицательно полуопределенной, т. е. $z \in \mathfrak{L}$. Это противоречит предположению о том, что $z \notin \mathfrak{L}$. Следовательно, $\sigma(\Phi) \subset \mathfrak{L}$. В частности, в теореме 2 выполнено включение $\sigma(F) \subset \Lambda$.

Теоремы 1 и 2 доказаны.

1. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishman V.* Linear matrix inequalities in system and control theory // Stud. Appl. Math. – 1994. – **15**. – 193 p.
2. *Мазко А. Г.* Построение аналогов уравнений Ляпунова для матричного полинома // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 3. – С. 337–343.
3. *Мазко А. Г.* Обобщенное уравнение Ляпунова и его применение в задачах устойчивости и локализации спектра: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1995. – 24 с.
4. *Gutman S., Chojnowski F.* Root-Clastering criteria (II); Linear matrix equations // IMA J. Math. Contr. and Inf. – 1989. – **6**. – P. 269–300.
5. *Мазко А. Г.* Полуобращение и свойства инвариантов матриц // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 4. – С. 525–528.
6. *Crosslej T. R., Porter B.* Simple proof of the Simon–Mitter controllebility theorem // Electron lett. – 1973. – **9**, № 3. – P. 51–52.
7. *Хасина Е. Н.* Об управлении вырожденными линейными динамическими системами // Автоматика и телемеханика. – 1982. – № 4. – С. 30–37.
8. *Мазко А. Г.* Распределение корней матричного полинома относительно плоских кривых // Численно-аналитические методы исследования динамики и устойчивости сложных систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 90–96.
9. *Кореневский Д. Г., Мазко А. Г.* Компактная форма алгебраического критерия абсолютной (по запаздыванию) устойчивости решений линейных дифференциально-разностных уравнений // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 2. – С. 278–282.
10. *Зеленцовский А. Л.* Устойчивость с вероятностью 1 решений систем линейных стохастических дифференциально-разностных уравнений Ито // Там же. – 1991. – **43**, № 2. – С. 147–151.
11. *Хусаинов Д. Я.* Об одном методе построения функционалов Ляпунова–Красовского для линейных систем с запаздывающим аргументом // Там же. – 1989. – **41**, № 3. – С. 382–387.

Получено 24.10.95